Kongruencia-felcserélhető félcsoportok speciális félcsoportosztályokban

MTA doktori értekezés tézisfüzete

Nagy Attila
BME
Matematika Intézet

2016

1. Bevezetés

1.1. Kutatási terület, az értekezés célkitűzése és szerkezete

Egy algebrai struktúráról azt mondjuk, hogy kongruencia-felcserélhető, ha tetszőleges α és β kongruenciái esetén $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ teljesül, ahol $\circ$ a binér relációk szokásos kompozícióját jelöli. A csoportok és a gyűrűk jól ismert példák kongruencia-felcserélhető algebrai struktúrákra. Továbbá minden olyan algebrai struktúra, melynek kongruenciái láncot alkotnak a tartalmazásra nézve kongruencia-felcserélhető. Ilyenek pl. a Galois-gyűrűk és az értékelésgyűrűk.

A kongruencia-felcserélhető algebrai struktúrákkal számos cikkben találkozhatunk. Példaként említem a [HM73], [Idz89], [Kea93], [VW91] cikkeket, amelyekben a vizsgálatok olyan speciális varietásokkal kapcsolatosak, amelyekhez tartozó algebrai struktúrák mindegyike kongruencia-felcserélhető. Schmidt E. Tasmástól származó híres (az [RTW07] cikkben már megoldott) probléma középpontjában is a kongruencia-felcserélhető algebrai struktúrák állnak: Igaz-e, hogy minden disztributív algebrai háló izomorf valamely kongruencia-felcserélhető algebrai struktúra kongruenciahálójával?

A félcsoport fogalma a csoport és a gyűrű fogalmának közös általánosítása. Ez a tény mindig is hatással volt a félcsoportelméleti vizsgálatokra. Mivel a csoportok és a gyűrűk kongruencia-felcserélhetőek, valamint azok a gyűrűk, melyek kongruenciahálója láncot alkot a tartalmazásra nézve fontos szerepet játszanak a gyűrűelméletben, ezért nem meglepő, hogy számos olyan cikkel találkozhatunk a félcsoportelmélet irodalmában, amelyek célja a kongruencia-felcserélhető félcsoportok, speciálisan azon félcsoportok leírása, amelyek kongruenciahálója láncot alkot a tartalmazásra nézve. Ezen utóbbi feltételnek eleget tevő félcsoportokat Δ-félcsoportoknak is nevezzük.

Az értekezésben a Δ-félcsoportokkal és a kongruencia-felcserélhető félcsoportokkal kapcsolatos kutatási eredményeimet, a [Nag84], [Nag90], [Nag92], [Nag98], [Nag00], [Nag04], [Nag05], [Nag08], [Nag13] saját, valamint a társszerzőkkel írt [DN10], [JN03], [NZ16] cikkeim eredményeit foglalom össze.

Az értekezés (a számozatlan bevezetésen kivül) hét számozott fejezetet tartalmaz. Az 1. Fejezet azokat a félcsoportelméleti alapfogalmakat, valamint azokat az általános, jól ismert félcsoportelméleti eredményeket tartalmazza, amelyek az értekezésben felhasználásra kerülnek. A 2. Fejezetben teljes jellemzését adjuk a gyengén exponenciális Δ-félcsoportoknak. A 3. Fejezetben megadjuk az összes $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív Δ-félcsoportot; speciálisan az összes $\mathcal{RC}$-kommutatív Δ-félcsoportot. A 4. Fejezetben azok a félcsoportok állnak a vizsgálat középpontjában, amelyek valamilyen nem identikus permutáció-azonosságot telesítenek. Ezeket a félcsoportokat permutatív félcsoportoknak is nevezzük. A fejezet egyik fő eredményeként megmutatjuk, hogy minden permutatív Δ-félcsoport mediális (azaz teljesíti az $axyb = ayxb$ azonosságot). Ezen eredmény felhasználásával bizonyítjuk a fejezet másik fő tételét, amely szerint minden permutatív congruencia-felcserélhető félcsoport mediális. Az 5. Fejezetben megadjuk az összes mediális Δ-félcsoportot, illetve a jobb tükrözés és a bal tükrözés fogalmának bevezetésével megmutatjuk, hogy hogyan konstruálható a mediális congruencia-felcserélhető félcsoportok egyik típusa (az úgynevezett 1. típus) a kommutatív nem arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportokból. A 6. Fejezet azon véges kongruencia-felcserélhető félcsoportokkal foglalkozik, amelyek arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként állnak elő. Ezen vizsgálatokban fontos szerep jut Pálfy Péter Pál és Pavel Pudlák [PP80] cikkében szereplő Lemma 3 eredményének. A 7. Fejezetben tetszőleges félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén vizsgáljuk annak feltételeit, hogy az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra ideálhálójának az S félcsoport feletti $\mathcal{B}_S$ relációfélcsoportba való $J \mapsto \varrho_J$ leképezése $\circ$-homomorfizmus legyen, ahol ϱ_J jelöli az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra J ideálja által definiált kongruenciának az S félcsoportra való leszűkítését. Megmutatjuk, hogy a kongruencia-felcserélhetőség szükséges feltétel, és a vizsgált két esetben pedig elégséges is.

1.2. Történeti áttekintés

Az értekezés témájával kapcsolatos első publikációk 1969-ben jelentek meg. B.M. Schein ([Sch69]) and T. Tamura ([Tam69]) egymástól függetlenül publikált két különböző cikkben leírták a kommutatív Δ-félcsoportokat. Ezt követte H. Hamilton 1975-ben publikált [Ham75] cikke, amelyben a szerző a kommutatív kongruencia-felcserélhető félcsoportokat határozta meg. A kommutatív félcsoportokra bizonyított eredmények hatására elkezdődött egy olyan kutatási irány, amelynek célja a Δ-félcsoportok, illetve a kongruencia-felcserélhető félcsoportok minél több és szélesebb félcsoportosztályban való meghatározása. Ennek első lépéseként P.G. Trotter [Tro76] cikkében meghatározta az összes exponenciális Δ-félcsoportot. 1981-ben A. Cherubini és C. Bonzini általánosították P.G. Trotter eredményét az exponenciális félcsoportok egy részosztályában, a mediális félcsoportok osztályában oly módon, hogy [BC81] cikkükben meghatározták az összes lehetséges kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportot. P.G. Trotter eredményeinek általánosítása volt a célja az 1984-ben publikált [Nag84] cikkemnek, amelyben ugyancsak a Δ-félcsoportokkal foglalkoztam, de az exponenciális félcsoportok osztályánál bővebb osztályban, az úgynevezett gyengén exponenciális félcsoportok osztályában. Ebben a cikkben bevezettem egy új fogalmat, a gyengén exponenciális félcsoport fogalmát, és meghatároztam a gyengén exponenciális arkhimédeszi Δ-félcsoportokat. 1990-ben publikált [Nag90] cikkemben teljessé tettem a vizsgálatot; meghatároztam és jellemeztem az összes lehetséges gyengén exponenciális Δ-félcsoportot. További félcsoportosztályokban is sikerült a Δ-félcsoportok teljes megadása. Az 1992-ben publikált [Nag92] cikkemben meghatároztam az összes $\mathcal{RC}$-kommutatív ($\mathcal{R}$-kommutatív és feltételesen kommutatív) Δ-félcsoportot. Ezen eredményeket is használva, Z. Jiang 1995-ben publikált [Jia95] cikkében meghatározta az összes kongruencia-felcserélhető $\mathcal{LC}$-kommutatív félcsoportot, általánosítva ezzel a [Nag92] cikkem eredményeit. 1998-ban publikált [Nag98] cikkemben bevezettem az $\mathcal{GC}_n$-kommutatív félcsoport fogalmát. Ezen cikkem, illetve Z. Jianggal közös [JN03] cikkem eredményeként megadtuk az összes $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív ($\mathcal{R}$-kommutatív és $\mathcal{GC}_n$-kommutatív) Δ-félcsoportot. Z. Jiang és L. Chen 2004-ben publikált [JC04] cikkükben azokat a jobb duo félcsoportokat vizsgálták, amelyek az általam definiált $\mathcal{GC}_n$-kommutativitást is teljesítették. Ezeket a félcsoportokat $\mathcal{RDGC}_n$-kommutatív félcsoportoknak nevezték. Említett cikkükben meghatározták az összes kongruencia-felcserélhető $\mathcal{RDGC}_n$-kommutatív félcsoportot. 2000-ben publikált [Nag00] cikkemben meghatároztam az összes jobb kommutatív Δ-félcsoportot. A cikkben szereplő egyik példa rámutatott arra, hogy W.A. Etterbeek (T. Tamura témavezetésével írt) sokat idézett [Ett70] PhD disszetációjában a Theorem 3.45 állítása hamis, a bizonyítása hibás, és emiatt a Theorem 3.49-ben hibásan adta meg a mediális Δ-félcsoportokat. P.R. Jonesszal 2004-ben közösen írt [Nag04] cikkünkben javítottuk ezt a hibát. A cikkünk fő eredményeként megmutattuk, hogy minden permutatív félcsoport mediális, és hibátlanul megadtuk az összes mediális Δ félcsoportot. Ezen cikkbeli eredményünk felvetette bennem a következő kérdést: igaz-e, hogy nem csak a Δ-félcsoportoknál, hanem a kongruencia-felcserélhető félcsoportok esetében is következik a medialitás a permutatív tulajdonságból. 2005-ben publikált [Nag05] cikkemben problémaként vetettem fel ezt a kérdést, amelyre ott részleges választ adtam. Megmutattam, hogy egy kongruencia-felcserélhető permutatív félcsoport mediális vagy egy derékszögű csoportnak egy nem triviális (azaz legalább kételemű) kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítése. 2006-ban P.R. Jones ([Jon06]) és tanítványom, Deák Attila ([Dea06]) egymástól függetlenül bizonyították, hogy a második esetben is szükségképpen teljesül a medialitás, igazolva a sejtésemet: Minden kongruencia-felcserélhető permutatív félcsoport mediális. Az MTA Rényi Intézet algebra szemináriumán tartott egyik előadásunk alkalmával Márki László problémaként vetette fel, hogy mit lehet mondani a véges kongruencia-felcserélhető félcsoportokról. Deák Attilával 2009-ben közösen írt [DN10] cikkünkben megvizsgáltuk a véges kongruencia-felcserélhető Putcha félcsoportokat, meghatározva a lehetséges típusokat. Két esetet részletesen vizsgáltunk, teljes jellemzésüket adva, amelyhez többször felhasználtuk Pálfy Péter Pál és Pavel Pudlák közösen írt [PP80] cikkének Lemma 3-beli eredményét. 2008-ban publikált [Nag08] cikkemben definiáltam félcsoportok jobb oldali, illetve bal oldali tükrözését, és megmutattam, hogy ezeknek a konstrukcióknak a segítségével hogyan kaphatjuk meg A. Cherubini és C. Bonzini [BC81] dolgozatában szereplő 1. típusú mediális kongruencia-felcserélhető félcsoportokat a kommutatív nem arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportokból. 2016-ban Zubor Mártonnal közösen publikált [NZ16] cikkünkben a véges kongruencia-felcserélhető félcsoportok félcsoportalgebrai alkalmazhatóságával foglalkoztunk.

1.3. Az értekezés tézisei

1. Tézis Megadom az összes gyengén exponenciális Δ-félcsoportot: Egy S félcsoport akkor és csak akkor gyengén exponenciális Δ-félcsoport, ha teljesíti a következő feltételek egyikét.

(i) S izomorf G-vel, vagy G^0-lal, ahol G egy kváziciklikus p-csoport nem triviális részcsoportja (p prímszám).

(ii) S kételemű félháló.

(iii) S izomorf R-rel, vagy R^0-lal, vagy R^1-gyel, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.

(iv) S izomorf L-lel, vagy L^0-lal, vagy L^1-gyel, ahol L kételemű balzéró félcsoport.

(v) S olyan nil félcsoport, melynek ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

(vi) S egy T1, vagy T2R, vagy T2L félcsoport.

2. Tézis Megadom az összes $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív Δ-félcsoportot: Egy S félcsoport akkor és csak akkor RGC_n-kommutatív Δ-félcsoport, ha teljesül rá a következő feltételek egyike.

(i) S izomorf G-vel, vagy G^0-lal, ahol G egy kváziciklikus p-csoport nem triviális részcsoportja (p prímszám).

(ii) S izomorf egy kételemű félhálóval.

(iii) S izomorf R-rel, vagy R^0-lal, vagy R^1-gyel, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.

(iv) S izomorf egy olyan kommutatív nil félcsoporttal, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

(v) S izomorf N^1-gyel, ahol N egy olyan nem triviális kommutatív nil félcsoport, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

3. Tézis P.R. Jones-szal való közös munkánk eredményeként megmutatom, hogy minden permutatív Δ-félcsoport mediális.

4. Tézis P.R. Jones és Deák Attila eredményeit is használva megmutatom, hogy minden permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport mediális.

5. Tézis P.R. Jones-szal közös munkánk eredményeként megadom az összes mediális Δ-félcsoportot: Egy S félcsoport akkor és csak akkor mediális Δ-félcsoport, ha eleget tesz a következő feltételek egyikének.

(i) S kommutatív Δ-félcsoport.

(ii) S izomorf R-rel, vagy R^0-lal, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.

(iii) S izomorf azzal a $Z = \{0, e, a\}$ félcsoporttal, amelyet a $\{0, a\}$ zéró félcsoportból egy e idempotens elem adjungálásával kaptunk, mégpedig úgy, hogy e jobb oldali egységeleme Z-nek, és bal oldali annulátora $\{0, a\}$-nak.

(iv) S izomorf a (ii) vagy (iii) típusú félcsoportok duálisával.

6. Tézis Definiálom félcsoportok bal, illetve jobb tükrözésének fogalmát, és megmutatom, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor 1-es típusú mediális kongruencia-felcserélhető félcsoport, ha

(1) bal tükrözése egy nem-arkhimédeszi kommutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport jobb tükrözésének vagy, ami ezzel ekvivalens,

(2) jobb tükrözése egy nem-arkhimédeszi kommutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport bal tükrözésének.

7. Tézis Deák Attilával közös munkánk eredményeként megadom a kongruencia-felcserélhető félcsoportok főbb típusait azon véges félcsoportok között, amelyek arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként állnak elő. Definiálok egy konstrukciót, és megmutatom, hogy az egyik esetnek megfelelő félcsoportok pontosan azok, amelyek ezzel a konstrukcióval állíthatók elő. Egy másik esetnek megfelelő félcsoportok teljes jellemzését is megadom. Az esetek vizsgálatában többször felhasználom Pálfy Péter Pál és Pavel Pudlák [PP80] cikkében szereplő Lemma 3 eredményét.

8. Tézis Egy $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra J ideálja esetén jelölje ϱ_J az S félcsoport azon kongruenciáját, amely az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra J ideál által definiált kongruenciájának S-re való leszűkítése. Zubor Mártonnal közös munkánk eredményeként megmutatom, hogy ha S egy félháló vagy egy derékszögű köteg, akkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $J \mapsto \varrho_J$ leképezés akkor és csak akkor homomorfizmusa a $(Con(\mathbb{F}[S]); \circ)$ félcsoportnak az S feletti $(\mathcal{B}_S; \circ)$ relációfélcsoportba, ha S kongruencia-felcserélhető (itt egy félcsoportalgebra J ideálja esetén J jelöli az általa definiált kongruenciát is).

1.4. Vizsgálati módszerek

A félcsoportelmélet egyik alapvető eredménye szerint minden félcsoportot fel lehet bontani félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálójára ([Tam72]), azaz minden S félcsoportnak van olyan α kongruenciája, melynek osztályai félháló-felbonthatatlan félcsoportok és az S/α faktorfélcsoport félháló. H. Hamilton, illetve T. Tamura és B.M. Schein eredményei alapján egy félháló akkor és csak akkor kongruencia-felcserélhető, illetve akkor és csak akkor Δ-félcsoport, ha legfeljebb két elemet tartalmaz. Jól ismert tény az is, hogy egy kongruencia-felcserélhető félcsoport, illetve egy Δ-félcsoport minden homomorf képe is kongruencia-felcserélhető, illetve Δ-félcsoport. Ezen eredmények alapján minden kongruencia-felcserélhető félcsoport, illetve Δ-félcsoport vagy félháló-felbonthatatlan, vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoport félhálójaként.

A vizsgálatok alapját a disszertációban tárgyalt minden egyes félcsoportosztályban (korábban már ismert, illetve az általunk újjonnan bizonyított eredmények szerint) az a tény jelenti, hogy a bennük szereplő félcsoportok legszűkebb félháló-kongruenciájának osztályai arkhimédeszi félcsoportok, azaz olyan félcsoportok, amelyekben bármely két elem mindegyike osztja a másik valamelyik hatványát. Mivel célunk struktúra tételek bizonyítása, ezért szükséges az említett felbontásban szereplő arkhimédeszi komponensek struktúrájának ismerete is. Az idempotens elemet tartalmazó arkhimédeszi félcsoportok szerkezetének vizsgálatában az ideálbővítés módszere használható, mivel ismert tény, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor idempotens elemes arkhimédeszi félcsoport, ha előáll egy idempotens elemes egyszerű félcsoportnak egy nil félcsoporttal való bővítéseként ([Chr69]). Ezért a struktúravizsgálatok - az arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként való előállíthatóság bizonyítása után - azzal folytatódnak, hogy leírjuk az egyszerű félcsoportok szerkezetét a vizsgált félcsoportosztályokban. Eseteinkben az egyszerű félcsoportok mindig valamilyen teljesen egyszerű félcsoportok, melyek vizsgálatában hasznosan alkalmazható a Rees tétel. A bizonyításokban több helyen fontos szerepük van az idempotens elemet nem tartalmazó arkhimédeszi félcsoportoknak is. Itt általában azt bizonyítjuk, hogy az idempotens elemet nem tartalmazó arkhimédeszi félcsoportoknak van nem triviális csoport-homomorf képe. Ezen bizonyításokban általában a félcsoportok reflexív és unitér részfélcsoportjai által definiált főkongruencia fogalmának van fontos szerepe.

A kongruencia-felcserélhető félcsoportok, illetve a Δ-félcsoportok vizsgálatában (az előzőek alapján) a következő módszert alkalmazzuk. Először leírjuk az arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportok, illetve Δ-félcsoportok szerkezetét, majd a velük kapcsolatos információkat alkalmazzuk arra az esetre, amikor a vizsgált S félcsoport előáll két arkhimédeszi félcsoportnak, S_0-nak és S_1-nek a félhálójaként, például az $S_0S_1 \subseteq S_0$ feltétellel. Ekkor ugyanis S_0 az S félcsoport egy ideálja, s ezért S_1^0 izomorf az S/S_0 Rees-féle faktorfélcsoporttal, amely így szintén kongruencia-felcserélhető félcsoport, illetve Δ-félcsoport, amiből egyszerűen adódik, hogy S_1 kongruencia-felcserélhető félcsoport, illetve Δ-félcsoport. Mivel arkhimédeszi is, ezért az első lépésben kapott eredmény alapján ismertnek tekinthetjük. Az S_0 komponens vizsgálatának módszere pedig a következő. Bizonyított tény, hogy ha egy kongruencia-felcserélhető S félcsoport tartalmaz egy valódi I ideált, akkor sem S-nek, sem I-nek nincs nem triviális csoport-homomorf képe. Ha S olyan félcsoportosztályhoz tartozik, ahol az idempotens elemet nem tartalmazó arkhimédeszi félcsoportoknak van nem triviális csoport homomorf képe, akkor S_0 szükségképpen tartalmaz idempotens elemet (hiszen S_0 az S egy valódi ideálja). Így S_0 előáll egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoportnak egy nil félcsoporttal képezett ideálbővítéseként ([Chr69]).

A kongruenciák mindvégig fontos szerepet játszanak. A vizsgálatok eredményessége azon múlik, hogy sikerül-e olyan kongruenciákat definiálni, amelyekből a kongruencia-felcserélhetőség, illetve a Δ-félcsoport feltétel alapján hasznos információkat nyerhetünk a félcsoportok szerkezetére vonatkozóan.

1.5. Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok munkahelyem, a BME Matematika Intézet Algebra Tanszék eddigi vezetőinek, Szász Gábor, Schmidt E. Tamás és Rónyai Lajos professzor uraknak, akik minden lehetséges segítséget megadtak ahhoz, hogy az oktatás mellett a tudományos kutató munkával aktívan foglalkozhassak. Köszönöm továbbá Szendrei B. Máriának, illetve Márki Lászlónak, hogy az Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), illetve a Semigroup Forum folyóiratok szerkesztőbizottságának tagjaként készségesen támogattak cikkeim publikálásában.

2. A kutatási eredmények összefoglalása

Ennek a résznek az egyes fejezeteiben az értekezés azonos című fejezeteinek eredményeit foglaljuk össze. Mivel csak a főbb eredményeket emeltük ki, ezért az egyes tételek itteni számozása eltér a disszertációbeli számozástól.

2.1. Gyengén exponenciális félcsoportok

A gyengén exponenciális félcsoport fogalma az exponenciális félcsoport fogalmának ([TS72]) egy általánosítása. Egy félcsoportot exponenciális félcsoportnak nevezünk, ha teljesíti az $(ab)^n = a^n b^n$ azonosságot tetszőleges n pozitív egész szám esetén. Az exponenciális félcsoportok szerkezetének vizsgálatával T. Tamura és J. Shafer [TS72] cikkében, illetve T. Tamura és T.E. Nordahl [TN72] cikkében találkozhatunk. Kiemelkedő jelentőségű P.G. Trotter [Tro76] cikke, amelyben a szerző meghatározza az összes lehetséges exponenciális Δ-félcsoportot. [Nag84] dolgozatomban az exponenciális félcsoport fogalmának általánosításaként bevezettem a gyengén exponenciális félcsoport fogalmát.

2.1.1 Definíció *Egy S félcsoportról akkor mondjuk, hogy gyengén exponenciális, ha tetszőleges $(a, b) \in S \times S$ elempárhoz és tetszőleges $m \geq 2$ egész számhoz megadható olyan k pozitív egész szám, amelyre $(ab)^{m+k} = a^m b^m (ab)^k = (ab)^k a^m b^m$ teljesül.*

Ez a fejezet (az értekezés 2. fejezete) a gyengén exponenciális félcsoportokkal kapcsolatos [Nag84], [Nag90] és [Nag13] cikkeim eredményeit tartalmazza.

Az itt következő, elsőként említett tétel T. Tamura és J. Shafer exponenciális félcsoportok félháló-felbontásával kapcsolatos [TS72] cikkbeli eredményének gyengén exponenciális félcsoportokra való kiterjesztése.

2.1.2 Tétel *([Nag84]) Minden gyengén exponenciális félcsoport arkhimédeszi gyengén exponenciális félcsoportok félhálója.*

Az idempotens elemet tartalmazó gyengén exponenciális arkhimédeszi félcsoportok jellemzéséhez szükséges a következő tétel.

2.1.3 Tétel *([Nag84]) Egy félcsoport akkor és csak akkor egyszerű és gyengén exponenciális, ha izomorf egy olyan félcsoporttal, amelyik egy derékszögű köteg és egy Abel-csoport direkt szorzata.*

Legyen I egy S félcsoport ideálja. Jelölje Q az S félcsoport I ideálja szerinti S/I Rees-féle faktorfélcsoportot. Ekkor azt is szoktuk mondani, hogy S az I-nek a nullelemes Q félcsoporttal való ideálbővítése. Akkor mondjuk, hogy ez a bővítés retrakt, ha megadható S-nek I-re olyan homomorfizmusa, amely az I elemeit fixen hagyja.

T. Tamura és T.E. Nordahl [TN72] cikkének egy eredményét általánosítja az alábbi eredmény, amely jellemzi az idempotens elemeket tartalmazó gyengén exponenciális arkhimédeszi félcsoportokat.

2.1.4 Tétel *([Nag84]) Egy félcsoport akkor és csak akkor idempotens elemet tartalmazó gyengén exponenciális arkhimédeszi félcsopot, ha egy derékszögű köteg és egy Abel-csoport direkt szorzatának egy nil félcsoporttal való retrakt bővítése.*

Az idempotens elemet nem tartalmazó gyengén exponenciális arkhimédeszi félcsoportok vizsgálatánál fontos szerepe van az alábbi tételnek.

2.1.5 Tétel *([Nag84]) Legyen a egy gyengén exponenciális S félcsoport tetszőleges eleme. Jelölje S_a mindazon $x \in S$ elemek halmazát, amelyekhez megadhatók olyan k, m, n pozitív egész számok, hogy $a^k x a^m = a^n$ teljesül. Akkor S_a az S félcsoport reflexív és unitér részfélcsoportja.*

Ezen eredmény felhasználásával bizonyítható a következő tétel.

2.1.6 Tétel *([Nag90]) Minden olyan gyengén exponenciális arkhimédeszi félcsoportnak, amely nem tartalmaz idempotens elemet, van egy nem triviális csoport homomorf képe.*

A következőkben megadjuk a gyengén exponenciális Δ-félcsoportokat. Ehhez szükség van a következő elnevezésekre.

Legyen S olyan Δ-félcsoport, amely félhálója egy P félcsoportnak és egy nem triviális N nil félcsoportnak ugy, hogy $NP \subseteq N$. S-ről azt mondjuk, hogy

(1) T1 félcsoport, ha P egyelemű,

(2) T2R félcsoport, ha P kételemű jobbzéró félcsoport,

(3) T2L félcsoport, ha P kételemű balzéró félcsoport ([Nag90]).

Könnyen belátható, hogy a T1, a T2L, illetve a T2R félcsoportok gyengén exponenciálisak.

A következő tétel a fejezet fő tétele, amely megadja az összes gyengén exponenciális Δ-félcsoportot.

2.1.7 Tétel *([Nag90]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor gyengén exponenciális Δ-félcsoport, ha teljesíti a következő feltételek egyikét.*

(i) *S izomorf G-vel, vagy G^0-lal, ahol G egy kváziciklikus p-csoport nem triviális részcsoportja (p prímszám).*

(ii) *S kételemű félháló.*

(iii) S izomorf R-rel, vagy R^0-lal, vagy R^1-gyel, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.

(iv) S izomorf L-lel, vagy L^0-lal, vagy L^1-gyel, ahol L kételemű balzéró félcsoport.

(v) S olyan nil félcsoport, melynek ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

(vi) S egy T1 félcsoport, vagy egy T2R félcsoport, vagy egy T2L félcsoport.

A T1 félcsoportok jellemzése:

2.1.8 Tétel *([Nag90]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor T1 félcsoport, ha félhálója egy egyelemű $\{e\}$ részfélcsoportnak és egy nem triviális N nil Δ-félcsoportnak úgy, hogy $Ne \subseteq N$ és $S^1eS^1 = S$ teljesül.*

A következő tételben a T2R (illetve T2L) félcsoportokat jellemezzük. A tételben $J(b)$ jelöli az S félcsoport egy b eleme által generált főideálját, J_b pedig S mindazon s elemeinek összességét, amelyekre $J(s) = J(b)$ teljesül. Megjegyezzük, hogy tetszőleges $b \in S$ elemre $J_b \subseteq J(b)$, továbbá $I_b = J(b) \setminus J_b$ vagy üres vagy ideálja S-nek. Világos, hogy $J(0) = J_0 = \{0\}$ és így $I_0 = \emptyset$.

2.1.9 Tétel *([Nag90]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor T2R félcsoport, ha teljesíti a következő feltételek mindegyikét.*

(1) S egy nem triviális S_0 nil félcsoportnak és egy kételemű R jobbzéró félcsoportnak a félhálója úgy, hogy $S_0R \subseteq S_0$.

(2) S főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

(3) Minden $b \in S_0$ esetén vagy $b \in bR$, vagy $bR \subseteq S^1bN$.

(4) Minden $b \in S_0$ esetén vagy $Rb = \{b\}$, vagy $Rb \cap (NbS^1 \cup S^1bN) \neq \emptyset$.

(5) Minden $b \in S_0$ esetén, ha $|J_b| = 2$ és $I_b \neq \{0\}$, akkor minden $a \in I_b$ elemhez megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy $xJ_by \cap J_a \neq \emptyset$ és $xJ_by \nsubseteq J_a$.

Az előző tétel felhasználásával bizonyítjuk a következő eredményt.

2.1.10 Tétel *([Nag13]) Ha S egy T2R (T2L) félcsoport, akkor (az előző tétel jelöléseit használva) $S_0^2 = S_0$.*

Ennek a tételnek következményeként adódik, hogy nincs véges T2R (illetve T2L) félcsoport. Ugyanis, ha lenne ilyen S félcsoport, akkor a véges S_0 nil félcsoport nilpotens lenne, azaz $S_0^k = \{0\}$ teljesülne valamely k pozitív egész számra. Az előző tétel miatt ebből $S_0 = \{0\}$ következne, de ez ellentmond annak a feltételnek, hogy S_0 nem triviális. Tehát megfogalmazhatjuk a következő állítást.

2.1.11 Állítás *([Nag13]) Nincs véges T2R (illetve T2L) félcsoport.*

2.2. $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoportok

[Nag92] cikkemben bevezettem az $\mathcal{R}$-kommutatív félcsoport fogalmát. Egy S félcsoportról akkor mondjuk, hogy $\mathcal{R}$-kommutatív, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez megadható olyan $x \in S^1$ elem, amelyre $ab = bax$ teljesül. Bizonyítottam az alábbi eredményt, amely az elnevezésre utal.

2.2.1 Tétel *([Nag01]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor $\mathcal{R}$-kommutatív, ha az S-en értelmezett Green-féle $\mathcal{R}$-ekvivalencia az S egy kommutatív kongruenciája.*

Egy S félcsoportot feltételesen kommutatív félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $ab = ba$ feltételből az $axb = bxa$ egyenlőségnek minden $x \in S$-re való teljesülése következik.

Az $\mathcal{R}$-kommutativitást és a feltételesen kommutatív tulajdonságot egyszerre teljesítő félcsoportokat 1992-ben publikált [Nag92] dolgozatomban vizsgáltam meg. Ezekre a félcsoportokra az $\mathcal{RC}$-kommutatív félcsoportok elnevezést használtam. Az említett dolgozatban meghatároztam az összes $\mathcal{RC}$-kommutatív Δ-félcsoportot, melyek vizsgálatában a feltételesen kommutatív tulajdonságot csak a következő formában használtam fel: mivel $aa^2 = a^2a$ teljesül minden a elemre, ezért a feltételesen kommutatív félcsoportok teljesítik az $aba^2 = a^2ba$ azonosságot. Ezen azonosságnak eleget tevő félcsoportokat B. Pondělíček általánositott feltételesen kommutatív (röviden: $\mathcal{GC}$-kommutatív) félcsoportoknak nevezte ([Pon94]). Megmutatta, hogy minden $\mathcal{GC}$-kommutatív félcsoport teljesíti az $aba^i = a^iba$ azonosságot minden $i \geq 2$ egész számra. Továbblépve ezen általánosítási irányban, [Nag98] dolgozatomban bevezettem a következő fogalmat.

2.2.2 Definíció *([Nag98]) Rögzített pozitív egész n-re, egy S félcsoportot általánosított feltételesen n-kommutatív (röviden: $\mathcal{GC}_n$-kommutatív) félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges $i \geq 2$ egész esetén teljesíti az $a^nxa^i = a^ixa^n$ azonosságot. Egy olyan félcsoportot, amely $\mathcal{R}$-kommutatív és $\mathcal{GC}_n$-kommutatív, $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoportnak nevezünk.*

Ez a fejezet (az értekezés 3. fejezete) az $\mathcal{R}$-kommutatív, a $\mathcal{GC}_n$-kommutatív és az $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoportokkal kapcsolatos [Nag92], [Nag98] és [JN03] cikkekben bizonyított eredményeket tartalmazza. Fő eredményként meghatározzuk az összes $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív Δ-félcsoportot. A fejezet végén következményként fogalmazzuk meg a [Nag92] cikkem azon eredményét, amely megadja az összes $\mathcal{RC}$-kommutatív Δ-félcsoportot.

Az $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoportok legbővebb félháló-felbontásával, illetve az arkhimédeszi $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoportokkal kapcsolatos eredmények a következők.

2.2.3 Tétel *([Nag98]) Minden $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoport arkhimédeszi $\mathcal{GC}_n$-kommutatív félcsoportok félhálója.*

2.2.4 Tétel *([Nag98]) Egy félcsoport akkor és csak akkor egyszerű és $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív, ha egy jobbzéró félcsoportnak és egy Abel-csoportnak a direkt szorzata.*

2.2.5 Tétel *([Nag98]) Minden $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív, idempotens elemet tartalmazó, arkhimédeszi félcsoport egy jobbzéró félcsoport és egy Abel-csoport direkt szorzatának egy kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítése.*

A fejezet alábbi fő tétele az $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív Δ-félcsoportokat adja meg.

2.2.6 Tétel *([Nag98], [JN03]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív Δ-félcsoport, ha teljesíti a következő feltételek egyikét.*

(i) S izomorf G-vel, vagy G^0-lal, ahol G egy kváziciklikus p-csoport nem triviális részcsoportja (p prímszám).

(ii) S izomorf egy kételemű félhálóval.

(iii) S izomorf R-rel, vagy R^0-lal, vagy R^1-gyel, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.

(iv) S izomorf egy olyan kommutatív nil félcsoporttal, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

(v) S izomorf N^1-gyel, ahol N egy olyan nem triviális kommutatív nil félcsoport, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

Következményként megfogalmazzuk azt a tételt, amely megadja az összes $\mathcal{RC}$-kommutatív Δ-félcsoportot.

2.2.7 Tétel *([Nag92]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor $\mathcal{RC}$-kommutatív Δ-félcsoport, ha teljesíti a következő feltételek egyikét.*

(i) S izomorf G-vel, vagy G^0-lal, ahol G egy kváziciklikus p-csoport nem triviális részcsoportja (p prímszám).

(ii) S izomorf egy kételemű félhálóval.

(iii) S izomorf vagy R-rel, vagy R^0-lal, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.

(iv) S izomorf egy olyan kommutatív nil félcsoporttal, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

(v) S izomorf N^1-gyel, ahol N egy olyan nem triviális kommutatív nil félcsoport, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

2.3. Permutatív félcsoportok

Ez a fejezet (az értekezés 4. fejezete) a [Nag05] cikk eredményeit, illetve a [Nag04] cikk eredményeinek egy részét tartalmazza.

Egy S félcsoportot permutatív félcsoportnak nevezünk, ha megadható olyan $n \geq 2$ egész szám és az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak olyan σ nem identikus permutációja, hogy tetszőleges S-beli $x_1, \ldots, x_n$ elemek esetén teljesül az $x_1 x_2 \ldots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$ egyenlőség.

T.E. Nordhal [Nor88] cikkében bebizonyította, hogy minden permutatív félcsoport permutatív arkhimédeszi félcsoportok félhálója. P.R. Jones-szal közös [Nag04] dolgozatunkban bizonyítottuk a következő tételeket.

2.3.1 Tétel *([Nag04]) Minden olyan permutatív arkhimédeszi félcsoport, amely tartalmaz idempotens elemet, egy derékszögű köteg és egy Abel-csoport direkt szorzatának egy nil félcsoporttal való ideálbővítése.*

2.3.2 Tétel *([Nag04]) Minden olyan permutatív arkhimédeszi félcsoportnak, amely nem tartalmaz idempotens elemet, van nem triviális kommutatív csoport-homomorf képe.*

A fejezetben bizonyítottunk néhány, a vizsgálatainkban alapvető fontosságú állítást a nil Δ-félcsoportokról. Ezek a következők.

2.3.3 Lemma *([Nag04]) Minden nilpotens Δ-félcsoport véges ciklikus. Minden olyan S permutatív Δ-félcsoport, amely nem nilpotens, de nil, szükségképpen idempotens, azaz $S^2 = S$. Ezért minden permutatív nil Δ-félcsoport mediális.*

Egy félcsoportról akkor mondjuk, hogy jobb kommutatív [bal kommutatív], ha teljesíti az $axy = ayx$ [$xya = yxa$] azonosságot.

2.3.4 Állítás *([Nag04]) Ha S egy jobb kommutatív vagy bal kommutatív nil Δ-félcsoport, akkor S kommutatív.*

2.3.5 Tétel *([Nag04]) Ha S egy mediális nil Δ-félcsoport, akkor S kommutatív.*

Egy S félcsoport valamely A ideálját sűrű ideálnak nevezzük, ha S tetszőleges α kongruenciája esetén abból a feltételből, hogy α-nak A-ra való leszűkítése az A identikus relációja az következik, hogy α az S-nek is az identitkus relációja.

2.3.6 Lemma *([Nag04]) Legyen S egy permutatív félcsoport, R pedig S-nek olyan sűrű ideálja, amely jobbzéró félcsoport. Ha R nem triviális, akkor az S/R faktorfélcsoport nilpotens.*

2.3.7 Lemma *([Nag04]) Nincs olyan permutatív Δ-félcsoport, amely egy nem triviális jobbzéró (vagy balzéró) félcsoportnak egy nem triviális nil félcsoporttal való ideálbővítése lenne.*

Ezen előkészítő eredmények felhasználásával igazoltuk a következő tételeket; a második a fejezet első részének főtétele.

2.3.8 Tétel *([Nag04]) Minden permutatív arkhimédeszi Δ-félcsoport vagy (a) egyszerű, és ezért vagy egy csoport vagy egy balzéró félcsoport vagy egy jobbzéró félcsoport, vagy (b) egy nil félcsoport. Ebben az esetben ezen félcsoportok mindegyike mediális.*

2.3.9 Tétel *([Nag04]) Minden permutatív Δ-félcsoport mediális.*

[Nag05] cikkemben a következő kérdéssel foglalkoztam: igaz-e, hogy nem csak a Δ-félcsoportoknál, hanem a kongruencia-felcserélhető félcsoportok esetében is következik a medialitás a permutatív tulajdonságból. Megfogalmaztam a következő problémát: Igaz-e, hogy minden permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport mediális. A problémára a cikkben csak részleges választ adtam. P.R. Jones-szal közös [Nag04] cikkünk előzőekben ismertetett eredményeit is használva, bizonyítottam a következő eredményt.

2.3.10 Tétel *([Nag05]) Minden permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport vagy mediális vagy egy derékszögű kötegnek egy nem triviális kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítése.*

Deák Attila ([Dea06]) és P.R. Jones ([Jon06]) egymástól függetlenül bizonyították, hogy ha egy permutatív kongruencia-felcserélhető S félcsoport egy derékszögű kötegnek egy nem triviális kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítése, akkor S mediális.

Ez az eredmény az általam bizonyítottal együtt pozitív válasz ad a fenti problémára, azaz igaz a következő tétel.

2.3.11 Tétel *Minden permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport mediális.*

Egy félcsoportot szigorúan permutatív félcsoportnak nevezünk, ha teljesít egy olyan $x_1x_2\dots x_n = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)}$ permutációazonosságot, amelyben $\sigma(1) \neq 1$ és $\sigma(n) \neq n$. [Nag05] cikkemben a következő eredményt is bizonyítottam.

2.3.12 Tétel *([Nag05]) Minden szigorúan permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport kommutatív.*

2.4. Mediális félcsoportok

Ez a fejezet (az értekezés 5. fejezete) a [Nag08] cikkem és a [Nag04] cikk előző fejezetben nem tárgyalt eredményeit tartalmazza.

Egy félcsoportot mediális félcsoportnak nevezünk, ha teljesíti az $axyb = ayxb$ azonosságot. Mivel minden mediális félcsoport permutatív, ezért az előző fejezet eredményeit is alkalmazhatjuk a mediális félcsoportokra. Így az előző fejezet egyszerű következménye, hogy minden mediális félcsoport mediális arkhimédeszi félcsoportok félhálója. Továbbá egy idempotens elem nélküli mediális arkhimédeszi félcsoportnak mindig van nem triviális csoport-homomorf képe.

Bizonyítjuk a következő tételt.

2.4.1 Tétel *([Nag01]) Egy félcsoport akkor és csak akkor idempotens elemes mediális arkhimédeszi félcsoport, ha egy derékszögű köteg és egy Abel-csoport direkt szorzatának egy mediális nil félcsoporttal való retrakt bővítése.*

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy minden permutatív Δ-félcsoport mediális. Ezen fejezet fő tételében megadjuk az összes mediális Δ-félcsoportot. W.A. Etterbeek 1970-ben (T. Tamura témavezetésével) megírt [Ett70] PhD. disszertációjában már foglalkozott a mediális Δ-félcsoportokkal, azonban a disszertációban szereplő 3.45. Tétel hibás bizonyítása miatt pontatlanul adta meg azokat (a disszertáció 3.49. Tételében). Disszertációjának 3.45 Tétele szerint, ha $S = S_0 \cup \{e\}$ olyan jobb kommutatív Δ-félcsoport, amelyben S_0 nil félcsoport, e pedig az S jobb oldali egységeleme, akkor S szükségképpen kommutatív félcsoport. Ez viszont nem igaz, mert könnyen ellenőrizhető, hogy a [Nag00] cikkemben példaként szereplő S félcsoport (ez egy olyan S félcsoport, amelyet egy $\{0, a\}$ zéró félcsoportból egy e idempotens elem adjungálásával származtatunk, mégpedig úgy, hogy e jobb oldali egységeleme S-nek, és bal oldali annulátora $\{0, a\}$-nak) teljesíti Etterbeek disszertációjában szereplő 3.45 Tétel kiinduló feltételeit, és S még sem kommutatív. A disszertáció eredményeit soha nem publikálták egyetlen folyóiratban sem, azonban számos cikkben történt hivatkozás rájuk; szerencsére csak említés szintjén. 2004-ben P.R. Jones-szal közösen írt [Nag04] cikkünkben rámutattunk Etterbeek disszertációjának pontatlanságára, és pontosan megadtuk a mediális Δ-félcsoportokat, kijavítva Etterbeek disszertációjának hibáit. Bizonyítjuk a következő tételt.

2.4.2 Tétel *([Nag04]) Egy S félcsoport akkor és csak akkor mediális (illetve, permutatív) Δ-félcsoport, ha teljesíti a következő feltételek egyikét.*

(i) *S kommutatív Δ-félcsoport.*

(ii) *S izomorf R-rel, vagy R^0-lal, ahol R kételemű jobbzéró félcsoport.*

(iii) *S izomorf azzal a $Z = \{0, e, a\}$ félcsoporttal, amelyet a $\{0, a\}$ zéró félcsoportból egy e idempotens elem adjungálásával kaptunk, mégpedig úgy, hogy e jobb oldali egységeleme Z-nek, és bal oldali annulátora $\{0, a\}$-nak.*

(iv) S izomorf a (ii) vagy (iii) típusú félcsoportok duálisával.

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy minden permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport mediális. A mediális kongruencia-felcserélhető félcsoportokat [BC81]-ben jellemezte A. Cherubini és C. Bonzini. A nem-arkhimédeszi eset leírásához a következő elnevezéseket használták. Egy S félcsoportot a típusú félcsoportnak neveztek, ha S egy S_0 nil félcsoportnak és egy olyan $S_1 = L \times G \times R$ derékszögű csoportnak a félhálója, amelyben $|L| \leq 2$, $|R| \leq 2$ (L balzéró félcsoport, G csoport, R jobbzéró félcsoport). Egy a típusú S félcsoportról azt mondták, hogy

(1) 1-es típusú, ha minden $a \in S$ esetén $a \in S_1 a S_1$,

(2) 2-es típusú, ha minden $a \in S_0$ esetén $a \in S_1 a$ és $aS_1 = \{0\}$,

(3) 3-as típusú, ha minden $a \in S_0$ esetén $a \in aS_1$ és $S_1 a = \{0\}$.

A szerzők megmutatták, hogy minden nem-arkhimédeszi mediális kongruencia-felcserélhető félcsoport a fenti három típus valamelyike.

A 2-es, illetve 3-as típusú kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportokat C. Bonzini vizsgálta a [Bon83] cikkében. Az 1-es típusú kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportokkal [Nag08] cikkemben foglalkoztam, megmutatva, hogy ezeket megkaphatjuk a kommutatív, nem-arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportokból egy speciális, általam definiált konstrukció, a bal tükrözés, illetve a jobb tükrözés segítségével. Ezt részletezzük a következőkben.

Konstrukció([Nag08]) Legyen S egy félcsoport és I egy ideálja S-nek. Legyen $\phi : s \mapsto s'$ egy izomorfizmusa S-nek egy $(S'; +)$ félcsoportra úgy, hogy $S \cap S' = I$ és ϕ az I elemeit fixen hagyja. (Megjegyezzük, hogy minden $a, b \in I$ esetén $a + b = a' + b' = (ab)' = ab$.) Az $S'' = S \cup S'$ halmazon definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen. Legyen $*$ az S-beli és az S'-beli műveletek kiterjesztése. Tetszőleges $x \in S$ és $y' \in S'$ esetén legyen $x * y' = xy$ és $y' * x = (yx)'$. Az $(S''; *)$ gruppoidot az S félcsoport I ideál szerinti *bal tükrözésének* nevezzük. Az S félcsoport I ideálja szerinti jobb tükrözése a bal tükrözés duálisa. Kicsit pontosabban, a $*$ művelet az S félcsoport jobb tükrözésén $x * y' = (xy)'$ és $y' * x = yx$ módon van definiálva.

Bizonyítjuk a témával kapcsolatos alábbi fő tételt.

2.4.3 Tétel *([Nag08]) Egy félcsoport akkor és csak akkor 1-es típusú mediális kongruencia-felcserélhető félcsoport, ha*

(1) bal tükrözése egy nem-arkhimédeszi kommutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport jobb tükrözésének vagy, ami ezzel ekvivalens,

(2) jobb tükrözése egy nem-arkhimédeszi kommutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport bal tükrözésének.

2.5. Véges kongruencia-felcserélhető Putcha félcsoportok

Ez a fejezet (az értekezés 6. fejezete) a [DN10] cikk eredményeit tartalmazza.

Ha S egy véges arkhimédeszi félcsoport, akkor a végességi feltétel miatt S tartalmaz idempotens elemet. J.L. Chrislock [Chr69] cikkében bizonyította, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor idempotens elemes arkhimédeszi félcsoport, ha egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoportnak egy nil félcsoporttal való ideálbővítése. Mivel a véges egyszerű félcsoportok mindegyike teljesen egyszerű is, valamint tetszőleges nil félcsoport nilpotens, ezért érvényes a következő.

2.5.1 Lemma *([DN10]) Egy véges félcsoport akkor és csak akkor arkhimédeszi, ha egy teljesen egyszerű félcsoportnak egy nilpotens félcsoporttal való ideálbővítése.*

Ennek a lemmának a segítségével meghatároztuk az összes véges arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportot.

2.5.2 Tétel *([DN10]) Egy véges félcsoport akkor és csak akkor arkhimédeszi és kongruencia-felcserélhető, ha vagy egy ciklikus nilpotens félcsoport, vagy kongruencia-felcserélhető teljesen egyszerű félcsoport.*

A Rees-tétel szerint minden teljesen egyszerű félcsoport izomorf egy G csoport feletti, P szendvicsmátrixú $J \times I$-típusú $\mathcal{M}(G; I, J; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporttal. A. Cherubini és B. Bonzini [BC93]-beli eredménye szerint egy G csoport feletti P szendvicsmátrixú $\mathcal{M}(G; I, J; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor kongruencia-felcserélhető, ha $|I|, |J| \leq 2$. Ez és a fenti tétel megadja az összes véges arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportot.

Ha S véges, kongruencia-felcserélhető, nem arkhimédeszi Putcha félcsoport, akkor S előáll két részfélcsoportjának, S_1-nek és S_0-nak a félhálójaként úgy, hogy pl. S_0 az S egy ideálja. Mivel kongruencia-felcserélhető félcsoportok homomorf képe is kongruencia-felcserélhető, ezért az $S_0^1 \cong S/S_0$ Rees-féle faktorfélcsoport, és ezért az S_1 félcsoport is kongruencia-felcserélhető. Mivel S_0 véges és arkhimédeszi, ezért a fenti tétel szerint egy teljesen egyszerű félcsoportnak egy nilpotens félcsoporttal való ideálbővítése. Ezen tényekből kiindulva bizonyítottuk a következő lemmát.

2.5.3 Lemma *([DN10]) Ha S véges kongruencia-felcserélhet nem-arkhimédeszi Putcha félcsoport, akkor S egy teljesen egyszerű $S_1 = M(G; I, J; P)$ félcsoportnak és egy S_0 ideálnak a félhálója úgy, hogy $|I|, |J| \leq 2$, valamint S_0 egy teljesen egyszerű félcsoportnak egy nilpotent félcsoporttal való ideálbővítése.*

A [DN10] cikkünkben azt az esetet vizsgáltuk meg részletesen, amikor az S_1 részfélcsoport csoport. Erre az esetre a következő eredményt bizonyítottuk.

2.5.4 Lemma *([DN10]) Legyen S olyan véges, nem-arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoport, amely egy G csoportnak és egy S_0 arkhimédeszi félcsoportnak a félhálója a $GS_0 \subseteq S_0$ feltétellel. Akkor S_0*

(1) vagy teljesen egyszerű,

(2) vagy olyan nem triviális zéró félcsoport, amelyre $SS_0 = \{0\}$ teljesül, valamint a G egységeleme jobb oldali egységeleme S-nek,

(3) vagy olyan nem triviális zéró félcsoport, amelyre $S_0S = \{0\}$ teljesül, valamint a G egységeleme bal oldali egységeleme S-nek,

(4) vagy egy teljesen egyszerű K félcsoportnak egy nem triviális nilpotens félcsoporttal való ideálbővítése úgy, hogy a G egységeleme egységelem az S/K faktorfélcsoportban.

2.5.5 Megjegyzés *Az előző lemma* (4) *feltételének két esete van:*
(4a): $|K| = 1$ és így S_0 egy nem triviális nilpotens félcsoport úgy, hogy a G egységeleme egységeleme S-nek.
(4b): $|K| > 1$, de $K \neq S_0$.

A [DN10] cikkben, így a disszertációban is a (2), a (3) és a (4a) esetekkel foglalkoztunk. A (2) és (3) esetek vizsgálalában fontos szerepet játszik az alábbi konstrukció.

Konstrukció ([DN10]) Legyen G egy csoport és M a G olyan részcsoportja, hogy $HK = KH$ teljesül a G csoport minden olyan H és K részcsoportjaira, amelyek tartalmazzák M-et. Jelölje N^* a G csoport M szerint jobb oldali mellékosztályainak halmazát. Legyen $S = G \cup N^* \cup \{0\}$, ahol 0 egy olyan szimbólum, amely nincs benne $G \cup N^*$-ban. Az S halmazon definiálunk egy műveletet a következőképpen. Ha $g, h \in G$, akkor legyen gh a g és h eredeti szorzata G-ben. Ha $a \in N^* \cup \{0\}$, akkor legyen $sa = 0$ tetszőleges $s \in S$ esetén. Tetszőleges $g \in G$ és tetszőleges $Mh \in N^*$ esetén, legyen $(Mh)g = M(hg)$. Végül, legyen $0g = 0$ minden $g \in G$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy S erre a műveletre nézve félcsoport. G ennek egy részcsoportja, $N = N^* \cup \{0\}$ pedig olyan részfélcsoportja, melyre $SN = \{0\}$ teljesül.

Jól látható, hogy a konstrukcióban szereplő G csoport jobbról hat az N^* halmazon, mégpedig úgy, hogy ez a hatás tranzitív. A lentebbi tételek bizonyításában így nagy segítségünkre volt Pálfy Péter Pál és Pavel Pudlák [PP80] cikkében szereplő Lemma 3.

2.5.6 Lemma *([PP80, Lemma 3]) Ha a G csoport (jobbról) tranzitívan hat a nem üres X halmazon, akkor az X-nek, mint G-halmaznak a $Con(X)$ kongruenciahálója izomorf a G csoport részcsoporthálójának $[Stab_G(x), G]$ intervallumával tetszőleges $x \in X$ elemre, ahol $Stab_G(x) = \{g \in G : \ xg = x\}$.*

Megjegyezzük, hogy a szóban forgó izomorfizmusok a következők (amelyek egymás inverzei):

$$\phi : \alpha \ \mapsto H_\alpha = \{g \in G : \ xg \ \alpha \ x\} \ (\alpha \in Con(X))$$

és

$$\psi : H \ \mapsto \ \alpha_H = \{(xg, xh) \in X \times X : \ Hg = Hh\} \ (H \in [Stab_G(x), G]).$$

Pálfy Péter Pál és Pavel Pudlák előzőekben említett lemmája alapján megfogalmazható, hogy valamely $\alpha, \beta \in Con(X)$ kongruenciák esetén mi az $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ egyenlőség teljesülésének szükséges és elégséges feltétele.

2.5.7 Lemma *([DN10]) Tegyük fel, hogy a G csoport tranzitívan hat (jobbról) az X halmazon. Legyen $x \in X$ egy tetszőleges rögzített elem. Valamely $\alpha, \beta \in Con(X)$ kongruenciákra az $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $H_\alpha H_\beta = H_\beta H_\alpha$ teljesül a $H_\alpha, H_\beta \in [Stab_G(x), G]$ részcsoportokra. Így az (X, G) unér algebra akkor és csak akkor kongruencia-felcserélhető, ha $HK = KH$ teljesül G minden olyan H és K részcsoportjára, amely tartalmazza a $Stab_B(x)$ részcsoportot.*

Ezek után bebizonyítottuk a következő eredményt, amely a konstrukció jelentőségét mutatja.

2.5.8 Tétel *([DN10]) Egy véges S félcsoport akkor és csak akkor olyan kongruencia-felcserélhető félcsoport, amely egy G csoportnak és egy N nem triviális zéró félcsoportnak a félhálója úgy, hogy $SN = \{0\}$ [$NS = \{0\}$] és a G egységeleme jobb [bal] oldali egységeleme S-nek, ha S izomorf egy olyan félcsoporttal [izomorf egy olyan félcsoport duálisával], amely a fenti módon konstruálható.*

Ugyancsak Pálfy Péter Pál és Pavel Pudlák lemmáját használhattuk a 4a eset vizsgálatánál, azzal a különbséggel, hogy a G csoport hatása helyett a G és G^* csoportok $G^* \times G$ külső direkt szorzatának hatása játszott fontos szerepet, ahol G^* jelöli a G csoport duálisát. Bizonyítottuk a következő tételt.

2.5.9 Tétel *([DN10]) Legyen S olyan véges félcsoport, amely egy G csoportnak és egy olyan nem triviális N nilpotens félcsoportnak a félhálója melynek nilpotencia foka t. Tegyük fel, hogy G egységeleme egységeleme S-nek. Az S félcsoport akkor és csak akkor kongruencia-felcserélhető, ha minden $i = 1, \ldots, t-1$ esetén megadható olyan a_i elem $N^i - N^{i+1}$-ben, hogy $Ga_iG = N^i - N^{i+1}$, és $HK = KH$ is teljesül minden $H, K \supseteq G_{a_i} = \{(g, h) \in G^* \times G : \ ga_ih = a_i\}$ részcsoportra, ahol G^* jelöli a G csoport duálisát.*

2.6. Egy félcsoportalgebrai alkalmazás

Ez a fejezet (az értekezés 7. fejezete) az [NZ16] cikk eredményeit tartalmazza.

Legyen S egy félcsoport $\mathbb{F}$ pedig egy tetszőleges test. Az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra tetszőleges J ideálja esetén jelölje ϱ_J az S félcsoport azon kongruenciáját, amely az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra J ideál által definiált kongruenciájának S-re való leszűkítése. Az S félcsoport tetszőleges α kongruenciája esetén jelölje $\mathbb{F}[\alpha]$ az $\mathbb{F}[S] \to \mathbb{F}[S/\alpha]$ kiterjesztett kanonikus homomorfizmus magját (megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben egy félcsoportalgebra kongruenciáját azonosítjuk az őt meghatározó ideállal). J. Okniński [Okn91] könyvének 4. fejezetében szereplő Lemma 5 szerint tetszőleges S félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén a $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : J \mapsto \varrho_J$ leképezés a $(Con(\mathbb{F}[S]); \wedge)$ félhálónak a $(Con(S); \wedge)$ félhálóra való olyan homomorfizmusa, amelyre $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}(\mathbb{F}[\alpha]) = \alpha$, azaz $\varrho_{\mathbb{F}[\alpha]} = \alpha$ teljesül az S félcsoport tetszőleges α kongruenciája esetén. Az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra kongruenciái egymással felcserélhetőek, azaz $(Con(\mathbb{F}[S]); \circ)$ egy félcsoport. Mivel félcsoport homomorf képe is félcsoport, és $\alpha \circ \beta = \alpha \vee \beta$ teljesül egy kongruencia-felcserélhető algebrai struktúra tetszőleges α és β kongruenciáira, ezért a következő lemma állítása nyilvánvaló.

2.6.1 Lemma *([NZ16]) Legyen S egy félcsoport. Ha valamely $\mathbb{F}$ test esetén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}} : J \to \varrho_J$ az $(Con(\mathbb{F}[S]); \circ)$ félcsoportnak a $(\mathcal{B}_S; \circ)$ relációfélcsoportba ($Con(S)$-re) való homomorfizmusa, akkor S kongruencia-felcserélhető. Továbbá, egy kongruencia-felcserélhető S félcsoport esetén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ akkor és csak akkor homomorfizmusa az $(Con(\mathbb{F}[S]); \circ)$ félcsoportnak a $(Con(S); \circ)$ félcsoportra, ha $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ a $(Con(\mathbb{F}[S]); \vee)$ félhálónak a $(Con(S); \vee)$ félhálóra való homomorfizmusa, azaz $ker_{\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}}$ $\vee$-kompatibilis.*

A következő példa azt mutatja, hogy a lemma első részében szereplő állítás megfordítása általában nem igaz, azaz egy kongruencia-felcserélhető S félcsoport esetén az a feltétel, hogy "$\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ az $(Con(\mathbb{F}[S]); \circ)$ félcsoportnak a $(Con(S); \circ)$ félcsoportra való homomorfizmusa" függ az $\mathbb{F}$ test választásától.

Példa Jelölje C_4, $\mathbb{F}_3$ és $\mathbb{F}_2$ a 4-edrendű ciklikus csoportot, a 3-elemű testet és a 2-elemű testet, külön-külön. C_4 kongruencia-felcserélhető. Jelölje $1, a, a^2, a^3$ a C_4 elemeit (1 az egységelem). Az világos, hogy $I = \mathrm{Span}(1 + a^2, a + a^3)$ és $J = \mathrm{Span}(1 + a, a + a^2, a^2 + a^3)$ az $\mathbb{F}_3[C_4]$ ideáljai. Az is világos, hogy $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}(I) = \varrho_I = \iota_{C_4}$. Mivel a $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}(J) = \varrho_J$ kongruencia osztályai $\{1, a^2\}$ és $\{a, a^3\}$, ezért

$$\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}(I) \vee \varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}(J) = \varrho_I \vee \varrho_J \neq \omega_{C_4} = \varrho_{(I+J)} = \varrho_{(I \vee J)} = \varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}(I \vee J).$$

Így $ker_{\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}}$ nem $\vee$-compatible, s ezért $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_3\}}$ nem lehet a $Con(\mathbb{F}_3[C_4]); \circ)$ félcsoportnak a $(Con(C_4); \circ)$ félcsoportra való homomorfizmusa a lemma második állítása alapján.

Ha meghatározzuk $\mathbb{F}_2[C_4]$ főideáljait, akkor észrevehetjük, hogy azok láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Mivel $\mathbb{F}_2[C_4]$ dimenziója véges, ezért $\mathbb{F}_2[C_4]$-nek nincsenek más ideáljai. Ezért $Con(\mathbb{F}_2[C_4])$ a következő (itt α_{C_2} jelöli a C_4 csoport C_2 részcsoportja által definiált kongruenciáját):

$$
\begin{array}{c}
\mathbb{F}_2[C_4] \\
| \\
\mathbb{F}_2[\omega_{C_4}] \\
| \\
\mathbb{F}_2[\alpha_{C_2}] \\
| \\
Span(1+a+a^2+a^3) \\
| \\
\{0\}
\end{array}
$$

Nem nehéz belátni, hogy $ker_{\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_2\}}}$ $\vee$-kompatibilis és így $\varphi_{\{C_4;\mathbb{F}_2\}}$ a $Con(\mathbb{F}_2[C_4]);\circ)$ félcsoportnak a $(Con(C_4);\circ)$ félcsoportra való homomorfizmusa.

A fenti lemma és az előző példa alapján az [NZ16] cikkben megfogalmaztuk a következő problémát.

Probléma. Határozzuk meg azokat a kongruencia-felcserélhető S félcsoportokból és $\mathbb{F}$ testekből alkotható $(S,\mathbb{F})$ párokat, amelyekre igaz, hogy $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ a $(\mathrm{Con}(\mathbb{F}[S]),\circ)$ félcsoportnak a $(Con(S);\circ)$ félcsoportra való homomorfizmusa.

[NZ16] cikkünkben két esetet vizsgáltunk. Az ezzel kapcsolatos eredmények a következők.

2.6.2 Tétel *([NZ16]) Legyen S egy kongruencia-felcserélhető félháló. Akkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ a $(\mathrm{Con}(\mathbb{F}[S]),\circ)$ félcsoportnak a $(Con(S);\circ)$ félcsoportra való homomorfizmusa.*

2.6.3 Következmény *([NZ16]) Legyen S egy félháló, $\mathbb{F}$ pedig egy tetszőleges test. $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ akkor és csak akkor homomorfizmusa a $(\mathrm{Con}(\mathbb{F}[S]),\circ)$ félcsoportnak a $(\mathcal{B}_S;\circ)$ relációfélcsoportba, ha S kongruencia-felcserélhető.*

2.6.4 Tétel *([NZ16]) Legyen $S = L \times R$ egy kongruencia-felcserélhető derékszögű köteg (L egy balzéró, R pedig egy jobbzéró félcsoport). Akkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ a $(\mathrm{Con}(\mathbb{F}[S]),\circ)$ félcsoportnak a $(Con(S);\circ)$ félcsoportra való homomorfizmusa.*

2.6.5 Következmény *([NZ16]) Legyen $S = L \times R$ egy derékszögű köteg, $\mathbb{F}$ pedig egy tetszőleges test. $\varphi_{\{S;\mathbb{F}\}}$ akkor és csak akkor homomorfizmusa a $(\mathrm{Con}(\mathbb{F}[S]),\circ)$ félcsoportnak a $(\mathcal{B}_S;\circ)$ félcsoportba, ha S kongruencia-felcserélhető.*

Ezen eredmények újabb adalékot jelentenek a kongruencia-felcserélhető félcsoportok megismerésére irányuló kutatások hasznosságának igazolására.

Hivatkozások

[BC80] Bonzini, C. and A. Cherubini, *Sui Δ-semigrouppi di Putcha*, Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend. A. 114(1980), 179-194

[BC81] Bonzini, C. and A. Cherubini, *Medial permutable semigroups*, Proc. Coll. Math. Soc. János Bolyai, 39. Semigroups, Szeged (Hungary), 1981, 21-39

[Bon83] Bonzini, C., *Una classe di semigruppi permutabili*, Atta della Accademia delle Scienze di Torino, I-Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Vol. 117 (1983), 355-368

[Bon84] Bonzini, C., *The structure of permutable medial semigroups*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A118(1984), 57-66

[BC93] Bonzini, C. and A. Cherubini, *Permutable completely regular semigroups*, Semigroups, algebraic theory and applications to formal languages and codes (Eds. Bonzini, Cherubini and Tibiletti), World Sci, 1993, 36-41.

[CV81] Cherubini Spoletini, A. and A. Varisco, *On conditionally commutative semigroups*, Semigroup Forum, 23(1981), 15-24

[CV84] Cherubini Spoletini, A and A. Varisco *Permutable duo semigroups*, Semigroup Forum, 28(1984), 155-172

[Chr69] Chrislock, J.L., *On medial semigroups*, Journal of Algebra, 12(1969), 1-9

[Cli54] Clifford, A.H., *Naturally totally ordered commutative semigroups*, Amer. J. Math. t. 76(1954), 631-646

[CP61] Clifford, A.H. and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., I(1961)

[CP67] Clifford, A.H. and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., II(1967)

[Dea06] Deák, A., *On a problem of A. Nagy concerning permutable semigroups satisfying a non-trivial permutation identity*, Acta Sci. Math. (Szeged), 72(2006), 537-541

[Ett70] Etterbeek, W. A., *Semigroups whose lattice of congruences form a chain*, PhD Dissertation, University of California, Davis (1970)

[Gut93] Gutan, M., *Sur une propriété de permutation des semi-groupes*, C. R. Acad. Sci. Paris 317 (1993), Série I, 923-924

[HM73] Hagemann, J. and A. Mitschke, *On n-permutable congruences*, Algebra Universalis, 3 (1973), 8–12

[Ham75] Hamilton, H., Permutability of congruences on commutative semigroups, Semigroup Forum, 10(1975), 55-66

[How76] Howie, J. M., *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London, 1976

[Idz89] Idziak, P. M., *Varieties with decidable finite algebras. II. Permutability*, Algebra Universalis, 26 (1989), 247–256

[Jia95] Jiang, Z., *LC-commutative permutable semigroups*, Semigroup Forum, 52(1995), 191-196

[JC04] Jiang, Z. and L. Chen, *$RDGC_n$-commutative permutable semigroups*, Periodica Mathematica Hungarica, 49(2004), 91-98

[Jon06] Jones, P. R., *Solution to a problem of Nagy*, 2006 (personal communication)

[Kea93] Kearnes, K.A., *Congruence Permutable and Congruence 3-Permutable Locally Finite Varieties*, Journal of Algebra, 156(1993), 36-49

[Lja63] Ljapin, E. S., *Semigroups*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1963

[JLM08] Janelidze, G., V. Laan and L. Márki, *Limit preservation properties of the greatest semilattice image functor*, Internat. J. Algebra Comput., 18(2008), no. 5, 853-867

[Mar92] Marcus, A., *Retract extensions of completely simple semigroups by nil semigroups*, Mathematica, Tom. 34(57)(1992), No. 1, 37-41

[Nor88] Nordahl, T., *On permutative semigroup algebras*, Algebra Universalis, 25(1988), 322-333

[Okn91] Okniński, J., *Semigroup Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991

[PP80] P.P. Pálfy and P. Pudlák, *Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups*, Algebra Universalis, 11(1980), 22-27.

[Pet64] Petrich, M., *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math. Zeitschrift, 85(1964), 68-82

[Pet73] Pertich, M., *Introductions to semigroups*, Merrill Books, Columbus, Ohio, (1973)

[Pet77] Petrich, M., *Lectures in Semigroups*, Akademie-Verlag Berlin, (1977)

[Pon94] Pondělíček, B., *On generalized conditionally commutative semigroups*, Mathematica Slovaca, 44 (1994), No. 3, 359–364

[Put73] Putcha, M. S., *Semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 6(1973), 12-34

[Put71] Putcha, M.S. and A. Yaqub, *Semigroups satisfying permutation properties*, Semigroup Forum, 3(1971), 68-73

[RTW07] Ruzicka, P., Tuma, J. and F. Wehrung, *Distributive Congruence Lattices of Congruence-Permutable Algebras*, Journal of Algebra, 311(2007), 96-116

[Sch69] Schein, B. M., *Commutative semigroups where congruences form a chain*, Semigroup Forum, 17(1969), 523-527

[Schm69] Schmidt, E.T., *Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen*, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969. 108 p.

[Sza70] Szász, G., *Eine Charakteristik der Primidealhalbgruppen*, Publicationes Mathematicae, Tom. 17. Fasc. 1-4(1970), 209-213

[TK54] Tamura, T. and N. Kimura, *On decompositions of a commutative semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep., 1954(1954), 109-112

[Tam69] Tamura T., *Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain*, Bull. Soc. Math. France, 97(1969), 369-380

[Tam72] Tamura, T., *Note on the greatest semilattice decomosition of a semigroup*, Semigroup Forum, 4(1972), 255-261

[TS72] Tamura, T. and J. Shafer, *On exponential semigroups I*, Proc. Japan Acad., 48(1972), 77-80

[TN72] Tamura, T. and T. Nordahl, *On exponential semigroups II*, Proc. Japan Acad., 48(1972), 474-478

[Tro76] Trotter, P.G., *Exponential Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 12(1976), 313-331

[VW91] Valeriote, M.A and R. Willard, *A characterization of congruence permutable locally finite varieties*, Journal of Algebra, 140(1991) (2), 362-369

Nagy Attila publikációi

[DN10] Deák, A. and A. Nagy, *Finite permutable Putcha semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged), 76(2010), 397-410

[JN03] Jiang Z., és A. Nagy, *$\mathcal{RGC}_n$-kommutative Δ-semigroups (corrigendum)*, Semigroup Forum, 67(2003), 468-470

[Nag84] Nagy, A., *Weakly exponential semigroups*, Semigroup Forum, 28(1984), 291-302

[Nag90] Nagy A., *Weakly exponential Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 40(1990), 297-313

[Nag92] Nagy A., *RC-commutative Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 44(1992), 332-340

[Nag98] Nagy, A., *RGC_n-commutative Δ-semigroups*, Semigroup Forum, 57(1998), 92-100

[Nag00] Nagy, A., *Right commutative Δ-semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 66(2000), 33-45

[Nag01] Nagy, A., *Special Classes of Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001

[Nag04] Nagy, A. and P.R. Jones, *Permutative semigroups whose congruences form a chain*, Semigroup Forum, 69(2004), 446-456

[Nag05] Nagy, A., *Permutable semigroups satisfying a non-trivial permutation identity*, Acta Sci. Math. (Szeged), 71(2005), 37-43

[Nag08] Nagy, A., *Medial permutable semigroups of the first type*, Semigroup Forum, 76(2008), 297-308

[Nag13] Nagy, A., *Notes on a problem on weakly exponential Δ-semigroups*, International Journal of Algebra, 7(2013), 901-907

[NZ16] Nagy, A. and Zubor, M., *A Note on Semigroup Algebras of Permutable Semigroups*, Communications in Algebra, 44(2016), 4865-4873