

Válasz Márki László opponensi véleményére

Köszönetemet fejezem ki Márki Lászlónak a disszertációm elolvasásáért, a bírálói vélemény elkészítéséért és a disszertációmban szereplő eredmények részletes, pozitív értékeléséért. Köszönöm a disszertáció néhány pontatlanságra vonatkozó megjegyzéseit, ezen megjegyzésekkel maximálisan egyetértek.

A bírálatban a következő kérdés szerepelt:

”Korábbi eredmények alapján a véges kongruencia-felcserélhető Putcha-félcsoportok két archimédeszi félcsoport bizonyos félhálói. Az első megszorítás az, hogy a jelölt csak azt az esetet vizsgálja, amikor a felső komponens csoport. A témában kellően nem járatos olvasó (talán naívan) úgy vélheti, hogy a 2×1 -es vagy 1×2 -es vagy 2×2 -es Rees-mátrixok esete sem lehet reménytelenül bonyolult. Kérdés: mi okozza ezekben a nehézséget?”

Válaszom a következő: Jól ismert, hogy a Rees-féle mátrixfélcsoportok kongruenciái hogyan konstruálhatók. Mivel a mátrixfélcsoportok a kérdésben említett esetekben egy bővebb félcsoport részcsoportjai, ezért ez az ismeret csak részben, és esetleg csak speciális esetekben hasznosítható. Néhány példa azt mutatja, hogy esetleg az a járható út, hogy a kérdésben említett eseteknek megfelelő félcsoportokat olyanokból állítjuk elő, amelyek felső félcsoportja csoport. Ennek szemléltetésére két példát mutatok.

1) A disszertációm 5. fejezetében szereplő 1-es típusú kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportok felső félcsoportja olyan $L \times G \times R$ derékszögű Abel-csoport, amelyben L egy legfeljebb 2 elemű balzéro félcsoport, R pedig egy legfeljebb két elemű jobbzero félcsoport (az alsó félcsoport nil félcsoport). Leírásukhoz egy új konstrukció kidolgozására volt szükség, és mindegyik esetet a kommutatív nem arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető félcsoportokból kiindulva kaptuk meg a jobb tükrözés, illetve a bal tükrözés megfelelő alkalmazásával.

2) A második példában is egy speciális konstrukció játszik fontos szerepet. Z. Jiang ”LC-commutative permutable semigroups, Semigroup Forum, 52-2(1996), 191-196” cikkében szereplő Theorem 11 szerint minden olyan nem arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető LC-kommutatív félcsoport, amelynél a felső félcsoport egy kételemű balzéro félcsoportnak és egy kommutatív csoportnak a direkt szorzata (az alsó félcsoport itt is nil félcsoport), egy kommutatív nem arkhimédeszi kongruencia-felcserélhető T félcsoportnak a T egy ideál szerinti bifurkációs bővítéseként (bifurcation extension) áll elő.

Mindkét példa azt mutatja, hogy még olyan esetben is, amikor speciális félcsoporthoz tartozó félcsoporthoz vizsgálunk és az alsó félcsoport nil félcsoport, a vizsgálat eredményessége attól függhet, hogy tudunk-e alkalmas konstrukciót találni a vizsgált félcsoporthoz leírásához. A példák azt is mutatják, hogy fontos szerepet játszanak azok a kongruencia-felcserélhető nem arkhimédeszi félcsoporthoz, amelyek felső félcsoporthoz csoport, alsó félcsoporthoz pedig nil félcsoport. Ezért tartottuk fontosnak, hogy mi is elsősorban ezeket a félcsoporthoz vizsgáljuk meg.

A fenti kérdéshez kapcsolódóan egy megjegyzés hangzott el a bírálóknál:

”A második megszorítás az alsó komponensre vonatkozik. Erre a komponensre a 6.2.4. Lemma négy lehetőséget ad meg, közülük a szerző csak a másodikat és a harmadikat, valamint a negyediknek a 6.2.6. Megjegyzésben megadott két speciális esete egyikét vizsgálja. Nem látszik, hogy ennek a megszorításnak valamiféle elvi oka lenne.”

Mivel ismert, hogy hogyan kaphatjuk meg a teljesen egyszerű félcsoporthoz kongruenciáit, ezért a fent említett megszorításnak elvi oka nincs. A probléma nehézsége attól függ, hogy az egész félcsoporthoz tudunk-e megfelelő kongruenciákat definiálni esetleg úgy, hogy azok a teljesen egyszerű részfélcsoporthoz valamely kongruenciáinak az egész félcsoporthoz való kiterjesztésével keletkeznek.

A Remark 6.2.6 két esetére vonatkozó megjegyzésre a következő a válaszom. A két eset szoros kapcsolatban áll egymással. A (4b) esetben K olyan ideálja S_0 -nak, amely teljesen egyszerű, és ezért $K^2 = K$. Így (a disszertációbeli Theorem 1.1.4 szerint) K ideálja S -nek is. Az S félcsoport K ideál szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthoz olyan kongruencia-felcserélhető félcsoport, amely a (4a) esetnek felel meg. Így a (4a) eset vizsgálatával a (4b) eset jövőbeli vizsgálatát készítettük elő.

Budapest, 2018. május 28.

.....
Nagy Attila