Válasz Szabó Csaba bírálói véleményére

Köszönöm Szabó Csaba bírálói véleményét, amelyben a disszertációm eredményeinek részletes értékelését adja. Köszönöm a disszertációbeli jelölésekkel és bizonyítások részletességével kapcsolatos megjegyzéseit és tanácsait.

A bírálatban szereplő megjegyzésekre adott válaszaimat a következőkben részletezem.

Első megjegyzés, amely a 2.3.11 Következményre vonatkozik:

"Megjegyzem, hogy ez a következmény egyszerűen következik a 4.2.1 Lemma első feléből is ..."

Válaszom a következő: A megjegyzéssel egyetértek. A bírálói véleményben nincs részletezve annak bizonyítása, hogy hogyan adódik a 2.3.11 Következmény a 4.2.1 Lemmából. Az alábbiakban egy lehetséges bizonyítást bemutatok.

Tegyük fel, hogy van véges T2R félcsoport. Jelöljön S egy ilyen félcsoportot. Akkor (a disszertációbeli Theorem 2.3.4 jelöléseit használva) S előáll egy $S_1 = \{u, v\}$ kételemű jobbzéró félcsoportnak és egy legalább kételemű S_0 ideálnak a félhálójaként. A végesség miatt van S_0-nak olyan nemnulla a eleme, amelyre $J(a) = S_0$ teljesül, azaz S_0 megegyezik az a elem által generált S-beli ideállal. A disszertációbeli Theorem 2.3.3 szerint $|J_a| \leq 2$. Így az S félcsoport S_0 ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoport vagy négyelemű T2R félcsoport, vagy ötelemű T2R félcsoport. Így annak bizonyításához, hogy nincs véges T2R félcsoport, elegendő megmutatni, hogy nincs négyelemű és nincs ötelemű T2R félcsoport.

Miért nincs négyelemű T2R félcsoport? Tegyük fel, indirekt módon, hogy van ilyen S félcsoport. A disszertációbeli Theorem 2.3.4 jelöléseit használva, S_0 kételemű zéró félcsoport. Azt is használva, hogy $S_1 = \{u, v\}$ elemei idempotensek, igen egyszerűen bizonyítható, hogy S exponenciális. Mivel a kételemű $N = S_0$ félcsoport kongruencia-felcserélhető, ezért P.G. Trotter "Exponential Δ-semigroup, Semigroup Forum, 12(1976), 313-331" cikkének Theorem 3.6 (iv) állítása szerint S nem lehet T2R félcsoport. Ez ellentmondás.

Miért nincs ötelemű T2R félcsoport? Tegyük fel, indirekt módon, hogy van ilyen S félcsoport. A disszertációbeli Theorem 2.3.4 jelöléseit használom. S előáll egy kételemű $S_1 = \{u, v\}$ jobbzéró félcsoportnak és egy háromelemű

$S_0 = \{a, b, 0\}$ nilpotens ideálnak a félhálójaként. A disszertációbeli Proposition 2.3.7 szerint $J_a = \{a, b\} = J_b$.

Ha S_0 nem Δ-félcsoport, akkor az a és b elemek által az S_0 félcsoportban generált ideálok nem hasonlíthatók össze (ugyanis egy nil félcsoport akkor és csak akkor Δ-félcsoport, ha főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve). Ezért $a^2 = b^2 = ab = ba = 0$, azaz S_0 egy zéró félcsoport. Felhasználva azt is, hogy S_1 elemei idempotensek, könnyen igazolható, hogy S egy exponenciális félcsoport. P. G. Trotter fent említett cikkében szereplő Theorem 3.6 (iii) szerint S nem lehet $T2R$ félcsoport, mert $N = S_0$ mediális. Ez ellentmondás.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor S_0 egy Δ-félcsoport. A disszertációban szereplő Lemma 4.2.1 első állítása szerint S_0 ciklikus. Feltehetjük, hogy $b = a^2$ és $0 = a^3$. Itt nem részletezem, de elemi módon megmutatható, hogy $au = av$, $ua = va$, valamint $bu = bv \in \{0, b\}$, $ub = vb \in \{0, b\}$, továbbá $ab = ba = b^2 = 0$. Ebből pedig az következik, hogy az S félcsoport $S_1 = \{u, v\}$; $\{0, b\}$; $\{a\}$ osztályozásához tartozó α ekvivalencia az S egy kongruenciája. Mivel $\{0, b\} \subset S_0$, ezért $\alpha \subset \varrho_{S_0}$, ahol ϱ_{S_0} jelöli az S félcsoport S_0 ideál szerinti Rees-féle kongruenciáját. Mivel $(u, v) \in \alpha$, ezért $(u, v) \in \varrho_{S_0}$, és ezért $u = v$. Ez ellentmondás. Tehát bebizonyítottuk, hogy nincs véges T2R félcsoport.

Második megjegyzés:

"A 49. oldalon a 2.3.9 Állítás, amely bizonyítás 8 sor, a következőket mondja: Ha S egy T2R félcsoport, akkor van egy olyan $b \in S_0$, amelyre $ub \neq b$ és $vb \neq b$. A bizonyítás első mondata: Indirekt módon tegyük fel, hogy $ub = vb = b$ minden b-re. Ez formailag semmikép sem az eredeti állítás tagadása, …."

Válaszom a következő: Az állítás tagadása az, hogy minden $b \in S_0$ elemre $ub = b$ vagy $vb = b$. Ha $ub = b$, akkor balról v-vel való szorzás után $v(ub) = vb$ adódik, és így $vb = v(ub) = (vu)b = ub = b$, mivel u és v a kételemű jobbzéró S_1 félcsoport elemei. Hasonlóan bizonyítható, hogy a $vb = b$ egyenlőségből az $ub = b$ egyenlőség következik. Tehát az $ub = b$ és $vb = b$ egyenlőségek közül vagy egyik sem teljesül, vagy mindkettő igaz. Így az indirekt feltétel a disszertációban szereplő formában is megfogalmazható, azaz: $ub = vb = b$ teljesül minden $b \in S_0$-ra.

Harmadik megjegyzés:

"Nagy segítség lett volna, ha a szerző adaírja a szereposztásokat minden tétel alkalmazása előtt, sokkal könnyebben olvasható lett volna a dolgozat"

Válaszom a következő: Egyetértek a bírálónak a dolgozat könnyebb olvashatóságára vonatkozó minden egyes, a bírálatban szereplő tanácsával.

Negyedik megjegyzés:

"Én úgy oldottam fel végül az első felvetésemet, hogy $ub = vb = b$ esetén az az ekvivalencia reláció, amely u-t és v-t egybeejti, a többi elemet pedig meghagyja, egy kongruencia."

Válaszom a következő: A 2.3.9 Állítás bizonyítása végül is azt igazolja, hogy az indirekt feltételből az következik, hogy tetszőleges $x, y \in S^1$ elemekre $xJ_u y \cap J_b = \emptyset$ vagy $xJ_u y \subseteq J_b$. Így az S félcsoport J_b részhalmaza által definiált

$$H_{J_b} = \{(c, d) \in S \times S : \ (\forall x, y \in S^1) \ xcy \in J_b \Leftrightarrow xdy \in J_b\}$$

főkongruenciára $(u, v) \in H_{J_b}$ teljesül. Világos, hogy J_b egy H_{J_b}-osztály. Mivel $J_b \subset S_0$, ezért $H_{J_b} \subset \varrho_{S_0}$, ahol ϱ_{S_0} jelöli az S félcsoport S_0 ideálja szerinti Rees-féle kongruenciáját. Mivel $(u, v) \in H_{J_b}$, ezért $(u, v) \in \varrho_{S_0}$, amelyből $u = v$ következik. Ez az ellentmondás mutatja, hogy az indirekt feltételünk nem helyes.

Budapest, 2018. május 28.

....

Nagy Attila