Opponensi vélemény

Nagy Attila:

„Congruence permutable semigroups in special classes of semigroups"

című

MTA doktori értekezéséről

Nagy Attila kutatási területe az algebra, azon belül a félcsoportelmélet területére esik, disszertációjában kongruencia-felcserélhető félcsoportokkal foglalkozik. A félcsoportok az algebra számos területén (többek között a bíráló kutatási területén, az algebrai logikában is) alapvető szerepet játszanak, a kongruencia-felcserélhetőség fontos, és intenzíven vizsgált tulajdonság az univerzális algebrában, számos alapvető algebrai struktúra kongruencia-felcserélhető. Mindezek alapján elmondható, hogy Nagy Attila kutatását a matematika fontos, nemzetközi érdeklődésre számot tartó terültén végzi.

Az alábbiakban áttekintem a disszertáció eredményeit. A jelölt disszertációját egy bevezetésre és hét számozott fejezetre osztja.

Az első fejezetben a szerző a szükséges alapfogalmakat definiálja.

A második fejezetben jelölt bevezeti a gyengén exponenciális félcsoportokat, majd az exponenciális és az exponenciális Δ-félcsoportok osztályáról szakirodalmi eredményeket általánosít gyengén exponenciális és gyengén exponenciális Δ-félcsoportokra: Belátja, hogy az egyszerű gyengén exponenciális félcsoportok osztálya megegyezik a rektanguláris Abel-csoportok osztályával, valamint, hogy minden gyengén exponenciális félcsoport egyszersmind bal- és jobb-Putcha félcsoport, azaz előáll gyengén exponenciális arkhimédészi félcsoportok félhálójaként. Az arkhimédészi esetet is jellemzi (rektanguláris Abelcsoportnak nil félcsoporttal való retrakt bővítése, illetve létezik nemtriviális csoport-homomorf képe); itt a strukturális leírás attól függ, hogy van-e az algebrában idempotens elem. Továbbá, a fejezet fő eredményeként, általánosítja Trotter osztályozási eredményét exponenciálisról gyengén exponenciális Δ-félcsoportokra; itt a rendezett főideál-halmazú exponenciális nil félcsoportok osztálya helyett szerephez jut a rendezett főideál-halmazú nil félcsoportok osztálya, valamint a kételemű rektanguláris band-ek szerepét átveszik a bal- és jobb- zérófélcsoportok. Végül jellemzi a fenti osztályozásban szereplő T1 és T2R (T2L) félcsoportokat. A fejezet végén derül ki, hogy nem is biztos, hogy létezik T2R (T2L) félcsoport (a dolgozat felépítése nyerne vele, ha a 2.2.1-es definíció után a szerző ezt rögtön megjegyezné); emiatt a szakirodalom ezt használó jellemzései (Trotter, Nagy) kissé befejezetlenek. A véges T2R (T2L) félcsoportok létezését a jelölt kizárja, a végtelen eset nyitott.

A harmadik fejezetben a jelölt az R- és az általa bevezetett GC_n-kommutativitást vizsgálja. Belátja, hogy az egyszerű GC_n-kommutatív félcsoportok pontosan az Abelcsoportok feletti Rees mátrixcsoportok. Majd belátja, hogy az egyszerű RGC_n-kommutatív félcsoportok osztálya megegyezik a jobb Abelcsoportok osztályával, valamint, hogy minden RGC_n-kommutatív félcsoport előáll GC_n-kommutatív arkhimédészi félcsoportok félhálójaként. Az arkhimédészi esetben: 1. ha az algebrában van idempotens elem akkor az izomorf egy jobb Abelcsoportnak egy kommutatív nil csoporttal való ideál bővítésével, 2. ha S R-kommutatív, és (csupán) egy I ideálja GC_n-kommutatív és idempotens elemtől mentes akkor létezik I-nek nemtriviális csoport-homomorf képe. Továbbá jellemzi az arkhimédészi RGC_n-kommutatív Δ-félcsoportokat: az vagy a kváziciklikus csoport egy nemtriviális részcsoportja, vagy egy kételemű jobb zéró félcsoport, vagy egy kommutatív nil Δ-félcsoport. A fejezet végén a jelölt osztályozza a félháló-felbonthatatlan RGC_n-kommutatív Δ-félcsoportokat és speciálisan az RC-kommutatív Δ-félcsoportokat.

A negyedik fejezetben a jelölt a permutatív félcsoportok osztályát vizsgálja. A korábbi tételek következménye, hogy egy félcsoport pontosan akkor permutatív és egyszerű, ha rektanguláris Abelcsoport, és hogy egy idempotens elemet is tartalmazó arkhimédészi permutatív félcsoport mindig egy rektanguláris Abelcsoportnak egy nil félcsoporttal való ideál-bővítése. Belátja, hogy idempotens elemet nem tartalmazó arkhimédészi permutatív félcsoportoknak mindig létezik nemtriviális csoport-homomorf képe. Majd belátja, hogy a mediális nil Δ-félcsoportok mindig kommutatívak, valamint, hogy minden permutatív Δ-félcsoport (sőt, Deák és Jones eredményét felhasználva, minden permutatív kongruencia-felcserélhető) félcsoport mediális. Végül belátja, hogy minden szigorúan permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport kommutatív.

Az ötödik fejezet tárgya a mediális félcsoportok. A jelölt belátja, hogy minden mediális félcsoport bal- vagy jobb Putcha, azaz mediális arkhimédészi félcsoportok félhálója. Továbbá, hogy egy félcsoport pontosan akkor mediális, arkhimédészi, idempotens elemet tartalmazó, ha egy rektanguláris Abelcsoportnak egy mediális nil félcsoporttal való retrakt bővítése; valamint, hogy idempotens elem híján létezik nemtriviális csoport-homomorf képe. A fejezet második felében ellenpéldát ad az Etterbeek PhD disszertációjában megadott mediális Δ-félcsoportokra vonatkozó osztályozására, és megadja a helyes osztályozást. Az általánosabb keretre térve, a kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportokról belátja, hogy a Bonzini és Cherubini által megadott osztályozásban az első típusú félcsoportok (három típus van) mindig előállnak egy nem-arkhimédészi, kommutatív, kongruencia-felcserélhető félcsoport bal- és jobb-reflexiójaként. Kiemelendő, hogy a jellemzéshez szükséges reflexió konstrukciót is a jelölt vezette be.

A hatodik fejezetben véges kongruencia-felcserélehető Putcha félcsoportokkal foglalkozik. Az arkhimédészi esetben belátja, hogy az vagy egy véges, ciklikus, nilpotens félcsoport, vagy egy véges teljesen egyszerű kongruencia-felcserélhető félcsoport. A nem-arkhimédészi esetben jellemzi az S_0 és S_1 komponenseket, majd ezt felhasználva belátja, hogy négy aleset lehetséges. A fejezet végén két alesetre a teljes jellemzésüket is megadja.

A hetedik fejezetben azt vizsgálja, hogy egy félcsoportalgebra ideálhálójának az S félcsoport feletti B_S relációfélcsoportba való (az ideál által definiált kongruenciának az S félcsoportra való leszűkítésével definiált) leképezése mikor lesz $\circ$-homomorfizmus. Belátja, hogy a kongruencia-felcserélhetőség szükséges, és két esetben elégséges feltétel (ha S egy kongruencia-felcserélhető rektanguláris band, és ha S egy kongruencia-felcserélhető félháló).

Összefoglalva megállapítható, hogy Nagy Attila számos érdekes, mély eredménnyel gazdagította a félcsoportelméletet. Eredményei között osztályozási tételek is találhatóak; ezzel az algebra egyik legfontosabb alapfeladatát oldja meg: adott tulajdonságú struktúrák teljes leírását adja. További méltatásként elmondható, hogy Nagy Attila nem csupán mély tételeket bizonyít, de számos esetben az azokhoz kapcsolódó helyes definíciókat is ő találja meg.

A tézisfüzet kiváló szabatossággal ad átfogó képet az elvégzett munkáról, ideértve az eredmények pontos elhelyezését és azoknak a tudományterületre kifejtett jelentőségét is.

A disszertáció jól strukturált, logikusan felépített, szerkesztése nagyon jó, ekkora terjedelmű műnél szokatlanul kevés hibával: Az első fejezetben apró strukturális hiba, hogy a „nil semigroup" fogalom már szerepel a 16-ik, 17-ik és 19-ik oldal tételeiben, definíciója azonban csak a 20-ik oldalon található. A disszertáció angolsága is nagyon jó, csupán annyit tudok megjelölni, hogy a jelölt néhány esetben feleslegesen használ (határozott és határozatlan) névelőt, de ez akár az elgépelések kategóriába is tartozhat.

A fenti csekély számú kritikai megjegyzés nem befolyásolja a doktori mű tudományos értékét. Véleményem szerint Nagy Attila disszertációja megfelel a doktori disszertációkkal szemben támasztott követelményeknek, Nagy Attila alkalmas a tudományok doktora cím elnyerésére. A disszertáció nyilvános vitára való kitűzését és a matematikai tudományok doktora cím odaítélését javaslom.

Pécs, 2018. január 16.

Jenei Sándor

a matematikai tudományok doktora