Opponensi vélemény

Nagy Attila: Congruence permutable semigroups in special classes of semigroups

című MTA doktori értekezéséről

A félcsoportok kongruencia-struktúrája lényegesen bonyolultabb, mint pl. a csoportoké vagy a gyűrűké, ezért érdekes kérdés az, hogy mely félcsoportok kongruenciái rendelkeznek valamilyen nevezetes, jó tulajdonsággal – pl. felcserélhetők vagy láncot alkotnak. (Az utóbbi tulajdonsággal rendelkező félcsoportokat Δ-félcsoportoknak nevezik; könnyen látható, hogy ezek kongruencia-felcserélhetők.) Nagy Attila értekezésében az ilyen félcsoportokat írta le „közel kommutatív” félcsoportok különféle osztályaiban.

A kommutatív félcsoportok varietása a félcsoportok struktúraelméletében az egyik legkorábban és legalaposabban kutatott osztály volt. Az általánosításaik vizsgálata 1970 körül indult el: ennek során mediális és exponenciális félcsoportokra születtek struktúratételek. A mediális félcsoportokat az $axyb=ayxb$ azonosság definiálja, exponenciálisnak pedig azokat a félcsoportokat nevezzük, amelyekben az $(xy)^m=x^my^m$ azonosság minden pozitív m egész számra teljesül. Nagy Attila ezzel a témával pályafutásának kezdete óta foglalkozik. Ő vette észre még az 1980-as években, hogy ha az exponenciális feltételt úgy gyengítjük, hogy ha $(xy)^m=x^my^m$ helyett csak azt követeljük meg, hogy valamely (x,y-tól és m-től függő) k-val $(xy)^{m+k} = x^my^m(xy)^k = (xy)^kx^my^m$ teljesüljön, akkor remélhető, hogy ebben a lényegesen tágabb, többek között az összes nilfélcsoportot is tartalmazó osztályban igazak maradnak a korábbi tételek. Valóban sikerült is számos érdekes tételt ennek megfelelően általánosítania.

A félcsoportok struktúraelméletének jellegzetes eszköze a félháló-felbontás: minden félcsoportnak van egy legnagyobb olyan homomorf képe, amely félháló (azaz olyan kommutatív félcsoport, amelynek minden eleme idempotens); a félháló-felbontási tételek arról szólnak, hogy egy adott félcsoport-osztályban minden félcsoport legnagyobb félháló képéhez tartozó kongruenciájának az osztályai (ezek maguk is félcsoportok) egy másik, szűkebb félcsoport-osztályban vannak (pl. csoportok). Nagy Attila „közel kommutatív” félcsoportok számos osztályára bizonyított félháló-felbontási tételt, a kommutatív félcsoportok félháló-felbontását általánosítva.

Ebben a háttérben helyezhetők el Nagy Attila értekezésének az eredményei.

Az értekezés I. fejezete a továbbiakhoz szükséges fogalmakat és alapvető eredményeket mutat be. Meg kívánom jegyezni, hogy az utóbbiak között több olyan is van, amelyek szintén a jelölt eredményei.

A II. fejezet (az értekezés leghosszabb fejezete) a gyengén exponenciális Δ-félcsoportok jellemzését adja. A fejezet első része a gyengén exponenciális félcsoportok félháló-felbontását írja le. Erre épül a második rész, és ebben a fejezet fő eredménye, a 2.2.2. Tétel, amely a gyengén exponenciális Δ-félcsoportokat hat osztályba sorolja. Ezen osztályok közül az első öt jól áttekinthető; a hatodik három lehetőséget ad meg a félcsoport félháló-felbontásának egy-egy fajtájaként, ezek az ún. T1, T2R és T2L félcsoportok. Ezek definiálása itt túlságosan technikai lenne; Trotter vezette be őket 1976-ban az exponenciális Δ-félcsoportok leírásához. Ezen félcsoportok vizsgálata áll a fejezet harmadik részében. A 2.3.2. Tétel a T1 félcsoportok jól érthető leírását adja. A T2R és a T2L félcsoportok jellemzése viszont igen bonyolult, az erről szóló 2.3.4. Tétel a fejezet legnehezebb eredménye.

Meg kívánom jegyezni, hogy a fejezet eddig bemutatott eredményei a jelöltnek már a kandidátusi értekezésében is szerepeltek, de az MTA doktori szabályzata ezt nem tiltja. A harmadik rész végén álló, új eredmények ennél tovább lépnek. Trotter az exponenciális Δ-félcsoportok esetében sem tudta eldönteni, hogy léteznek-e T2R és T2L félcsoportok. Az értekezés 2.3.1. Következménye azt mondja ki, hogy ilyenekből végesek a gyengén exponenciális esetben sincsenek. Végtelenek létezése továbbra is nyitott kérdés.

A III. fejezet a kommutativitás további általánosításait vizsgálja: $\mathcal{R}$-kommutatív, $\mathcal{RC}$-kommutatív, $\mathcal{GC}_n$-kommutatív és $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív félcsoportokat – ezeket talán nem érdemes itt definiálni. A fejezet fő eredménye az $\mathcal{RGC}_n$-kommutatív Δ-félcsoportok megadása (3.4.9. Tétel), ez esetben is az itt kidolgozott félháló-felbontásukra építve. Ez az eredmény a 2.2.2. Tételhez nagyon hasonló leírást ad, de ebben nincs szükség a bonyodalmakat okozó T1, T2R és T2L osztályokra. A 3.4.9. Tétel következményeként a 3.4.10. Tétel megadja az $\mathcal{RC}$-kommutatív Δ-félcsoportokat. A 3.4.9. Tétel leírása egyébként kissé egyszerűsíthető: a (ii) eset elhagyható, ha (i)-ben a triviális részcsoportot is megengedjük.

Az értekezés IV. és V. fejezete több lépcsőben a kongruencia-felcserélhető permutatív félcsoportok teljes leírását adja. Permutatívnak nevezünk egy félcsoportot, ha teljesül benne valamilyen permutáció-azonosság, azaz valamilyen $n \geq 2$ természetes számra és $\{1,2,\dots,n\}$ egy nem identikus σ permutációjára $x_1x_2\dots x_n = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)}$ a félcsoport bármely $x_1,x_2,\dots,x_n$ elemei esetén. Ennek speciális esete a mediális azonosság: $axyb=ayxb$ bármely a,x,y,b elemek esetén.

Ez a két fejezet is a szóban forgó félcsoportok félháló-felbontásának a vizsgálatával kezdődik, majd a következők a leglényegesebb eredmények:

– minden permutatív Δ-félcsoport mediális (4.2.8. Tétel),

– minden permutatív kongruencia-felcserélhető félcsoport mediális (4.3.3. Tétel),

– minden szigorúan permutatív (ez azt jelenti, hogy a definiáló permutáció-azonosságban $\sigma(1) \neq 1$ és $\sigma(n) \neq n$) kongruencia-felcserélhető félcsoport kommutatív (4.3.6. Tétel),

– a mediális Δ-félcsoportok teljes leírása (5.2.5. Tétel),

– az ún. 1-es típusú kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportok leírása (5.3.15. Tétel).

Az utolsó eredménnyel kapcsolatban két megjegyzésem van. Egyrészt ez az eredmény másképp van kimondva a tézisek 2.3.4. Tételében – az ott kimondott tétel az értekezés 5.3.12. és 5.3.15. Tételeinek az ötvözete. Másrészt az 5.3.15. Tétel elintézi a Bonzini és Cherubini korábbi munkáiban nyitva maradt esetet, és ezzel teljessé teszi a kongruencia-felcserélhető permutatív (mediális) félcsoportok leírását. Érdemes lett volna következményként ezt a teljes leírást is megadni.

A VI. fejezet véges Putcha-félcsoportokkal foglalkozik – ezek azok az S félcsoportok, amelyekben bármely x,y elemekre $y \in S^1xS^1$ esetén $y^m \in S^1x^2S^1$ valamely m pozitív egész számra. A végső cél itt véges kongruencia-felcserélhető Putcha-félcsoportok leírása lenne, ez bizonyos megszorítások mellett van itt megadva a 6.2.14. és a 6.2.18. Tételekben. Ez is a félháló-felbontásra épül. A fejezet elején a 6.1.2. Tétel teljes általánosságban megadja a véges archimédeszi (tehát félháló-felbonthatatlan) kongruencia-felcserélhető félcsoportokat – ezek a ciklikus nilpotens félcsoportok és a kongruencia-felcserélhető teljesen egyszerű félcsoportok. A jelölt itt nem mondja meg, csak a következő rész elején (ezzel itt alapos fejtörésre késztetve az olvasót), hogy az utóbbiak Bonzini és Cherubini egy tétele szerint éppen azok a teljesen egyszerű félcsoportok, amelyek Rees-mátrix alakja 2×2-es vagy annál kisebb mátrixokból áll.

Korábbi eredmények alapján a véges kongruencia-felcserélhető Putcha-félcsoportok két archimédeszi félcsoport bizonyos félhálói. Az első megszorítás az, hogy a jelölt csak azt az esetet vizsgálja, amikor a felső komponens csoport. A témában kellően nem járatos olvasó (talán naívan) úgy vélheti, hogy a 2×1-es vagy 1×2-es vagy 2×2-es Rees-mátrixok esete sem lehet reménytelenül bonyolult. Kérdés: mi okozza ezekben a nehézséget? A második megszorítás az alsó komponensre vonatkozik. Erre a komponensre a 6.2.4. Lemma négy lehetőséget ad meg, közülük a szerző csak a másodikat és a harmadikat, valamint a negyediknek a 6.2.6. Megjegyzésben megadott két speciális esete egyikét vizsgálja. Nem látszik, hogy ennek a megszorításnak valamiféle elvi oka lenne.

A VII.fejezet félcsoport-algebrákról szól. Ha S félcsoport és $\mathbb{F}$ test, akkor az $\mathbb{F}[S]$ félcsoport-algebra kongruenciái metszet félhálójának van egy szürjektív természetes leképezése az S félcsoport kongruenciái metszet félhálójára. Ha az S félcsoport kongruencia-felcserélhető, és itt a kongruenciáknak nem a metszetét, hanem a kompozícióját (relációszorzatát) tekintjük, akkor ez a leképezés az $\mathbb{F}[S]$ kongruenciái relációszorzat-félcsoportjának homorfizmusa az S halmaz binér relációinak (kompozíció-)félcsoportjába. A 7.2.1. és a 7.3.1.Tételek azt mondják ki, hogy ha S félháló vagy derékszögű köteg, akkor ennek a homomorfizmusnak a képe éppen az S kongruenciáinak a kompozíciófélcsoportja.

A fenti eredmények kapcsán hangsúlyozni kívánom, hogy bár a bővebb osztályokban kapott eredmények sokszor hasonlítanak a kommutatív esetben korábban bizonyítottakra, maga a bizonyítás lényegesen bonyolultabb, legtöbbször új ötleteket kíván. Nem csak azért, mert az elemek felcserélhetősége helyett gyengébb tulajdonság áll rendelkezésre, hanem főleg azért, mert emiatt a kongruenciák sokkal bonyolultabbakká válnak. Azt is el kell mondani, hogy bár a jelölt több eredménye univerzális algebrai jellegű is, az ott kifejlesztett eszközök, az ott elért mély eredmények általában nem alkalmazhatók a félcsoportok esetében (sőt, legtöbbször a kommutatív félcsoportok esetében sem), bár éppen az értekezés VI. fejezetében a szerző jelentősen támaszkodik Pálfy és Pudlák egy lemmájára. Nagy Attila jól átlátja a nehézségeket és lehetőségeket, ügyesen alkalmazza a korábban kifejlesztett technikákat, maga is gazdagítja azokat, és jó érzékkel ötvözi ezeket a korábbiakkal.

A szerző a kommutatív félcsoportok általánosításainak kétségtelenül vezető szakértője. Bizonyára az e téren meglévő nagy jártasságának a következménye, hogy időnként néhány lépést átugrik, bizonyos dolgokat említés nélkül használ, és ettől a témában kevésbé járatos olvasó számára a mű helyenként nehezen követhető. Erre egyetlen példát hozok fel: a 6.2.2. Lemma bizonyításában említés nélkül felhasználja, hogy $Ne \cup NeN$ és $eN \cup NeN$ összehasonlíthatók – ez azért igaz, mert a szóban forgó esetben a félcsoport ideáljai láncot alkotnak Hamilton egy tétele szerint, amely az értekezés első fejezetében ki is van mondva 1.1.2. Tételként, de ki emlékszik itt már erre? Azt azonban el kell ismernem, hogy komolyabb időráfordítással kibogarászhatók a dolgok, tényleges hibát vagy súlyosan hiányos bizonyítást az értekezésben nem fedeztem fel. És az is igaz, hogy a tézisfüzet általában világosan leírja az értekezés eredményeinek más szerzők korábbi munkáival való kapcsolatát, de nekem itt az értekezésről kell szólnom, nem a tézisfüzetről.

Megjegyzem még, hogy az irodalomjegyzékben szereplő [Sch69] cikk nem a Semigroup Forumban, hanem a Bull. Acad. Polon. Sci. folyóiratban jelent meg az itt szereplő kötet- és oldalszámokkal. (Kellően idős lévén, a bíráló tudja, hogy a Semigroup Forum 1970-ben indult.)

Az értekezés eredményei közül a legjelentősebbeknek a 2.2.2., a 3.4.9., a 4.3.3., az 5.2.5. és az 5.3.15. Tételeket tartom.

Az értekezés valamennyi tézisét új tudományos eredményként fogadom el. A disszertációt nyilvános vitára alkalmasnak tartom, és javaslom a nyilvános vita kitűzését.

Budapest, 2018. május 21.

Márki László
a matematikai tudomány doktora