

KONVEXITÁS ÉS NEM-EUKLIDÉSZI GEOMETRIÁK

MTA doktori értekezés tézisei

G.Horváth Ákos



2017

BEVEZETÉS

A szerző a kandidátusi fokozat (1994) megszerzése óta több matematikai témával foglalkozott, azóta 1 jegyzetet 2 könyvet és 43 cikket közölt (Minkowski geometria témaköréből 12 cikk jelent meg, a rácsgeometria vizsgálatait 9 cikkben folytatta, 9 cikket írt további Euklidészi geometriai problémákról, 8 cikket a Bolyai-Lobacsevszkij féle geometriáról és 5 cikket egyéb geometriai témákról), további 2 munka jelenleg közlésre elfogadott. A disszertáció fő témaköre Minkowski geometria annak a lehető legtágabb értelmében. A szigorú értelemben nem Minkowski geometriákról írt dolgozatok közül három eredményeit csatoltuk a disszertációhoz. Valamennyi kiemelt dolgozat használja a konvex geometria módszereit. 4 ezek közül társszerzőkkel íródott, Horst Martini társszerzőm a [4, 6, 7] cikkekben, Vitor Balestro a [7] cikkhez járult hozzá, míg Lángi Zsolttal írtam a [12] cikket. A [1, 2, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14] cikkeknek nincs társszerzője. Fontos szerepet játszik a disszertációban a fogalomalkotás kérdése, nem-Euklidészi geometriák esetén a jó fogalom a kulcs a jó eredményhez. (Az egyszerű követhetőség érdekében a tézisfüzet számozása önálló.)

1. KONVEX BUROK ÉS A TÉRFOGAT SZÁMÍTÁSA

Ebben a fejezetben a [12], [13], [14] cikkek közös problémája a térfogat számítás.

A Lángi Zsolttal közös [12] cikkben a következő geometriai problémát járjuk körül: két test konvex burkának a térfogatáról mit lehet elmondani? Az első eredmény valószínűleg a [34] cikkben található, Fáry és Rédei igazolták, hogy ha az egyik test egyensvonalú egyenletes mozgást végez akkor a konvex burok térfogata az idő konvex függvénye. Ez a gondolat (mint alkalmas eszköz) többször megjelenik az irodalomban, Rogers és Shephard [66] 1958-ban egy kicsit általánosabb formában, u.n. *lineáris paraméter rendszerekre* igazolják, míg Ahn, Brass és Shin [20] egy 2008-as cikkben igazolják ennek "duális állítását" is poliéderekre, miszerint a metszet térfogata konkáv függvénye az időnek. Mi a következő mennyiségeket vizsgáltuk: Két K és L konvex test esetén, jelentse

$$c(K, L) = \max \{ \text{vol}(\text{conv}(K' \cup L')) : K' \cong K, L' \cong L \text{ and } K' \cap L' \neq \emptyset \},$$

ahol vol az n -dimenziós Lebesgue-mérték. Továbbá, ha $\mathcal{S}$ az $\mathbb{R}^n$ egy izometriáiból álló halmaz, legyen

$$c(K|\mathcal{S}) = \frac{1}{\text{vol}(K)} \max \{ \text{vol}(\text{conv}(K \cup K')) : K \cap K' \neq \emptyset, K' = \sigma(K) \text{ for some } \sigma \in \mathcal{S} \}.$$

Hasonló (kevésbé általános) mennyiségek vizsgálatára használta Rogers és Shephard [66] a lineáris paraméter rendszer fogalmát. (A $c(K, K)$ mennyiséggel a szerző a [17]-ben foglalkozik először, ahol konkrét értékét határozza meg szabályos szimplex és a kölcsönös elhelyezkedésre vonatkozó egy további feltétel teljesülése mellett.)

Rogers és Shephard megmutatta, hogy a $c(K|\mathcal{S})$ érték minimuma fellép az n -dimenziós gömb esetén, ha $\mathcal{S}$ az eltolások vagy a centrális tükrözések halmaza. Módszerükből az azonban nem következik, hogy más test nem teljesíti a minimum feltételét. Sejtésük szerint mindkét esetben ha minimális értéket vesz fel egy testen a vizsgált függvény, akkor a test ellipszoid.

Jelöljük $c_i(K)$ -val a $c(K|\mathcal{S})$ értékét, ha $\mathcal{S}$ egy i -dimenziós affin altérre való tükrözést jelent ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Hasonlóképpen, legyen $c^{tr}(K)$ és $c^{co}(K)$ a $c(K|\mathcal{S})$ értéke eltolásokra illetve a teljes izometria csoportra nézve. Az eltolások esetében, olyan új bizonyítást adtunk Rogers és Shephard tételére, melyből az is következik, hogy a minimum felvétele karakterizálja az ellipszoidokat (azaz bizonyítottuk az eltoltakra vonatkozó Rogers-Shephard sejtést). Egy n -dimenziós K konvex testről azt mondjuk, hogy *teljesíti az eltolásra vonatkozó konstans térfogat feltételt*, ha minden eltoltan érintkező test pár esetén a $\text{vol}(\text{conv}((v+K) \cup (w+K)))$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Egy 2-dimenziós konvex görbét *Radon görbének* nevezünk, ha a K konvex burkának egy alkalmas affin

képére teljesül, hogy a polárisa megegyezik a 90° -os elforgatottjával (ld. [60]); a Radon görbe fogalma kapcsolatban van a normált terek Birkhoff-féle ortogonalitás fogalmával. A Birkhoff ortogonalitás szimmetrikus akkor és csak akkor ha az egység körvonal Radon görbe. Bizonyítottuk a következő állítást:

1. Tétel. *Tetszőleges K konvex síkidomra a következő állítások ekvivalensek:*

- (1) K teljesíti az eltolásra vonatkozó konstans térfogat feltételt.
- (2) Az $\frac{1}{2}(K - K)$ görbe Radon görbe.
- (3) K egy Radon normára nézve konstans szélességű alakzat.

A $c_1(K)$ és $c_{n-1}(K)$ értékekről is igazoltunk analóg eredményeket. Bizonyítottuk, hogy $c_1(K)$ éppen az ellipszoidokra nézve minimális és a $c_{n-1}(K)$ érték pedig az Euklidészi gömbre teljesíti ezt a feltételt. Az első eredmény a pontra vonatkozó tükrözésre igazolja a Rogers-Shephard sejtést. A bizonyítások módszerei között klasszikus térfogat egyenlőtlenségeket és konvex geometriai észrevételeket találunk. Érdekes a Minkowski geometria megjelenése ezen Euklidészi geometriai kérdés vizsgálata kapcsán.

A fejezet második cikke [13] szintén Euklidészi térfogattal kapcsolatos kérdést vizsgál. A Fejes-Tóth László által 1964-ben felvetett kérdés a következő: Melyek az adott csúcsszámú, egységgömbbe írt poliéderek közül a maximális térfogatúak (ld. [36])? A kérdés szisztematikus vizsgálata Berman és Hanes 1970-ben megjelent [23] cikkével indult. Meghatározták az optimális poliédereket $n \leq 8$ csúcsszám esetén. Komputeres vizsgálatot a $4 \leq n \leq 30$ esetekre vonatkozóan Mutoh végzett (ld. [65]). A táblázatában szereplő maximális térfogatú poliéderek az általa a sejtett optimumok. Tudomásunk szerint (ld. [25] és [28]), a kérdés matematikai megoldása az $n > 8$ esetben (eltekintve a szerencsés $n = 12$ esettől) még várat magára. Lángi Zsolttal közös [18] cikkünk ezt a problémát vizsgálja magasabb dimenziós esetekben. Visszatérve a disszertációban szereplő munkára Fejes-Tóth László egy olyan egyenlőtlenségéről kell beszélnünk, mely megkerülhetetlen az $n \leq 8$ illetve $n = 12$ esetek optimális megoldásainak megkeresésében. Az $n = 12$ eset optimális megoldása az ikozaéder, mely állítás közvetlen következménye a [36] könyv 264. oldalán található (2)-vel jelölt egyenlőtlenségnek. Ennek simplicális poliéderre kimondott változatát nevezzük *ikozaéder egyenlőtlenségnek*. Az ikozaéder egyenlőtlenség szerint egy az egységgömbbe írt rögzített szférikus területű, szférikus háromszög által meghatározott központi tetraéder térfogata akkor maximális, ha a háromszög szabályos. (A központi tetraéder a háromszög három csúcsának és a gömb középpontjának a konvex burka.) Fontos lehet azonban olyan konfigurációk vizsgálata is melyben szabályos háromszög valamilyen ok folytán nem szerepelhet. A [13] ebben az irányban általánosítja az ikozaéder egyenlőtlenséget. Olyan szimpliciális gömbbe írt testekre fogalmazunk meg egyenlőtlenséget, melyek háromszöglapjai maximális hosszúságú éleinek a hosszrendszere adott. Tegyük fel, hogy a P az egységgömbbe írt, csillagszerű, szimpliciális poliéder f számú lappal. Legyenek $c_1, \dots, c_f$ az $F_1, \dots, F_f$ lapok maximális központi szögéhez tartozó élhosszak. Jelöljük τ_i -vel az F_i laphoz tartozó szférikus háromszög területét. Igazolható, hogy ha az a, b, c élhosszakra teljesülnek az $0 < a \leq b \leq c < \pi/2$ egyenlőtlenségek, akkor fennáll a $\tau \leq c$ egyenlőtlenség is. A $v(\tau, c)$ függvény konkáv a $\mathcal{D} := \{0 < \tau < \pi/2, \tau \leq c < \min\{f(\tau), 2\sin^{-1}\sqrt{2/3}\}\}$ tartományon, ahol az $f(\tau)$ függvényt a Hesse mátrix gyökei definiálják; és nem konkáv a $\mathcal{D}' = \{0 < \tau \leq \omega, f(\tau) \leq c \leq 2\sin^{-1}\sqrt{2/3}\} = \{0 < \tau \leq c \leq \pi/2\} \setminus \mathcal{D}$ tartományon, ahol $f(\omega) = 2\sin^{-1}\sqrt{2/3}$. (Az ω közelítő értéke $\omega \approx 0.697715$.)

2. Tétel. [13] *Tegyük fel, hogy minden i -re teljesülnek a $0 < \tau_i < \pi/2$ feltételek. Indexeljünk úgy, hogy $i = 1, \dots, f'$ esetén $0 < \tau_i \leq c_i \leq \min\{f(\tau_i), 2\sin^{-1}\sqrt{2/3}\}$ álljon fenn és minden olyan j -re pedig, melyre $j \geq f'$ az $0 < f(\tau_j) \leq c_j \leq 2\sin^{-1}\sqrt{2/3}$ egyenlőtlenség.*

Ekkor a $c' := \frac{1}{f'} \sum_{i=1}^{f'} c_i$, $c^* := \frac{1}{f-f'} \sum_{i=f'+1}^f f(\tau_i)$ és $\tau' := \sum_{i=f'+1}^f \tau_i$ jelölések mellett fennáll:

$$v(P) \leq \frac{f}{6} \sin \left(\frac{f'c' + (f-f')c^*}{f} \right) \frac{\cos \left(\frac{4\pi - f'c' - (f-f')c^*}{2f} \right) - \cos \frac{2\pi}{f} \cos \left(\frac{f'c' + (f-f')c^*}{2f} \right)}{1 - \cos \frac{4\pi}{2f} \cos \left(\frac{f'c' + (f-f')c^*}{2f} \right)}.$$

Az egyenlőtlenség alkalmazható konvex poliéderek mellett a gömb középpontjára vonatkozóan csillagszerű poliéderekre is. Többek között teljes általánosságában megoldja a szerző [17]-ben közös középpontú egybevágó szabályos tetraéderekre vonatkozó problémáját.

Végül a [14] cikk egy tételét emeltük be a disszertáció ezen fejezetébe. A hiperbolikus poliéderek térfogatának kiszámítása nehéz kérdés. Általános szimplex térfogatát u.n. orthoszkémek térfogatának számítására vezetik vissza. Az elemi függvényekkel nem kifejezhető integrálok alkalmazási területe ez, a Lobacsevszkij által megadott térfogat formula az egyik legismertebb nem elemi integrál. Ezen formula az orthoszkém lapszögeit használja paraméternek, ezek egyértelműen meghatározzák az orthoszkémet így a térfogatát is. Kevésbé közismert, hogy az orthoszkém térfogatára Bolyai János is adott két (elemi függvényekkel nem kifejezhető) integrált, ezek paraméterei az orthoszkém bizonyos élhosszai és lapszögei. Felépítve több koordinátarendszerben és modellben a hiperbolikus térfogat fogalmát, cikkünkben megadunk egy olyan formulát, mely az orthoszkém meghatározásához tartozó három él hosszát használja paraméterül. Igazoljuk a következő tételt:

3. Tétel. *Legyen a , b és c egy orthoszkém azon éleinek hosszai, melyek közül b merőleges a vele közös csúcsu a -ra és c merőleges az (a, b) síkra valamint a vele közös csúcsu b -re. Az orthoszkém v térfogata ekkor az alábbi integrállal adható meg:*

$$v = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{\tanh \lambda \sinh a}{\sqrt{\tanh^2 b \cosh^2 \lambda + \sinh^2 a \sinh^2 \lambda}} \ln \left(\frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} \right) d\lambda.$$

2. BISZEKTOROK, IZOMETRIÁK MINKOWSKI GEOMETRIÁKBAN

Az [1], [2], [3], [4] dolgozatok Minkowski terek "szakasz-felező merőleges" halmazaiaval úgynevezett biszektorokkal foglalkoznak. Az [5] munka Minkowski geometriák izometriáit tanulmányozza. A disszertáció ezen fejezetéhez kapcsolható a szerző három további cikke, melyekből kettő [6], [7] eredményeit a disszertáció tartalmazza (bizonyítások nélkül). A harmadik [19] cikk a szerző társszerzői által kezdeményezett, ennek (a Minkowski geometriák polaritásaival foglalkozó) eredményeit nem csatoltuk a disszertációhoz.

Az első 4 cikk véges dimenziós, valós, szeparábilis Banach terekben vizsgálja két adott ponttól egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok halmazát (az u.n. biszektort), illetve annak a geometriai és topológiai tulajdonságait. A beágyazó teret *geometriai Minkowski térnek* nevezzük, megkülönböztetve az irodalomban szintén Minkowski térnek nevezett indefinit skalárszorzos tértől. Az elmúlt húsz évben a geometriai Minkowski tér elméleti kutatása ismét centrumba került, elsősorban, gyakorlati problémák felmerülése és megoldása kapcsán. A fogalom remek összekötő kapocs fizikai, funkcionál analízisbeli, konvex geometriai és nem-Euklidészi geometriai kutatások között (lsd. pld. [58], [59]).

Ha K egy 0-szimmetrikus, korlátos, konvex test az n -dimenziós Euklidészi térben E^n -ben, akkor K definiál egy normát, aminek ő az egységgömbje (lsd. például [45], [67]). A kapott teret *Minkowski normált térnek* vagy geometriai Minkowski térnek nevezzük. A Minkowski metrika a norma által indukált távolság, ezért eltolásokra nézve invariáns. A norma egységgömbje *szigorúan konvex* ha határa nem tartalmaz szakaszt, *sima* ha minden határpontjában létezik egyértelmű támaszhipersíkja. A beágyazó Euklidészi tér skalárszorzatára nézve ezek duális fogalmak: A K *polárisa* az a K^* pontthalmaz melyet a következő egyenlet definiál: $K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ minden } x \in K\}$. Megmutatható (lsd. [29]), hogy K pontosan akkor szigorúan konvex, ha K^* sima.

A [1] cikkben a Minkowski tér egységgömbjének a határát vizsgálva két olyan tételt bizonyítunk, melyek H.Mann, A.C.Woods and P.M.Gruber karakterizációs tételeihez hasonlóak (lsd. [57], [75],[42], [43] and [44]).

H.Mann igazolta, hogy egy Minkowski normált tér akkor és csak akkor Euklidészi ha a *Leibniz félterei* konvexek. (Adott, az origótól különböző x pont esetén az $L(0, x)$ Leibniz féltér azon pontok összessége a térben, melyek az origóhoz (0-hoz) közelebb vannak mint x -hez.) A.C.Woods igazolta az analóg állítást abban az esetben, amikor a mérce függvény egységgömbje ugyan korlátos de nem feltétlenül centrálisan szimmetrikus vagy konvex. P.M.Gruber kiterjesztette ezt az eredményt csillagszerű (nem feltétlenül korlátos) mérce függvények esetére is. P.M. Gruber egy másik módon is általánosította Woods tételét, megmutatta (lsd. Satz.5, [42]), hogy egy korlátos mérce függvény akkor is Euklidészi normát ad, ha van egy olyan T részhalmaza az $(n - 1)$ -dimenziós egységgömb felszínének, amely relatív belseje nem üres és rendelkezik a következő tulajdonsággal: Tetszőleges $\{0, x\}$ pontpár esetén, ahol $x \in T$ az $L(0, x)$ Leibniz féltér konvex. A Leibniz félterek konvexitásából azonnal következik, hogy a biszektorok hipersíkok. Eképpen Mann tételéből következik M.M.Day állítása ([30]): *Ha egy Minkowski normára nézve tetszőleges biszektor hipersík, akkor a tér egységgömbje ellipszoid.* P.M.Gruber veszi észre (lsd. [43] Satz.3), hogy ha K_1, K_2 konvex testek E^d -ben ($d \geq 3$) és tetszőleges olyan K'_2 eltoltjára K_2 -nek, melyre $K'_2 \neq K_1$, a $\text{bd}K'_2 \cap \text{bd}K_1$ halmazok hipersíkbeliek, akkor K_1 ellipszoid. P.R.Goodey igazolja azt az erősebb állítást, hogy a mondott feltétel mellett K_2 a K_1 homotetikus példánya ([40],[41]).

A [57]-ben H.Mann igazolja, hogy ha tetszőleges rács esetén a rácpontok Minkowski távolságra vonatkozó Dirichlet-Voronoi cellái konvexek Euklidészi értelemben, akkor a norma Euklidészi. P.M.Gruber ezt a tételt is kiterjeszti a csillagszerű egységgömbök esetére.

Előfordulhat, hogy egy zárt Dirichlet-Voronoi cella nem konvex míg a belseje konvex. Ezért a zárt és nyílt Dirichlet-Voronoi cellákat meg kell különböztetnünk egymástól. Ilyen esetben a cella "falai" maguk is n -dimenziósak. Ez a jelenség akkor léphet fel, ha a megfelelő biszektor tartalmazza a tér egy n -dimenziós darabját.

$H_x := \{y \in E^n | N_K(y) = N_K(y - x)\}$ jelölje a 0 és x pontok biszektorát, $H_{x,0}$ és $H_{x,x}$ pedig a 0 illetve x pontokat tartalmazó nyílt (szigorú egyenlőtlenséggel definiált) Leibniz féltereket. Jelölje $\text{cl}_K S$ az S halmaz lezártját a Minkowski normára nézve, nyilván $H_x = \text{cl}_K H_{x,0} \cap \text{cl}_K H_{x,x}$.

Három lemmában összegyűjtöttük (és bizonyítottuk) a Leibniz-félterek és a biszektorok topológiai és geometriai tulajdonságait. Az elsőben igazoljuk, hogy a biszektor egy zárt, összefüggő, x irányban konvex halmaz, a nyílt Leibniz félterek topológiai értelemben is nyílt összefüggő halmazok, melyeket a biszektoruk elválaszt. A másodikban igazoljuk, hogy az egységgömb határa pontosan akkor nem tartalmaz egy adott iránnyal párhuzamos szakaszt, ha az adott iránnyal párhuzamos valamennyi egyenes az adott irányhoz tartozó valamely biszektort pontosan egy pontban metszi. Egy fix x iránnyal párhuzamos egyenesek a biszektort szakaszban metszik, melyeket *maximális x -el párhuzamos* a biszektorhoz tartozó szakaszoknak hívunk. A harmadik lemmában igazoljuk, hogy ha valamely maximális szakasz egyik végpontja belső pontja az egyik zárt Leibniz féltérnek, akkor a biszektor nem lehet topológikus képe egy hipersíknak. Fontos eredmény a következő tétel:

4. Tétel ([1]). *Ha a Minkowski tér K egységgömbje szigorúan konvex, akkor a biszektorok homeomorfak egy hipersíkkal.*

Az állítás általában nem megfordítható, lehet úgy is homeomorf egy biszektor egy hipersíkkal, hogy centrál-szimmetrikusan elhelyezkedő szakaszpárt találunk az egységgömb felszínén. A nehézségeket a cikkben három példával jelenítjük meg, melyek közül a harmadik tartalmazza az említett érdekességet (Example 3). A cikk második tétele a példa tapasztalatait foglalja állításba:

5. Tétel ([1]). Legyen $n \geq 3$. Ha minden biszektor topológikus hipersík, akkor K felületén nincs $(n-1)$ -dimenziós henger. Továbbá ha valamely x -re H_x topológikus hipersík és C egy maximális henger x -el párhuzamos alkotókkal a K felületén, akkor C dimenziója legfeljebb $n-2$.

A cikkben Minkowski normával definiált Dirichlet-Voronoi cellákkal is foglalkozunk. Bevezetjük a *normális felbontás* fogalmát és igazoljuk, a következő tételt:

6. Tétel ([1]). Egy L rács Dirichlet-Voronoi cellarendszere akkor és csak akkor adja az Euklidészi tér normális felbontását, ha valamennyi biszektor topológikus hipersík. Speciálisan ha a norma egységgömbje szigorúan konvex akkor tetszőleges rácsszerű Dirichlet-Voronoi felbontás a tér normális felbontása.

A biszektorok topológikus leírása nem valósulhat meg az egységgömb részletesebb vizsgálata nélkül. Ezen vizsgálat alapvető eszköze és tárgya az egységgömb felszínének speciális részhalmaza az *árnyékhatár*. Valamely adott irányhoz tartozó árnyékhatár tartalmazza a test azon határpontjait, amelyekben valamely az iránnyal párhuzamos egyenes a test határát érintheti. Világos, hogy az árnyékhatár a K felszínét három diszjunkt halmazra bontja. Ezek az árnyékhatár maga és a gömbfelszín következő két darabja: $K^+ := \{y \in \text{bd}K \mid \exists \tau > 0, y - \tau \cdot x \in \text{int}(K)\}$ illetve $K^- := \{y \in \text{bd}K \mid \exists \tau > 0, y + \tau \cdot x \in \text{int}(K)\}$. Ezen halmazok a *pozitív* illetve *negatív* részei a gömbfelszínnek. Fő sejtésünk a következő

1. Sejtés ([2]). A biszektorok pontosan akkor $(n-1)$ -dimenziós topológikus hipersíkok, amikor a megfelelő árnyékhatárok $(n-2)$ -dimenziós topológikus szférák (gömbök).

A [2] cikkben ezt a sejtést az $n = 3$ esetben bizonyítjuk. Ezen eset bizonyításában alapvető szerepe van az *általános paraméter szféra* fogalmának. A korábbi jelölések mellett $S(K, x)$ jelöli az x irányú árnyékhatárt, $\gamma_\lambda(K, x)$ a $0, x$ pontokhoz és λ paraméterhez tartozó általános paraméter szféra:

1. Definíció ([2]). Legyen K a Minkowski egységgömb, x egy fix pont a térben. Legyen $\lambda_0 := \inf\{0 < t \in \mathbb{R} \mid tK \cap (tK + x) \neq \emptyset\}$ a legkisebb olyan t érték, amire tK és $tK + x$ metszik egymást. Ekkor az x irányhoz és a $\lambda \geq \lambda_0$ paraméterhez tartozó általános paraméter szféra a $\gamma_\lambda(K, x) := \frac{1}{\lambda}[\text{bd}(\lambda K) \cap \text{bd}(\lambda K + x)] \subset \text{bd}K$ halmaz.

Az árnyékhatár topológiai szempontból igen "csúnya" lehet, a cikkben példát adunk olyan árnyékhatárra, amelyik pontjainak nincs nyílt intervallummal homeomorf környezete. (Speciálisan ebben az esetben az árnyékhatár nem topológikus kör.) A pozitív rész paraméterezéséhez tartozó általános paraméter szférák szintén nem rendelkeznek szép topológiai tulajdonságokkal. Nem topológikus szférák, általában egymással sem homeomorfak, még a dimenziójuknak sem kell megegyezni különböző paraméterértékek esetén. Az árnyékhatár és a megfelelő általános paraméter szférák topológiai összehasonlítása után adódik, hogy az általános paraméter szférák természetes paraméterezését adják a $K^+ \setminus \gamma_{\lambda_0}(K, x)$ halmaznak. Persze előfordulhat, hogy az említett $K^+ \setminus \gamma_{\lambda_0}(K, x)$ halmaz az üres halmaz, ilyen eset a kocka esete amikor az x irány egy hiperlap centrumába mutat. Lényeges esetekben – például a szigorúan konvex esetben – azonban ez a paraméterezés jól működik, ilyenkor a K^+ felszínén csak egy szinguláris pont van az $x/\|x\|$ pont.

A Hausdorff metrika kapcsolatot teremt az árnyékhatár és az általános paraméter szférák között.

7. Tétel ([2]). A $\gamma_\lambda(K, x)$ általános paraméter szférák λ tart végtelen esetén, Hausdorff metrikában, az $S(K, x)$ árnyékhatárhoz tartanak.

A cikk további állításai az $n = 3$ esetre vonatkoznak. Ennek fő oka az, hogy a két-dimenziós geometriai topológiának van egy egyedi karakterizációs tétele, a Schoenflies-Swingle tétel, mely magasabb dimenziók esetén nem igaz. A továbbiakban egy ponthalmazt a háromdimenziós Euklidészi térben *topológikus síknak* nevezünk, ha van a térnek olyan önmagára

való homeomorf leképezése, mely az adott halmazt egy Euklidészi síkra képezi. Egy a pont egy B halmazból *ívvel elérhető* ha tetszőleges $b \in B$ ponthoz létezik egy T ív a és b végpontokkal úgy, hogy $T \setminus a \subset B$. Ha A egy olyan ponthalmaz, aminek tetszőleges pontja B -ből ívvel elérhető, akkor azt mondjuk, hogy A *ívvel elérhető B -ből* (ld. [73]). A Schoenflies-Swingle (ld. [68], [70]) tétel szerint *valamely $M \subset S^2$ halmaza a topológikus 2-szférának pontosan akkor 1-szféra, ha M közös határa két diszjunkt $D_1 \subset S^2$ illetve $D_2 \subset S^2$ tartománynak, melyekből M ívszerűen elérhető*. Használva ezt a tételt bizonyítjuk, hogy:

8. Tétel ([2]). *Ha a H_x biszektor topológikus sík, akkor a $\gamma_\lambda(K, x)$ ($\lambda > \lambda_0$) illetve $S(K, x)$ halmazok topológikus körök. A $\lambda = \lambda_0$ esetben az általános paraméter szféra lehet pont, szakasz, vagy konvex síkbeli 2-dimenziós halmaz.*

Az ellentétes irányhoz, először igazoltuk, hogy ha az árnyékhátár az x irányban topológikus kör, akkor az x irányú általánosított paraméter körök is topológikus körök, majd igazoltuk a fenti tétel megfordítását. Összegezve kaptuk a sejtés $n = 3$ esetére vonatkozó tételt:

9. Tétel ([2]). *A H_x biszektorok pontosan akkor topológikus síkok, amikor az x irányú $S(K, x)$ árnyékhatárok topológikus körök.*

A [3] cikkben a magasabb dimenziós eset vizsgálatát tűztük ki célul. A dimenzió növelésével az előzőekben szereplő alakzatoknak nemcsak a topológikus bonyolultsága növekszik, a beágyazás problémája is extra nehézséget okozhat. A sejtés vizsgálatában további eredményt csak mélyebb algebrai és geometriai topológiai eredmények alkalmazásával lehetett remélni. Az általános paraméter szférák vizsgálata mutatja, hogy ezek általában nem topológikus sokaságok sőt az is előfordulhat, hogy nem abszolút környezet retraktumok (u.n. ANR-ek). Vizsgálatainkat ezért a sokaságok esetére szorítottuk meg. A bizonyításokban nem kerülhettük el cellaszerű-approximáció tételét (ld. pld.[64]). Egy nem üres $K \subset M$ kompakt halmaza az M ANR térnek *cellaszerű*, ha tetszőleges U M -beli környezetében találunk olyan V környezetet, amire $K \subset V \subset U$ teljesül és az $i : V \hookrightarrow U$ beágyazás nullhomotóp. Egy (folytonos) *leképezés cellaszerű* ha tetszőleges pont teljes inverz képe cellaszerű halmaz. A cellaszerű approximáció tétel szerint az $n \neq 3$ -dimenziós topológikus sokaságok közötti cellaszerű leképezések majdnem-homeomorfizmusok. A tétel következménye, hogy azonos dimenziós kompakt sokaságok homeomorfak, ha megadható közöttük cellaszerű leképezés. Az $n = 3$ esetben a tétel ilyen általánosságban nem igaz de teljesül a cellaszerű leképezések egy részhalmazára a *celluláris leképezésekre*. A két fogalom közötti erőviszonyt az határozza meg, hogy míg a cellaszerűség független a beágyazástól, a cellularitás függ tőle. Ugyanakkor minden celluláris halmaz cellaszerű így a 3-dimenziós tétel a leképezések szűkebb köréről állítja, hogy majdnem homeomorfizmus. Ez minket annyiban érint, hogy ha nem akarjuk kizárni valamely dimenziót, akkor néha cellularitást kell bizonyítani cellaszerűség helyett.

Az árnyékhátár három diszjunkt halmazra bontja a K felszínét az $S(K, x)$, K^+ és K^- halmazokra. Igazoljuk, hogy $S(K, x)$ egy legalább $(n - 2)$ -dimenziós, zárt (azaz kompakt) halmaza $\text{bd}(K)$ -nak, ami $n \geq 3$ esetén összefüggő, a K^+ illetve K^- halmazok homeomorfak $R^{(n-1)}$ -el, és uniójuk két ívszerűen összefüggő komponensét alkotják. Tételeink rendre a következők:

10. Tétel ([3]). *Ha $S(K, x)$ $(n - 2)$ -dimenziós topológikus sokaság akkor az $S^{(n-2)}$ $(n - 2)$ -szférával homeomorf. Ha $(n - 1)$ -dimenziós határral rendelkező sokaság akkor homeomorf az $S^{(n-2)} \times [0, 1]$ hengerrel.*

11. Tétel ([3]). *Az $S(K, x)$ árnyékhátár $(n - 2)$ -dimenziós sokaság ha a $\gamma_\lambda(K, x)$ általános paraméter szférák $\lambda > \lambda_0$ esetén azok, fordítva ha $S(K, x)$ egy $(n - 2)$ -dimenziós sokaság akkor az általános paraméter szférák ANR-k. Teljesül továbbá, hogy $S(K, x)$ egy határral rendelkező $(n - 1)$ -dimenziós sokaság akkor és csak akkor ha egy elegendően nagy λ értéktől kezdve $\gamma_\lambda(K, x)$ $(n - 1)$ -dimenziós határral rendelkező sokaság.*

A bizonyítás használja M. Brown következő tételét is (lsd. [27]): *Legyen (X_n) kompakt metrikus terek egy inverz sorozata az X_∞ határértékkel. Ha minden határleképezés $X_k \rightarrow X_n$ majdnem homeomorfizmus, akkor a határprojekció $X_k \rightarrow X_\infty$ szintén az.* Szép kapcsolatot találtunk a biszektorok és az általános paraméter szférák között:

12. Tétel ([3]). *A H_x biszektor pontosan akkor $(n-1)$ -dimenziós sokaság amikor a $\gamma_\lambda(K, x)$ általános paraméter szférák $(n-2)$ -dimenziós sokaságok.*

A fenti tételekből a sejtés egyik iránya következik: *ha H_x topológikus hipersík akkor minden nem-degenerált általános paraméter szféra homeomorf $S^{(n-2)}$ -vel és ezért az árnyékhatár is homeomorf $S^{(n-2)}$ -vel.*

A fordított állítás bizonyításának gondolatmenete megakad, mivel a mondott feltételekből nem tudtuk bizonyítani a sokaság tulajdonságot az általános paraméter szférákra. További problémát jelenthet a befejezéshez, hogy a fenti gondolatmenetből csak az következik, hogy a biszektor az $R^{(n-1)}$ térrel homeomorf, ami logikailag gyengébb, mint a várt "topológikus hipersík" tulajdonság. Utolsó tételünkben igazoljuk, hogy ez nem így van:

13. Tétel ([3]). *A sokaság esetben a H_x , $S(K, x)$ és $\gamma_\lambda(K, x)$ halmazok beágyazása standard. Azaz ha a biszektor homeomorf $R^{(n-1)}$ -el, akkor topológikus hipersík.*

A biszektorok vizsgálatát a Horst Martini-vel közös dolgozat ([4]) zárja, kapcsolódva a [61] cikk eredményeihez. A biszektor az előzőektől eltérő módon a $\pm x \in \text{bd}K$ pontoktól egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok halmazát jelenti (így a jelölése most $B(-x, x)$), míg az egységgömb centruma az origó. Bevezetjük a *biszektor korlátos reprezentációjának* a fogalmát, mely szerencsés kapcsolatot ad az árnyékhatár, a biszektor radiális vetülete és biszektor fogalmak között. A fogalom bevezetése előtt kibővítjük az n -dimenziós Euklidészi teret az adott irányú félegyeneseek ekvivalencia osztályaihoz tartozó végtelen távoli elemekkel, majd ezen végtelen távoli pontok közül kiválasztjuk azokat, amelyeket a biszektorhoz tartozó pontoknak tekintünk. Az eredeti biszektor pontokat *rendes pontoknak* nevezzük, míg az új pontokat *képzetes pontoknak*. Legyen $z \in B(-x, x)$. Ha z közösleges akkor van egy egyértelműen létező $1 \leq t_z < \infty$ érték úgy, hogy $z \in (t_z S + x) \cap (t_z S - x)$. Defináljuk közösleges z -kre a $\Phi : B(-x, x) \rightarrow K$ leképezést a $\Phi(z) = \frac{1}{t_z}z$ egyenlőséggel, míg ideális pontokra legyen Φ a radiális vetítés leképezés. A kiterjesztett Φ leképezés képhalmaza a *biszektor korlátos reprezentációja*.

1. Állítás ([4]). *A biszektor korlátos reprezentációja a K árnyékhatárát és a K x -el párhuzamos húrjainak a felezőpontjait tartalmazó halmaz.*

A fő eredmény azonban azt mutatja, hogy ellentétben a biszektor radiális vetületével a korlátos reprezentáció hűen őrzi a biszektor topológiai tulajdonságait.

14. Tétel ([4]). *Ha a kiterjesztett biszektor $(n-1)$ -dimenziós határral rendelkező sokaság, akkor a korlátos reprezentációja homeomorf az $(n-1)$ -dimenziós zárt gömbbel. Fordítva, ha a korlátos reprezentáció egy topológikus $(n-1)$ -dimenziós zárt gömb, akkor a biszektor is, és a relative belseje (a közösleges pontjai halmaza) egy topológikus hipersík.*

A disszertáció második fejezetének második szakasza a [5] cikk eredményeit mutatja be. Stampfli (lsd [69]) vezeti be az Abel-féle adjungált fogalmát egy félskaláris szorzattal¹ rendelkező térre vonatkozóan, egy korlátos lineáris A operátort akkor nevezzük Abel-féle adjungált operátornak ha van egy olyan φ dualitás leképezés, amire $A^*\varphi = \varphi A$. Azaz, A Abel-féle adjungált operátor ha $A = A^T$, azaz bizonyos értelemben az A operátor önadjungált. Lángi Zsolt (lsd. [55]) vezeti be a fél-skalárszoratra vonatkozó *Lipschitz tulajdonság* fogalmát, és vizsgálja meg az ilyen tulajdonságú diagonalizálható operátorait a Minkowski geometriáknak (melyek most félskaláris szorzattal rendelkező valós végesdimenziós

¹A definíciót lsd. a következő szakaszban.

vektorterek). Fő eredményének egy következménye, hogy egy teljesen nem-Euklidészi n -dimenziós Minkowski geometria diagonalizálható Abel-féle adjungáltjai izometriák skalárszorosai. Ezen vizsgálatok folytatásaként feltérképezzük az Abel-féle adjungált operátorok szerkezetét majd igazoljuk, hogy egy l_p tér minden ilyen operátora diagonalizálható. Izometriákkal kapcsolatosan igazolunk két tételt. Az elsőben leírjuk az izometriák szerkezetét majd az izometria csoport szerkezetéről igazoljuk a következőt:

15. Tétel. *Ha a $(V, \|\cdot\|)$ 3-dimenziós tér egységömbjét 2-dimenziós sík nem metszi ellipszisben, akkor az izometria csoport fél-direkt szorzata az eltolás részcsoportnak és a speciális ortogonális transzformációk egy véges rendű részcsoportjának.*

A fejezet harmadik szakasza két társszerzős cikk eredményeit sorolja fel (bizonyítások nélkül). A [6] cikk a Minkowski geometriák kúpszeleteiről szól ez Horst Martini-vel közös munka. A [7] cikk társszerzői Vitor Balestro és Horst Martini. Ebben az elforgatás új koncepciójának bevezetése után rulettákkal foglalkozunk, melyek definíciójának alkalmasságát a szokásos tételek (pld. Euler-Savary tételek) érvényessége bizonyítja.

Matematikai eszközök a bizonyításokban. A [1] cikk alapvető lineáris algebra, algebrai topológiából, konvex geometriai ismeretekre épít, ezek megtalálhatók az [21] irodalomban. A [2] cikkben a fentiekén túl felhasználunk olyan klasszikus geometriai topológiai ismereteket, melyek megtalálhatók a [73], [68], [70] munkákban. A [3] és [4] cikkek ezeken túl további eredményeket használnak a geometriai topológiából. Jellemzően használható referenciák itt [64], [31], [26], [27]. A [5] cikkben lineáris algebrai eszközöket használunk klasszikus konvex geometriai eredményekkel kombinálva. A [6], [7] cikkek eredményei szintetikus geometriai okfejtések mellett, klasszikus differenciálgeometriai ismeretekre és mozgásgeometriai alapokra épülnek.

3. ÁLTALÁNOSÍTOTT MINKOWSKI TÉR

A "Minkowski tér" elnevezés napjainkban két különböző struktúrát jelent, az előző fejezetben vizsgált véges dimenziós szeparábilis Banach tér mellett, így hívják az indefinit skaláris szorzattal ellátott tereket is. Ezen utóbbi jelentősége a relativitás-elmélet matematikai megalapozása során vált nyilvánvalóvá (lsd. [63]). Az, hogy a két különbözőnek tűnő struktúra hasonló matematikai alapokon nyugszik, az 1960-as évektől vált láthatóvá, mikor is bevezették a *fél-skaláriszorzat* fogalmát olyan normált terekre vonatkozó számítások kedvéért, melyek hagyományos skaláriszorzattal (belső szorzattal) nem rendelkeznek (lsd. [56]). Észrevételünk, az a tény, hogy a két elmélet tekinthető egységes keretrendszeren belül. Bevezettünk új struktúrákat a *fél-indefinit skalárszorzos* teret, és az *általánosított Minkowski teret*, majd vizsgáltuk ezen utóbbi legfontosabb speciális esetét az *általánosított téridő modellt* (lsd. [8], [9]) illetve ennek általánosításait. Az általánosított téridő modell célirányos tovább gondolása vezetett el az *idő-tér* fogalmához, mely determinisztikus és véletlen módon is vizsgálható (lsd. [10], [11], [15]).

A skaláris szorzat helyett gyengébb szorzat fogalmat használva Euklidészi tereknél általánosabb terekhez jutunk. G. Lumer [56] vezeti be a fél-skaláriszorzat fogalmát. Egy V komplex vektortéren értelmezett $[x, y] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ komplex függvényt *fél-skalárszorzatnak* (röviden s.i.p.) nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal: [s1]: $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$, [s2]: $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$, [s3]: $[x, x] > 0$ ha $x \neq 0$, [s4]: $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$. Ha a V vektortéren értelmezett egy s.i.p. akkor a $(V, [\cdot, \cdot])$ párt fél-skalárszorzos térnek nevezzük.

Ha tekintjük az $\|x\| = \sqrt{[x, x]}$ definícióval adott függvényt, akkor a vektortér ezzel normált térré válik. Fordítva, minden normált tér tekinthető fél-skaláriszorzos térnek. J. R. Giles veszi észre (lsd. [38]), hogy mindig lehet a s.i.p.-t úgy választani, hogy teljesüljön a második argumentum homogenitása is azaz fennálljon az [s5]: $[x, \lambda y] = \lambda[x, y]$ $\lambda \in \mathbb{C}$ is. Szintén Giles vezeti be a *folytonos s.i.p* fogalmát az [s6] tulajdonsággal: Tetszőleges

$x, y \in S$, egységvektor esetén, valós $\lambda \rightarrow 0$ mellett teljesüljön $\Re\{[y, x + \lambda y]\} \rightarrow \Re\{[y, x]\}$. A teret *egyenletesen folytonosnak* nevezi, ha ezen határátmenet az egységgömbön egyenletesen fennáll. Egy normált tér esetén többféle differenciálhatósági tulajdonsággal is rendelkezünk. Felmerül a kérdés ezeknek mi a kapcsolata a most bevezetett fogalmakkal.

A fenti gondolatmenet folytatásaként a [7] cikkben definiáltuk a s.i.p. tér differenciálhatóságát. A *differenciálható s.i.p. tér* egy olyan folytonos s.i.p. tér, amelyben a következő feltétel is teljesül: [s6']: Tetszőleges három x, y, z vektor és valós λ esetén, létezen a $[x, \cdot]_z'(y) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda}$ határérték. Azt mondjuk, hogy a tér *folytonosan differenciálható*, ha a fenti határátmenet mint y függvénye folytonos. Ezután kimondjuk, majd [7]-ban igazoljuk a s.i.p és a norma differenciálhatóságára vonatkozó feltételeket összekapcsoló tételt:

16. Tétel ([7]). *Egy s.i.p. tér akkor és csak akkor (folytonosan) differenciálható, ha a norma függvény kétszer (folytonosan) differenciálható Gâteaux értelemben.*

Minkowski veszi észre, hogy a világ jelenségeinek vizsgálatára is alkalmas, az időt negyedik dimenzióként tartalmazó beágyazó négydimenziós Euklidészi tér, ha pontjainak a távolságait alkalmas módon mérjük. Ezzel elindítja a pseudo-Euklidészi terek vizsgálatát, mely nem más mint egy valós vagy komplex véges-dimenziós vektortér ellátva egy nem feltétlenül pozitív definit belső szorzással (lsd. [39]): Egy V komplex vektortér *indefinit-skalárszorzata* (i.i.p.) egy olyan komplex $[x, y] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, amely a következő tulajdonságokat teljesíti: [i1]: $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$, [i2]: $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$, [i3]: $[x, y] = \overline{[y, x]}$ minden $x, y \in V$, [i4]: $[x, y] = 0$ minden $y \in V$ then $x = 0$. Egy V vektortér egy i.i.p.-vel ellátva egy úgynevezett *i.i.p. tér*. Láthatóan [i1]=[s1], [i2]=[s2]. Igazolható, hogy [s1], [s2], [s3], [s5] együttes fennállása maga után vonja a szorzat nem-elfajuló voltát, és minden nem-negatív (illetve nem-pozitív) altéren teljesül a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség. A [8] cikk a két axiómarendszer ötvözésével kapott térfogalmat vizsgálja:

2. Definíció ([7]). *Egy komplex V vektortér fél-indefinit skalárszorzatának (s.i.i.p.-nek) nevezünk egy $[x, y] : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ komplex függvényt, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- 1: $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ (additivitás az első változóban),
- 2: $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ (homogenitás az első argumentumban),
- 3: $[x, \lambda y] = \overline{\lambda}[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ (homogenitás a második argumentumban),
- 4: $[x, x] \in \mathbb{R}$ minden $x \in V$ (valós értékűség tulajdonsága),
- 5: ha vagy $[x, y] = 0$ teljesül, minden $y \in V$ vagy $[y, x] = 0$ teljesül, minden $y \in V$, akkor $x = 0$ (nem-elfajulás tulajdonsága),
- 6: $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$ nem-negatív, és nem pozitív alterekhez tartozó x, y vektorpárra, (a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség teljesüljön nem-pozitív és nem-negatív altereken).

Egy V vektorteret, ellátva egy s.i.i.p.-vel, fél-indefinit skalárszorzatot térnek (s.i.i.p. térnek) nevezünk.

A cikkben először illusztráljuk, hogy a s.i.i.p. tér fogalma nem csak triviális példákat tartalmaz. Vegyük észre, hogy egy s.i.i.p. tér pontosan akkor homogén s.i.p. ha pozitív definit az s.i.i.p. Egy s.i.i.p. tér pontosan akkor i.i.p. tér, ha az s.i.i.p. antiszimmetrikus is. Az is világos, hogy minden – akár geometriai, akár fizikai – Minkowski tér reprezentálható s.i.i.p. térként. Majd tetszőleges V komplex normált térhez definiálni tudunk számos s.i.i.p.-t, melyek közül egy a normához tartozó valamelyik s.i.p.. Ez az általános szorzatfogalom is felhasználható egy téridő modell felépítéséhez. Első lépésben a két (geometria és fizikai) Minkowski tér alkalmas kombinálását elvégezve, megadjuk az általánosított Minkowski tér fogalmát, második lépésben ezt a fogalmat egyszerűsítve eljutunk az általánosított téridő modell fogalmához. Alap lemmánk szerint, ha $(S, [\cdot, \cdot]_S)$ illetve $(T, -[\cdot, \cdot]_T)$ két s.i.p. tér,

akkor az $S + T$ direktösszeg vektortéren az $[s_1 + t_1, s_2 + t_2]^- := [s_1, s_2] - [t_1, t_2]$ szabállyal értelmezett $[\cdot, \cdot]^- : (S + T) \times (S + T) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény szintén egy s.i.p.. Elképzelhető tehát, hogy egy V s.i.i.p. tér egy pozitív és egy negatív alterének direkt összegeként áll elő. Ekkor két természetes struktúrával ruházhatjuk fel az általános s.i.i.p. terünket, az egyik a fenti lemma szerint a direkt szorzat s.i.p. tér, a másikat pedig *általánosított Minkowski térnek* fogjuk nevezni.

Legyen tehát $(V, [\cdot, \cdot])$ egy s.i.i.p. tér. Tegyük fel, hogy $S, T \leq V$ pozitív illetve negatív alterek, melyek egymás direkt kiegészítő alterei V -re nézve, S pozitív, T negatív. Defináljunk egy szorzást V -n az $[u, v]^+ = [s_1 + t_1, s_2 + t_2]^+ = [s_1, s_2] + [t_1, t_2]$ egyenlőséggel, ahol $s_i \in S$ és $t_i \in T$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $(V, [\cdot, \cdot]^+)$ pár *általánosított Minkowski tér* a $[\cdot, \cdot]^+$ *Minkowski szorzással*. Szintén használjuk V -re a valós általánosított Minkowski tér elnevezést, ha V valós vektortér és a s.i.i.p. egy valós-értékű függvény. A definícióhoz fontos észrevétel, hogy a Minkowski szorzat fogalma nyilván teljesíti a s.i.i.p. **1-5** tulajdonságait, azonban **6** tipikusan nem teljesül rá. Azonban $\sqrt{[v, v]^+}$ egy norma függvény a V vektortéren, amit az általánosított Minkowski tér beágyazó normált tere normájának is nevezhetünk. A helyzet analóg a pseudo-Euklidészi tér és az őt beágyazó Euklidészi tér kapcsolatával.

A továbbiakban a cikk véges dimenziós, valós általánosított Minkowski tereket vizsgál. Legyen V egy általánosított Minkowski tér az S, T kiindulási pozitív illetve negatív alterei által meghatározva. Nevezzük egy vektorát *térszerűnek, fényszerűnek, vagy időszerűnek*, aszerint, hogy a skalárnégyzete pozitív, zérus vagy negatív. Legyen $\mathcal{S} \supset S, \mathcal{L}$ and $\mathcal{T} \supset T$ a térszerű, fényszerű illetve időszerű vektorok halmaza. Ha a tér véges dimenziós, valós és $\dim T = 1$, akkor a teret *általánosított téridő modellnek* nevezzük, ez a [8] cikk azon definíciója, amely összekapcsolja az eddigi tisztán matematikai vizsgálatokat a kozmológiai és relativitáselméleti vizsgálatokkal. az általánosított téridő modellben $\mathcal{T}$ két darabjának az uniója, azaz $\mathcal{T} = \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$, ahol $\mathcal{T}^+ = \{s + t \in \mathcal{T} \mid \text{ahol } \exists \lambda \geq 0, t = \lambda e_n\}$ és $\mathcal{T}^- = \{s + t \in \mathcal{T} \mid \text{ahol } \exists \lambda \leq 0, t = \lambda e_n\}$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}$ egy nyílt kettős kúp, melynek a határa éppen $\mathcal{L}$. A pozitív része $\mathcal{T}^+$ (ugyanúgy mint a negatív része $\mathcal{T}^-$) konvex. A cikk fő eredményei a képzetes egységgömb geometriájáról szólnak. A már említett analógia alapján a képzetes egységgömb a hiperbolikus tér általánosításának tekinthető, ha a beágyazó normált tér Euklidészi, akkor ez éppen a hiperbolikus tér.

17. Tétel ([8]). *Legyen V egy általánosított téridő modell, amely képzetes egységgömbje H , annak egyik darabja H^+ . Ha S folytonosan differenciálható s.i.p. tér, akkor (H^+, ds^2) egy Minkowski-Finsler tér. Ha azt is feltesszük, hogy S szigorúan konvex és sima, akkor a beágyazó s.i.p. tér $\{V, [\cdot, \cdot]^-\}$ szintén szigorúan konvex és sima. Jelölje F^T az F lineáris leképezés általánosított adjungáltját a $\{V, [\cdot, \cdot]^-\}$ tér fél-skalárisszorzatára nézve, és $J : V \rightarrow V$ definiálják az $J|_S = \text{id}|_S, J|_T = -\text{id}|_T$ egyenlőségek. Ekkor az $F|_H = f : H \rightarrow H$ leképezés egy lineáris izometria a felső darabon H^+ -on, akkor és csak akkor ha teljesül az $F^{-1} = JF^T J$ egyenlőség és e_n -t a H^+ egy pontjába viszi. A H^+ lineáris izometriái egyben topológikus izometriák is. Ha végül a H^+ lineáris izometriái tranzitívan hatnak H^+ -on, akkor a Minkowski-Finsler távolság $d(\cdot, \cdot)$ teljesíti az $[a, b]^+ = -ch(d(a, b))$ egyenlőséget.*

A cikk folytatása a [9] cikk, melyben az általánosított téridő modell legfontosabb hiperfelületeinek egységes szempontok szerinti differenciálgeometriai tárgyalását találjuk.

A [10] cikk témája látszólag eltér a többi kiemelt cikktől. A [11] cikkben vetődik fel az a kérdés, hogy lehetséges-e az adott dimenziós normák metrikus terén (vagy, ami ezzel egyenértékű az n -dimenziós centrálszimmetrikus konvex testek terén) olyan (nem triviális) mértéket megadni, mely egy rögzített mérhető függvényen előretolva normális eloszlásúnak látszik. Ez a probléma a geometriai mértékelmélet egyik fontos kérdéséhez kapcsolódik: *Van-e nem triviális "geometriai" mérték a konvex testek metrikus terén?* A [49] cikk

adott erre a kérdésre kielégítő választ. Megadja a "geometriai" jelzőt pontosító kitételeknek megfelelő lehetséges elvi konstrukciókat. Eljárását (részben) követve "geometriai" tulajdonságokkal rendelkező konkrét mértéket konstruálunk a normák terén:

18. Tétel ([10]). *A normák metrikus terén létezik olyan P valószínűségi mérték, melyre vonatkozólag a környezetek mértéke pozitív, a politópok halmaza nullmértékű és a sima testek halmazának a mértéke 1.*

A cikkben bevezetjük a konvex halmazok *soványságának* fogalmát. Ha $w(K)$ jelöli a K konvex halmaz szélességét és $d(K)$ az átmérőjét, akkor a test soványságát az $\alpha_0(K) = \frac{d(K)}{w(K)+d(K)}$ mennyiséggel definiáljuk. A definíció nem önkényes a soványság a Hausdorff távolsággal kompatibilis jellemzője a testnek. Ha B_E az Euklidészi tér egységgömbje, akkor metrikus terünk ekörül megrajzolt egységgömbje $\mathcal{K}_0^1 := \{K \in \mathcal{K}_0 \mid \delta^h(K, B_E) = 1\}$. Lényeges szerepe van a következő lemmának.

1. Lemma ([8]). *Ha $K \in \mathcal{K}_0^1$ és $\alpha_0 := \alpha_0(K)$ a soványság függvénye K -nak, akkor teljesül, hogy*

$$\delta^h(\alpha K, B_E) = \begin{cases} 2\alpha - 1 & \text{ha } \alpha_0 \leq \alpha \\ 2\alpha + 1 - 2\frac{\alpha}{\alpha_0} & \text{ha } 0 \leq \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Az általunk konstruált geometriai mértékek $\alpha_0(K)$ szerinti előretoltjára fennáll, hogy az $[\frac{1}{2}, 1)$ intervallum csonkolt normális eloszlásával rendelkezik. A cikk lényegi része ezen utóbbi állítás igazolását tartalmazza. Maga a cikk pedig a [11] cikk egyik konstrukcióját helyezi realizálható környezetbe.

A [8] cikk elméleti alapjaira kozmológiai modelleket lehet alkotni. A [11] cikkben két típust a *determinisztikus időtér modellt* és a *véletlen időtér modellt* definiáljuk. Feltételezzük valamilyen abszolút idő jelenlétét, mely ugyanúgy az érzékelési körünkön kívülre esik, mint az abszolút térkoordinátákat adó tengelyek a Minkowski téridőben. Ezen időtől függ a tér szerkezetének változása, mely függést tekinthetjük előre meghatározottnak vagy bizonyos egyszerű feltételeket teljesítő véletlen változásnak is. A tér szerkezetére tett megkorlátozásunk az, hogy minden konkrét időpillanatban legyen leírható egy alkalmas n -dimenziós normált térrel. Ennek az egységgömbjét elég ismerni. A tér időszerinti változását az egységgömb változása írja le. Ennek a modellnek van időfejlődése és ez nyomon is követhető. Ezáltal speciálisabb a semi-Riemann sokaságnál, de általánosabb a szokásos téridő modellnél. Az Einstein egyenlet ismert megoldásainak a zöme modellezhető a mi rendszerünkön belül erről szól a [15] cikk, melynek a tartalma a disszertációnk függelékébe került.

A tér változását követő függvény a $K(\tau)$ függvény mely a τ időpillanathoz a megfelelő normált tér egységgömbjét rendeli. A $K(\tau)$ függvényre adott feltételeink: $K(\tau)$ centrálisan szimmetrikus, konvex, kompakt, C^2 test adott térfogattal; tetszőleges s', s'' pontpárra a $K : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{K}_0, \tau \mapsto K(\tau)$ és a $[s', s'']^\tau : \tau \mapsto [s', s'']^\tau$ függvények folytonosan differenciálhatók. Egy általánosított tér-idő modell ellátva egy ilyen $K(\tau)$ függvénnyel a *determinisztikus időtér modell*.

Geometriai számolások elvégzése ezen modellben csak akkor lehetséges, ha a fél-skaláriszorzatokra vonatkozó formulákat kiterjesztjük az idő szerint változó fél-skaláriszorzatokra vonatkozó formulákká. Ez nem kevés mennyiségű technikai jellegű számítást jelent melyek eredményeit lemmákban és tételekben gyűjtöttük össze.

A determinisztikus időtér modell párjaként definiáltuk a véletlen időtér modelljét. Eszközünk Kolmogorov kiterjesztési tétele [54]), mely leírja, hogyan lehet valószínűségi terekből kontinuum számosságú szorzat teret létrehozni. E szerint konzisztens gyűjteménye végesdimenziós eloszlásoknak definiál a szorzat téren egy valószínűségi mértéket. Az esemény terünk a centrálszimmetrikus konvex kompakt testek $\mathcal{K}_0$ tere a Hausdorff metrikával. Ez lokálisan kompakt, szeparábilis metrikus tér. A Blaschke féle kiválasztási tétel szerint ([46]) $\mathcal{K}$ feltételesen kompakt, tehát teljes tér. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathcal{K}_0$ is teljes metrikus tér, ha feltesszük, hogy az üres belsővel rendelkező (nem teljes dimenziós) halmazok is

hozzá tartoznak. (Egy ilyen testet mi egy kisebb dimenziós normált tér egységsgömbjének tekintünk.) Legyen P egy olyan valószínűségi mérték, amelyet a [8] cikkben definiáltunk. A (K_0, P) valószínűségi tér példányai a Kolmogorov kiterjesztéssel elláthatók egy $\hat{P}$ mértékkel, mely a T -ből K_0 -ba menő leképezések cylinder halmazai által generált σ -algebrán értelmezett. A $\hat{P}$ eloszlásának a projekciója minden fix időpontban éppen a P eloszlása.

3. Definíció ([9]). Legyen $(K_\tau, \tau \geq 0)$ a (K_0, P) tér Kolmogorov kiterjesztéseként előálló $(\Pi K_0, \hat{P})$ valószínűségi tér egy véletlen függvénye. Véletlen időtér modellnek nevezzük egy általánosított téridő modellből és a $\hat{K}_\tau := \sqrt[n]{\frac{\text{vol}(B_E)}{\text{vol}(K_\tau)}} K_\tau$ véletlen függvényből álló párt. Mivel $\alpha_0(K_\tau)$ P definíciója szerint csonkolt normális eloszlású véletlen változó ($\alpha_0(K_\tau)$, $\tau \geq 0$) egy stacionárius Gauss folyamat. Ezt nevezzük a véletlen téridő modell alak folyamatának.

A definícióból azonnal következik, hogy a determinisztikus időtér modellek trajektóriái a véletlen időtér modellnek.

19. Tétel ([9]). A véletlen időtér modell tetszőleges $L(\tau)$ trajektóriájához, egy adott pilanatokból álló $0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_s$ véges halmazhoz és egy adott $\varepsilon > 0$ számhoz, megadható egy $K(\tau)$ alak függvényhez tartozó determinisztikus időtér modell úgy, hogy teljesül az $\sup_i \{\rho_H(L(\tau_i), K(\tau_i))\} \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Ahhoz, hogy a relativitás elmélet fogalmait definiálni lehessen, nem elegendő az egységsgömb alakjának változását követni, inercia rendszereket kell definiálni és ezek mozgásairól kell beszélni. Ehhez a különböző időpillanatokban szereplő térbeli pontok megfeleltetésére van szükség. Fordított gondolkozás kell, az egységsgömb pontjainak változását kell egy fix (abszolút) vonatkoztatási rendszerre nézve rögzíteni, ez határozza meg az egységsgömb alakjának a változását. Az alak függvényt egy homotópiaként definiáljuk, mely speciális differenciálhatósági tulajdonságokkal is rendelkezik. Ezután definiálhatóak a szükséges fizikai objektumok és lehet beszélni a speciális illetve általános relativitás elméletéről a determinisztikus időtér modell keretein belül (lsd. az Appendix-et vagy a [15] munkát).

A harmadik fejezet cikkeinek matematikai módszerei. A [8] cikkekben használjuk a funkcionálanalízis alapvető és a fél-skaláriszorzat fogalmához kapcsolódó eredményeit (lsd. [24], [52], [51], [72]), valamint az indefinit skaláriszorzatos terek tulajdonságait (lsd. [39]) és a Riemann (Finsler) geometriák távolság fogalmáról és izometriáiról szóló eredményeket (lsd. [22], [71], [32]). A [9] cikk a klasszikus differenciálgeometria eszköztárával operál. A [10] cikk a geometriai mértékelmélet alapismeretei közül használja a Borel, Dirac, Haar és Lebesgue mértékek fogalmát (lsd. [35], [47]). Emellett használunk alapvető eredményeket a valószínűség számításból (lsd. [54], [37], [48], [50]). A [11] cikkben olyan apparátust dolgozunk ki, melyhez vektorterekben értelmezett leképezések differenciálszámítását kell ismerni. Végül a [15] cikk a fentiekén túl alapvető ismereteket követel globális relativitáselméletéről, a kozmológiai modellekről és az Einstein egyenlet megtalált megoldásairól (lsd. [33]).

HIVATKOZÁSOK

A disszertáció cikkei:

- [1] On the bisectors of a Minkowski normed space. *Acta Math. Hung.* **89**(3) (2000), 417–424
- [2] Bisectors in Minkowski 3-space. *Beiträge zur Geometrie und Algebra* **45**/1, (2004) 225–238.
- [3] On the shadow boundary of a centrally symmetric convex body. *Beiträge zur Geometrie und Algebra* **50**/1 (2009) 219–233.
- [4] Bounded representation and radial projections of bisectors in normed spaces. (common with H.Martini) *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **43**/1 (2013) 179–191.
- [5] Isometries of Minkowski geometries. *Linear Algebra and Its Applications* **512**, (2017) 172–190
- [6] Conics in Normed Planes. (common with H.Martini) *Extracta Math.* **26**/1 (2011) 29–43.
- [7] Angle measures, general rotations, and roulettes in normed planes (common with V.Balestro and H.Martini) *Analysis and Mathematical Physics* DOI: 10.1007/s13324-016-0155-3 (2016).

- [8] Semi-indefinite inner product and generalized Minkowski spaces. *Journal of Geometry and Physics* **60** (2010) 1190-1208.
- [9] Premanifolds. *Note di Matematica* **31/2** (2011) 17–51.
- [10] Normally distributed probability measure on the metric space of norms. *Acta Mathematica Scientia* **33/5** (2013) 1231-1242.
- [11] Generalized Minkowski space with changing shape. *Aequationes Mathematicae* **87/3** (2014) 337-377
- [12] On the volume of the convex hull of two convex bodies (in common with Zs.Lángi) *Monatshefte für Mathematik* **174/2** (2014) 219-229.
- [13] On the icosahedron inequality of László Fejes-Tóth *Journal of Mathematical Inequalities* **10/2** (2016), 521–539.
- [14] Formulas on hyperbolic volume. *Aequationes Mathematicae* **83/1** (2012), 97-116.
- A tézisekben említett további cikkek a szerzőtől:**
- [15] G.Horváth, Á.:Relativity theory in time-space manifold. *Univ. J. of Physics and Appl.* **10/4**, (2016) 115–127.
- [16] Balestro, V., G.Horváth, Á., Martini, H., Teixeira, R.: Angle in normed spaces *Aequationes Mathematicae* (2016) Doi: 10.1007/s00010-016-0445-8
- [17] G.Horváth, Á., *Maximal convex hull of connecting simplices*, Stud. Univ. Žilina Math. Ser. **22** (2008), 7-19.
- [18] G.Horváth, Á., Lángi, Zs., Maximum volume polytopes inscribed in the unit sphere. *Monatshefte für Mathematik* **181/2**, (2016) 341-354.
- [19] G.Horváth, Á., Lángi, Zs., Spirova, M., Semi inner products and the concept of semi-polarity. *Results in Mathematics* DOI: 10.1007/s00025-015-0510-y (2015)
- A tézisekben említett más szerzők cikkei:**
- [20] Ahn H-K., Brass P., Shin C-S., *Maximum overlap and minimum convex hull of two convex polyhedra under translations*, Comput. Geom. **40** (2008), 171-177.
- [21] Alexandrov, P.S.: *Combinatorial topology*. Graylock Press Rochester, N.Y 1956.
- [22] Bao, D., Chern S. S., Shen Z.: *An Introduction to Riemannian-Finsler Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [23] J.D. Berman and K. Hanes, *Volumes of polyhedra inscribed in the unit sphere in E^3* , Math. Ann. **188** (1970), 78–84.
- [24] Birkhoff, G.: Orthogonality in linear metric spaces. *Duke Math. J.* **1** (1935), 169–172.
- [25] P. Brass, W. Moser and J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [26] Brown, M.: A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull.Amer. Math.Soc.* **66** (1960), 74–76.
- [27] Brown, M.: Some applications of an approximation theorem on inverse limits. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 478–483.
- [28] H.T. Croft, K.J. Falconer and R.K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Vol. 2, Springer, New York, 1991.
- [29] M.M.Day, *Normed linear spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [30] M.M.Day, Some characterization of inner-product spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947) 320–337.
- [31] Daverman, R.J.: *Decomposition of Manifolds*. Academic Press, New York, 1986.
- [32] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: *Modern Geometry- Methods and Applications, Part I. The geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Second Edition, Springer-Verlag, 1992.
- [33] Eddington, A.S. *The Mathematical Theory of Relativity* Cambridge University press, 1924.
- [34] Fáy, I. and Rédei, L., *Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern. (German)*, Math. Ann., **122** (1950), 205-220.
- [35] Federer, H.: *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag 1969.
- [36] L. Fejes-Tóth, *Regular Figures*, The Macmillan Company, New York, 1964.
- [37] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3rd ed. New York: Wiley, 1968.
- [38] Giles, J. R.: Classes of semi inner-product spaces. *Trans. Amer. Math.Soc.* **129/3** (1967), 436–446.
- [39] Gohberg, I., Lancaster, P., Rodman, L.: *Indefinite Linear Algebra and Applications*. Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 2005.
- [40] Goodey P.M., Woodcock, M.M.: *Intersections of convex bodies with their translates, The Geometric Vein ed. C.Davis, B.Grünbaum and F.A.Sherk* Springer-Verlag, 1982.
- [41] Goodey P.M.: Homothetic ellipsoids. *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.* **93** (1983) 25–34.
- [42] Gruber P.M.: Kennzeichnende Eigenschaften von euklidischen Räumen und Ellipsoiden. I. *J. reine angew. Math.* **256** (1974) 61–83.

- [43] Gruber P.M.: Kennzeichnende Eigenschaften von euklidischen Räumen und Ellipsoiden. II. *J. reine angew. Math.* **270** (1974) 123–142.
- [44] Gruber P.M.: Kennzeichnende Eigenschaften von euklidischen Räumen und Ellipsoiden. III. *Monatsh. Math.* **78** (1974) 311–340.
- [45] Gruber P.M., Lekkerkerker C.G.: *Geometry of numbers*. North-Holland Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1987.
- [46] Gruber P.M., Wills J.M. (Hrsg.) *Handbook of Convex Geometry*. Volume A,B, North Holland, Amsterdam 1993.
- [47] Halmos, P. R.: *Measure Theory*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
- [48] Hazewinkel, M. ed.: *Normal distribution*. Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001.
- [49] Hoffmann, L. M.: Measures on the space of convex bodies. *Adv. Geom.* **10** (2010), 477–486.
- [50] Klain D., Rota G-C.: *Introduction to Geometric Probability*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [51] Knopp, K.: *Theory of Functions, Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part I*. New York: Dover, 1996.
- [52] Koehler, D. O.: A note on some operator theory in certain semi inner-product spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **30(2)** (1971) 363–366.
- [53] Koehler, D., Rosenthal, P.: On isometries of normed linear spaces. *Studia Math.* **36** (1970), 215–218.
- [54] Kolmogorov, A.N. *Basic concepts of probability theory*. (in russian) Izdatelctvo "Nauka", 1974.
- [55] Lángi, Zs.: On diagonalizable operators in Minkowski spaces with the Lipschitz property. *Linear Algebra and its Applications* **433/11–12** (2010) 2161–2167.
- [56] Lumer, G.: Semi inner product spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **100** (1961), 29–43.
- [57] Mann, H.: Untersuchungen über Wabenzellen bei allgemeiner Minkowskischer Metrik. *Mh. Math. Phys.* **42**, (1935) 417–424.
- [58] Martini, H., Swanepoel, K. J., Weiss, G.: *The geometry of Minkowski spaces - a survey. Part I*. *Expositiones Mathematicae* **19** (2001), 97–142.
- [59] Martini, H., Swanepoel, K.: The geometry of Minkowski spaces - a survey. Part II. *Expositiones Mathematicae* **22(2)** (2004), 93–144.
- [60] Martini, H., Swanepoel, K.J.: Antinorms and radon curves. *Aequationes Math.* **71**, (2006) 110–138.
- [61] Martini, H., Wu, S.: Radial projections of bisectors in Minkowski spaces. *Extracta Mathematicae* **23(1)** (2008), 7–28.
- [62] E. J. McShane: Linear functionals on certain Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 402–408.
- [63] Minkowski, H.: *Raum und Zeit* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, 1909.
- [64] Mitchell, W.I.R., Repovs, D.: The topology of cell-like mappings. *Proceedings of the conference on Differential Geometry and Topology, Cala Gonone, 26–30 September 1988*. (1988) 265–300.
- [65] N. Mutoh, *The polyhedra of maximal volume inscribed in the unit sphere and of minimal volume circumscribed about the unit sphere*, JCDCG, Lecture Notes in Computer Science **2866** (2002), 204–214.
- [66] Rogers, C.A., Shephard G.C., *Some extremal problems for convex bodies*, *Mathematika* **5** (1958), 93–102.
- [67] Rudin, W.: *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Company 1973.
- [68] Schoenflies, A.: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, II*. Leipzig, Teubner 1908.
- [69] Stampfli, J. G.: Adjoint abelian operators on Banach space. *Canadian J. Math.* **21**, (1969), 505–512.
- [70] Swingle, P.M.: An unnecessary condition in two theorems of analysis situs. *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **34** (1928), 607–618.
- [71] Tamássy, L.: Finsler spaces corresponding to distance spaces. *Proc. of the Conf., Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, Serbia and Montenegro, June 26–July 2* (2005), 485–495.
- [72] Wilansky, A.: *Functional Analysis*. Blaisdell, New York, 1964.
- [73] Wilder, R.L.: *Topology of Manifolds*. Am. Math. Soc. Coll. Part V, XXXII, 1949.
- [74] Wu, S., Ji, D., Alonso, J.: Metric ellipses in Minkowski planes. *Extracta Math.* **20** (2005), 273–280.
- [75] Woods, A.C.: A characteristic property of ellipsoids. *Duke Math. J.* **36** (1969), 1–6.