

Válasz Nagy Péter Tibor opponensi véleményére

Először is köszönetemet szeretném kifejezni Nagy Péter Tibornak a dolgozatom gondos olvasásáért és eredményeim ismertetéséért. Elfogadom a következő kritikai megjegyzést:

Úgy tűnik, hogy a szerző nem tudta eldönteni, hogy értekezést írjon-e vagy összefoglaló bevezetővel ellátott cikkgyűjteményt adjon be.

Helyesen látja a szerző némi bizonytalanságát annak a tekintetében, hogy mit is kéne tartalmaznia a doktori értekezésének.

Köszönöm Nagy Péter Tibornak, hogy a fő eredményeket 6 pontban tézisszerűen kiemelte, sokat segítve azoknak, akik a vélemények ismeretében szeretnének a tartalmáról áttekintést nyerni.

Elfogadom a zsűfóltságra és az egyenetlen kidolgozásra utaló megjegyzéseket is, továbbá avval is egyet tudok érteni, hogy találhatók stílusában nem odaillő, akár hibásan megfogalmazott mondatok is a szövegben. Mentségemre legyen mondva, hogy próbáltam mindezeket elkerülni és egy olvasható disszertációt írni.

A konkrét észrevételekkel kapcsolatosan megjegyezném a következőket. Jogos az a kritika, hogy a *beágyazó tér* elnevezés, nem a szokásos matematikai értelmében szerepel. Azonban az általánosított Minkowski tér (általánosított tér-idő modell) vizsgálatát tipikusan a benne fellelhető felületek szokásossal megegyező illetve a szokásostól eltérő tulajdonságainak feltárásával próbáltam végezni. Ebben a kontextusban az említett vektortérre utalás már nem áll olyan távol a szokásos matematikai értelmétől. Talán szerencsésebb lett volna tényleg a konstrukcióhoz *asszociált* vektortérként (normálttérként, fél-belsőszorzatos térként) utalni a mindig a háttérben jelen levő ezen térre.

Az általam javasolt definíciók "bonyolultsága" leginkább nézőpont kérdése. Egyetértek avval, hogy egy kiépített differenciálszámítás esetén a fél-belsőszorzat fogalma a normanégyszet függvény differenciálásának az útján egyszerűen adódik. Ennek a következménye, hogy a fél-belsőszorzat függvényre kiszabott differenciálhatósági feltételeknél "egy fokkal erősebb" differenciálhatósági feltételt kell kiszabni a normanégyszet függvényre. Differenciálgeometriai vizsgálatokban tipikusan minden szereplő analitikus, ezért ez a különbségtétel irreleváns a fellépő feladatok szemszögéből. Ez is lehet annak az oka, hogy a fél-belső szorzat kezdeményezése nem géométerek nevéhez kapcsolódik, hanem a funkcionálanalízis kutatóiéhoz. (A Hilbert terek alapvető tételeinek mint például a Riesz-reprezentációs tétel általánosabb körülmények közötti alkalmazása volt a cél. Érdekes az időrend is, a fél-belsőszorzat

definiálása és kidolgozása az 1960-as évekhez kapcsolható, míg az indefinit metrikájú Finsler terekhez kapcsolható első cikkek az 1970-es évek közepén jelennek meg a fél-belsőszorzat fogalmának említése nélkül...) Az én észrevételem az, hogy a fél-belsőszorzat (és az általa indukálódó normanégyszet függvény) fogalma önmagában (differenciálszámítás nélkül) is alkalmas arra, hogy olyan indefinit metrikát hozzunk létre, mely erős kapcsolatban van a kiindulási normával. Ezen az úton lehet erősebb követelményeket tenni és az így a kapott struktúrától (s.i.i.p-tér) többet várni, de a legtöbb érdekes kérdés vizsgálatához egy gyengébb szorzatfogalom is elég. Az általánosított Minkowski-tér, lényegében a normált terek előjellel való összeadása útján definiál indefinit metrikát. A véleményben szereplő kérdésekre ennek szellemében adom válaszaimat.

Két fél-belsőszorzattal ellátott vektortér direkt összegén a fél-belső szorzatok +1- illetve 1-szeresének pithagoraszai összegével definiált indefinit normanégyszet függvény milyen esetben definiál általánosított Minkowski-teret?

A direktösszegezen fenti módon értelmezett indefinit normanégyszet függvény megfelel a fél-belsőszorzatok +1 illetve -1 -szeresének Minkowski összege által természetes módon indukált indefinit normanégyszetnek, ezért semmilyen további kikötés sem kell, ahhoz, hogy legalább egy általánosított Minkowski-tér indefinit normanégyszet függvényének tekintsük. Ha mindkét fél-belső szorzat függvény folytonos, akkor a normanégyszet függvény differenciálható, és így a normanégyszet függvény is egyértelműen meghatározza azt a fél-belsőszorzat függvényt, aminek ő normanégyszete. (Véges dimenziós esetekben ez avval ekvivalens, hogy az egységgömbnek minden pontjában van egyértelmű támaszhipersík.) Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben egyértelműség is fennáll, nincs más általánosított Minkowski-tér, amely ugyanezt az indefinit Minkowski metrikát indukálja.

Egy olyan $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett 4-szer folytonosan differenciálható másodfokú homogén függvény, amelynek a második deriváltjaiból képezett Hesse-mátrixa $(k; n - k)$ szignatúrájú nemelfajuló mátrix, $(1 < k < n)$, milyen feltételek mellett definiál általánosított Minkowski-féle normanégyszetet?

A kérdésben a Minkowski-féle "normanégyszet" kifejezés kétféleképpen érthető, ami két különböző válaszhoz vezet.

A $H_y(x)$ Hesse-mátrix meghatároz egy maximális k -dimenziós pozitív S és egy $n - k$ -dimenziós negatív T alteret, melyek egymás direkt kiegészítő alterek a regularitás miatt. Nyilván fel kell tennünk, hogy a Hesse mátrix ezeken az altereken konvex egységgömböt definiáljon, azaz a pozitív S altéren a gyöke szubadditív függvény legyen, míg a negatív T altéren a -1 -szeresének a

gyökéről követeljük ugyanezt meg. Ekkor az S altéren a Hesse-mátrix egy fél-belső skaláriszorzatot állít elő az $[s_1, s_2] \mapsto (1/2)H_{s_2}(s_1)$ $s_1, s_2 \in S$ definícióval. (Hasonlóképpen egy fél-belsőszorzat -1 -szeresét T -n.) Az első kérdésnek megfelelően ezekből kaphatunk egy Minkowski szorzatot, ami általánosított Minkowski normanégyszetet eredményez végül. A differenciálhatóság tekintetében elegendő kétszer folytonos differenciálhatóságot megkövetelnünk.

Nehezebb a feladatunk, ha s.i.i.p tér előállítás a cél, azaz a homogén függvény a G.Horváth, Á.: *Semi-indefinite inner product and generalized Minkowski spaces*. Journal of Geometry and Physics **60** (2010) 1190–1208. cikk 8. Definíciójának megfelelő "normanégyszet függvény". Ebben az esetben az S, T altéren való szubadditivitás mellett a többi pozitív és negatív altéren is szükség van ugyanezen feltételre. Ennek teljesülése már nehezebben ellenőrizhető, de ha fennáll ez az erősebb feltétel is, akkor már a C^2 esetben is igaz, hogy a Hesse-mátrix egy s.i.i.p teret definiál. (ld: Theorem 4 ugyanabban a cikkben.)

2018 március 14.

G.Horváth Ákos