

Válasz Kurusa Árpád opponensi véleményére

Először is köszönetemet szeretném kifejezni Kurusa Árpádnak a dolgozat minden részletre kiterjedő alapos olvasásáért. Különösen hálás vagyok a dolgozatba írt megjegyzéseiért, javításaiért.

A vélemény a tartalom pontos összefoglalása után két szempontból értékeli munkámat, először sorra veszi a felkéréshez mellékelt standard szempontokat, majd saját szempontjai szerint tartalmilag is értékeli a látottakat.

Kétségtelenül igaza van abban, hogy a jelölésrendszer nem optimális. Talán mentségemre szolgál, hogy a könnyű összevethetőség miatt az eredeti cikk jelöléseit igyekeztem követni, hacsak ez nem ütközött az egységesség gondolatával. A kiemelt konkrét példák esetén teljesen egyet tudok érteni az észrevételekkel. Az érthetőségre vonatkoztatott kritika Nagy Péter Tibor véleményével összecseng, az ok a túlzsúfoltság, több hely vagy kisebb anyag az érthetőség szintjét biztosan emelte volna. Hasznos felvetés, hogy az elektronikusan elérhető referenciák DOI vagy egyéb kódját minden esetben rögzítsük a dokumentumban, segítve az ellenőrzési folyamatokat. Köszönöm még egyszer a nyelvi és egyéb javításokat is, ezeket örömmel felhasználom.

Rátérve a tartalmi értékelésben megfogalmazott megjegyzésekre és kérdésekre megjegyzem, hogy jogos a 2.2 illetve a 2.3 pontok felcserélésére vonatkozó indítvány. Tartalmi szempontból valóban először a 2.3-ban foglaltakat kellett volna szerepeltetni. Azért raktam mégis a fejezet végére, mert ezen eredményekről csak áttekintést szerettem volna nyújtani, így a kidolgozottsága nem azonos a dolgozat többi részének kidolgozottságával.

Az unió konvex burkának térfogatával kapcsolatos 1.1 szakasz a következő kérdést inspirálta:

Felmerült bennem, hogy ez a téma kapcsolatban lehet a kovariogram-problémával, és ebben az esetben milyen következményekkel számolhatunk?

A kovariogram függvény adott K és L testek esetén egy t helyvektorhoz a $\text{vol}(K \cap (L + t))$ értéket rendeli. Ha $K = L$ a fő kérdés az, hogy a függvény eltolásoktól és origóra vonatkozó centrális tükrözéstől eltekintve egyértelműen meghatározza-e a testet. A sejtés – miszerint hogy igen – igaz centrálisan szimmetrikus konvex test esetén, hiszen a tartója a függvénynek, a testből képezett centrálszimmetrizált kétszerese, azaz $K + (-K)$. Tudjuk azt is, hogy $n = 2$ esetben pozitív a válasz, $n \geq 4$ esetén negatív, és $n = 3$ esetén poliéderekre igaz a sejtés. Az általunk vizsgált mennyiségek közül a $G_K(t) = \text{volconv}\{K \cup (K + t)\}$ függvény valóban sok hasonlóságot mutat a kovariogram függvénnyel. Rögzített t -re az $\alpha \mapsto G_K(\alpha t)$ szigorúan monoton

növvő, konvex függvény, a tartója a teljes $\mathbb{R}$. Eredményeink fő geometriai észrevétele a $G_K(u) = \text{vol}(K) + d_K(u)\text{vol}_{n-1}(K|u^\perp)$ összefüggés olyan u vektorokra, melyekre K és $K + u$ érintkeznek egymással. (A formulában $d_K(u)$ jelöli a K test u irányú átmérőjét $K|u^\perp$ pedig a K test u -ra merőleges hipersíkra vonatkozó vetületét. A fenti formula független u hosszától ezért t_u -nak $t_u = (d_K(u)/|u|)u$ -t választva ez a $G_K(t_u) = \text{vol}(K) + |t_u|\text{vol}_{n-1}(K|(t_u)^\perp)$ alakba írható. Világos, hogy $t_\alpha = t_u + \alpha u/|u|$ $\alpha > 0$ definícióval teljesül, hogy $G_K(t) = \text{vol}(K) + (|t_u| + \alpha)\text{vol}_{n-1}(K|(t_u)^\perp)$. Ez azt jelenti, hogy ha ismerjük a G_K függvény nagy értékeit és $\text{vol}(K)$ -t (ami a $G_K(0)$ értékkel egyezik meg), akkor minden u irányra vonatkozólag ismerjük az u -ra merőleges hipersíkra vonatkozó vetület $n - 1$ -dimenziós térfogatát is (azaz ismerjük a K -hoz asszociált u.n. vetületi testet (projection body)). Alkalmazhatjuk így a vetületi test rekonstrukciós problémájára vonatkozó ismereteket. A geometriai tomográfia egyik legismertebb problémája ez, mellyel kapcsolatosan számos eredmény ismert. Sajnos egyazon vetületi testhez számos olyan test tartozik, melynek éppen ez a vetületi teste, injektivitás csak a centrálisan szimmetrikus testek esetén bizonyítható. Jegyezzük meg, hogy a $G_K(t)$ függvény fenti leírása $|t_u|$ -nél kisebb hosszúságú t vektorra is kiterjeszthető a $G_K(t) = \text{vol}(K) + (d_K(t) - d_{K \cap (K+t)}(t))\text{vol}_{n-1}(K|t^\perp)$ formulával. Így az adott irányú leghosszabb átmérő fogalma összekapcsolja a $G_K(t)$ függvényt a megfelelő metszet egyik geometriai paraméterével. Számomra mégis az tűnik a legizgalmasabb kérdésnek, hogy a kovariogram és a G_K függvény együtt meghatározzák-e a K testet?

A vélemény második kérdés formájában megfogalmazott felvetése az adjungált Ábel operátorok diagonalizálhatóságával kapcsolatos: *Az adjungált Ábel operátor diagonalizálhatóságát nem lehetne-e esetleg általánosan is bizonyítani az amúgy szokásos megközelítéssel, hogy ti. az $\mathcal{I} \ni \mathbf{x} \mapsto [A\mathbf{x}, \mathbf{x}]$ leképezésnek a maximumhelye (esetleg) sajátvektor?* Ez megint egy találó jó kérdés, melyre a válaszom jelenleg az, hogy nem tudom. Néhány gondolatom azonban van. A standard bizonyítás definit vagy indefinit kvadratikusság formák és a szokásos rögzített skalárszorzás esetén a Lagrange-multiplikátor módszer segítségével történik. A szimmetrikus A mátrixszal reprezentált $Q_A(\mathbf{x}) := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ kvadratikusság forma szélsőérték helyeit a $0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 1$ feltétel teljesülése mellett keresve, a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (Q_A(\mathbf{x}) - \lambda (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 1)) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

szükséges feltételek együttesen éppen az $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ egyenlethez vezetnek.

Maga a feltételi egyenlet azt jelenti, hogy $\mathbf{x} \neq 0$ azaz szélsőérték csak sajátvektorhoz kapcsolódóan léphet fel. A mi problémánkban feltehető $n = 2$ és, hogy az A egy általánosított forgatás valamely $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ortonormált Auerbach bázisra vonatkoztatva (T.2.2.3 szerint). Az analógia követéséhez először reprezentálni kéne a Q_A formát szimmetrikus lineáris transzformációval. Kell keresni egy olyan $\tilde{A}$ szimmetrikus mátrixot, mellyel az $A\mathbf{x} = (x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi)\mathbf{a} + (-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)\mathbf{b}$ általánosított forgatás hatása elérhető. Az első megválaszolandó kérdés így:

Van-e olyan $\tilde{A}$ szimmetrikus lineáris transzformáció, hogy tetszőleges $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}$ vektorral fennálljon a

$$Q_A(\mathbf{x}) = [(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi)\mathbf{a} + (-x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)\mathbf{b}, x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}] = Q_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$$

egyenlőség?

Ha ilyen van, akkor végezhetünk az analógiának megfelelő további számításokat oly módon, hogy a $Q_{\tilde{A}}$ értékét és a feltételt is a fél-skaláris szorzat adja meg, azaz

$$Q_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = [(x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2})\mathbf{a} + (x_1 a_{2,1} + x_2 a_{2,2})\mathbf{b}, x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}]$$

szélsőértékeit keressük a $[x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}, x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}] - 1 = 0$ feltétel teljesülése mellett. A problémára most már alkalmazható a Lagrange-multiplikátor elv, ha a differenciálás numerikus végrehajtásához egy fix $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ Euklideszi értelemben ortonormált bázist használunk, azonban újabb nehézséget jelent a deriváltak számításában, hogy a második argumentumban a fél-skalárisszorzat nem lineáris. A fél-skaláris szorzat rögzített első változó mellett a második vektorváltozójának függvénye. Ezen függvény néhány speciális iránymenti deriváltját korábban kiszámoltam. A Horváth, Á. G.: *Premanifolds*. Note di Math. **31/2** (2011), 17–51 cikk Theorem 5 állításában felírt formulák talán használhatók a második lépés realizálása kapcsán.

Kétségtelen, hogy a Kurusa Árpád által megfogalmazott állítás a fent vázolt úttól különböző módon is bizonyítható lehet, hiszen a Lagrange-multiplikátorok használata csak – egy az Euklideszi esetben rögtön választ adó – kézenfekvő módszer. Azaz a kérdés további vizsgálatok tárgya lehet.

2018 március 20.

G.Horváth Ákos