

OPPONENSI VÉLEMÉNY
G. HORVÁTH ÁKOS
CONVEXITY AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES
C. MTA DOKTORI DISSZERTÁCIÓJÁRÓL

A disszertáció 9+132 nagyalakú TEX oldalú, több ábrával ellátott, szép kiállítású gondos munka, amely a pályázó tizennégy cikkének anyagát öleli fel. Ezen cikkek jó folyóiratokban jelentek meg, két kivétellel külföldiekben, ezen belül hat kifejezetten szakfolyóiratban.

A disszertáció kezdődik egy tartalomjegyzékkel, majd egy 7 oldalas bevezetés következik, ahol tézisek jelleggel felsorolja a disszertáció fő eredményeit (ezek együtt 9 oldal).

Maga a disszertáció három nagy fejezetre oszlik, és az Appendix A zárja.

Az alábbiakban a disszertáció számos tételéből néhány tételt kiemelek. Sajnos hosszabb definíciókat itt nem áll módomban reprodukálni, azokat l. a disszertációban.

Az első fejezet címe: Problems on convexity and volumes in connection with non-Euclidean geometries. Itt különféle problémákat tárgyal, amelyeket az köt össze, hogy mindegyikükben térfogatról van szó.

Az 1.1 alfejezetből a következőket emelem ki.

Theorem 1.1.1 (a későbbiekben csak Th.-et irok) egy Rogers-Shephard egyenlőtlenségben határozza meg az összes egyenlőségesetet: egy K egységtérfogatú konvex testre annak két eltolt, egymást metsző példánya úniója konvex burkának térfogatának maximuma pontosan akkor minimális, ha a test ellipszoid. A Th. 1.1.2 meghatározza mindazon síkbeli konvex testeket, amelyeknek két egymást érintő eltolt példánya konvex burkának területe csak a testtől függ, az eltolástól nem: ezek egy Radon normában állandó szélességű testek. Legyen $c_i(K)$ egy K egységtérfogatú konvex testre a maximuma $\text{conv}(K \cup K')$ térfogatának, ahol $K \cap K' \neq \emptyset$, és K' a K testből egy i -dimenziós affin síkra való tükrözéssel kapható. Th. 1.1.3, és Th. 1.1.4 szerint $c_1(K)$ minimuma pontosan az ellipszoidokra vétetik fel, és $c_{n-1}(K)$ minimuma pontosan a gömbre vétetik fel.

Az 1.2 alfejezetből a következőket emelem ki.

Fejes Tóth László vizsgálta az S^2 -be írt, v csúcsú, e élű és f lapú konvex poliéderek térfogatának maximumát. Belátott egy egyenlőtlenséget, ami minden észszerű esetben pontos: mégpedig az összes szabályos poliéderre. Ha csak a csúcspontszám van rögzítve, akkor (az Euler tétel alkalmazásával) ebből következik egy beírt n csúcsú konvex poliéder térfogatára egy becslés, de ez már csak a szabályos tetraéderre, oktaéderre, és ikozaéderre pontos (valamint $n \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikusan pontos). A pályázó több segédállítás után belátja Th. 1.2.1-ben ennek egy élesítését, mégpedig általánosabban, csillagszerű poliéderekre. Ebben az egyenlőtlenségben szerepelnek a lapoknak (projekcióval) megfelelő gömbháromszögek területei, és a lapok maximális élhosszai. Egy szép speciális eset a Th. 1.2.1.

Itt belátja, hogy S^2 -be írt két szabályos tetraéder úniója konvex burkának térfogata akkor maximális, ha ez a konvex burok egy S^2 -be beírt kocka.

Itt megjegyeznék egy tudomásom szerint nyitott kérdést. T. Tarnai, P. W. Fowler, S. Kabai, Packing of regular tetrahedral quartets of circles on a sphere, Proc. Royal Soc. London A **459** (2003), 2847-2859 numerikusan vizsgálták ugyanezt a kérdést $N \leq 8$ beírt szabályos tetraéder esetére. Ott megsejtették (az $N = 2$ eset mellett) hogy $N = 5$ -re a megoldás (azaz a konvex burok) a beírt szabályos dodekaéder (és az öt tetraéder egy úgynevezett "tetrahedral compound"-ot ad). Lehetne-e ezt a kérdést hasonló módszerekkel kezelni?

Az 1.3 alfejezetben, Th. 1.3.1-ben egy hiperbolikus ortoszkémet vizsgál 3 dimenzióban, és annak térfogatát kiszámítja az egymást követő ortogonális élei hosszainak függvényében. A képlet egy integráljelet tartalmaz, amely integrál nem elemi függvény.

A második fejezet címe: Investigations in a classical Minkowski normed space.

A 2.1 alfejezetből a következőket emelem ki.

Egy n -dimenziós Minkowski térre (azaz itt n -dimenziós Banach térre) vizsgálja a biszektorokat, azaz azon pontok halmazát, amelyek a 0-tól és egy adott x ponttól azonos távolságra vannak. Th. 2.1.2-ben belátja, hogy ha a Minkowski tér egység-gömbje szigorúan konvex, akkor minden biszektor homeomorf egy hipersíkkal. Általános Minkowski térre viszont egy biszektornak lehet nem-üres belseje, l. Example 2.1.1 (későbbiekben csak Ex.-t írok). Ex. 2.1.2-ben mutat példát arra, hogy egy biszektor tartalmazhat nem-üres relatív nyílt halmazokat két különböző hipersíkon. Ex. 2.1.3 szerint egy biszektor lehet egy hipersíkkal homeomorf, de nem a "természetes" módon. (Ezen példákban $n = 3$.) Th. 2.1.3 szerint $n \geq 3$ -ra, ha minden biszektor homeomorf egy hipersíkkal, akkor az egységszféra nem tartalmaz $(n - 1)$ -dimenziós hengert. Ex. 2.1.4-ben rácsok DV-celláit vizsgálja: ellentétben az euklideszi esettel, itt belső és külső DV-cellákat lehet definiálni, azaz amikor a definícióban $<$ jel, ill. $\leq$ jel szerepel, ése ezek különbsége tartalmazhat nem-üres nyílt halmazt. Th. 2.1.4 szerint bármely rács DV-celláira a külső és belső DV-cellák különbsége nem tartalmaz nem-üres nyílt halmazt pontosan akkor ha minden biszektor homeomorf egy hipersíkkal.

Ezután az $S(K, x)$ árnyékhatárok vizsgálatára tér át (itt $x \in S^{n-1}$ egy irány, a megvilágítás iránya, l. Def. 2.1.3). Ezek bd K -t szétvágják két relatív nyílt részre, K^+ -ra és K^- -ra (ezek persze függenek x -től; l. 28. oldal, (20)). Ex. 2.1.5-ben példát ad arra, hogy $S(K, x)$ -ben lehet hogy semmilyen nemüres nyílt rész nem sokaság. Ezután Definition 2.1.4-ben (továbbiakban Def.) bevezeti az általános paraméter szféra fogalmát, és Th. 2.1.5-ben megmutatja hogy ezek limesze $\lambda \rightarrow \infty$ esetén, a Hausdorff metrikában a megfelelő árnyékhatár. Th. 2.1.7 és Lemma 2.1.6 (továbbiakban L.) szerint $n = 3$ -ra és fix x -re fennállnak a következő implikációk: (1) H_x biszektor homeomorf egy standardul beágyazott (=tame) síkkal $\implies$ (2) a megfelelő árnyékhatár homeomorf S^1 -gyel $\implies$ (3) a megfelelő általános paraméter szférák, $\lambda > \lambda_0$ -ra, homeomorfak S^1 -gyel. (λ_0 a minimális t , amelyre $tK \cap (tK + x) \neq \emptyset$). Th. 2.1.8 szerint $n = 3$ -ra és adott x irányra ekvivalensek a következők: (1) minden biszektor homeomorf egy standardul beágyazott (=tame) síkkal, (2) minden árnyékhatár homeomorf S^1 -gyel. A disszertáció egyik fő eredménye a Th. 2.1.10: ha egy árnyékhatár $(n - 2)$ -sokaság, akkor homeomorf S^{n-2} -vel, ha pedig határolt $(n - 1)$ -sokaság, akkor homeomorf $S^{n-2} \times [0, 1]$ -gyel. Th. 2.1.11 szerint fix x -re fennállnak a következő implikációk: (1) minden, x -hez tartozó nem-degenerált általános paraméter szféra (azaz $\lambda > \lambda_0$) $(n - 2)$ -sokaság

$\implies$ (2) az x -hez tartozó árnyékhatar $(n - 2)$ -sokaság $\implies$ (3) minden, x -hez tartozó általános paraméter szféra ANR (absolute neighbourhood retract). Ex. 2.1.6 szerint az általános paraméter szférák lehetnek ANR-ek, miközben nem sokaságok. Th. 2.1.13-ban belátja, hogy egy H_x biszektor $(n - 1)$ -sokaság pontosan akkor, ha az x -hez tartozó nem-degenerált általános paraméter szférák $(n - 2)$ -sokaságok.

Ezután nem 0-tól és x -től egyenlő távolságú pontokat vizsgál, hanem áttér a $\pm x$ -től egyenlő távolságú pontok $B(-x, x)$ halmazára. Vizsgálja ezen halmaznak az egységszférára való radiális projekcióját, $P(x)$ -et. Ezután $\mathbb{R}^n$ -et kibővíti végtelen távoli pontokkal: ez a “zárt déli félgömbnek a sztereografikus projekciója”, és definiálja a kibővített $B(-x, x)$ biszektort (Def. 2.1.5). Def. 2.1.6-ban definiálja a $B(-x, x)$ biszektor korlátos reprezentációját, és Proposition 2.1.2-ben (továbbiakban Prop.) a következő szép leírását adja a korlátos reprezentációnak (azaz annak képhalmazának): az x -hez tartozó árnyékhatarának és az x -szel párhuzamos húrok középpontjai halmazának uniója. Speciálisan, a Minkowski tér euklideszi pontosan akkor, ha minden $x \in S^{n-1}$ pontra a $B(-x, x)$ biszektor egy hipersík része (Corollary 2.1.3., a későbbiekben Cor.). Th. 2.1.15 szerint adott x -re fennállnak a következő implikációk: (1) a kibővített biszektor $(n - 1)$ -dimenziós határolt sokaság $\implies$ (2) a kibővített biszektor korlátos reprezentációja homeomorf B^{n-1} -gyel $\implies$ (3) a kibővített biszektor homeomorf B^{n-1} -gyel, miközben annak relatív belseje egy standard módon beágyazott $(n - 1)$ -sík.

Ennek az alfejezetnek a bizonyításai lényegesen használják az algebrai topológia apparátusát.

A 2.2 alfejezetből a következőket emelem ki.

Egy V vektortéren a skaláris szorzás klasszikus fogalom. Ennek általánosítása a Lumer által bevezetett fél-skaláris szorzás. Ez egy kétváltozós függvény V -n, jele $[x, y]$. A szokásos axiómákból kimarad a szimmetria (komplex esetben a konjugált-szimmetria), és a második változóban csak a homogenitás (konjugált-homogenitás) teljesül, de az additivitás nem. Viszont a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget ekkor az axiómák között posztulálni kell. Ezekre sok minden átvihető a skaláris szorzattal ellátott terekről, de persze még több minden nem. Egy tipikus példa egy normált vektortéren a $[x, y] := \langle x, y' \rangle$ függvény, ahol $y' \in V'$ az y egységvektorhoz a Hahn-Banach tétel szerint létező 1 normájú lineáris funkcionál (70. oldal, Example 3.1.2, a továbbiakban Ex.). Ha a norma síma, akkor y' egyértelmű. A Cor. 2.2.1 szerint ha egy Minkowski térnek nincs 2-dimenziós euklideszi altere, akkor azon minden diagonalizálható adjungált Abel operátor (ahol az adjungált Abel operátorok az euklideszi esetbeli önadjungált operátorok analógjai) az identitás egy konstans-szorosa (ami élesen szemben áll az euklideszi esettel). A Th. 2.2.3 szerint ha V síma valós Minkowski tér, a fentiek szerint egy $[\cdot, \cdot]$ fél-skaláris szorzatot indukálva, akkor ezen fél-skaláris szorzat szerint egy adjungált Abel operátor előállítható mint legfeljebb 2 dimenziós invariáns alterein vett megszorításainak direkt összege, ahol a megfelelő formulák pontos analógjai az euklideszi esetbeli formuláknak. Th. 2.2.4 szerint $1 < p < \infty$ esetén egy véges dimenziós l^p térre az adjungált Abel operátorok diagonalizálhatók. A Th. 2.2.8 szerint ha V egy Minkowski tér, azon U egy izometria, és $[\cdot, \cdot]$ egy U -invariáns fél-skalárszorzat, akkor U előállítható mint legfeljebb 2 dimenziós invariáns alterein vett megszorításainak direkt összege, ahol az euklideszi esettel analóg formulák érvényesek (egy Auerbach bázissal). A Th. 2.2.10 szerint ha egy 3-dimenziós Minkowski tér egységgömbjének nincs 2-síkkal való metszete ami ellipszis, akkor a Minkowski terünk izometria csoportja szemidirekt szorzata az eltoláscsoportnak és a ± 1 determinánsú lineáris transzformációk

egy véges részcsoportjának.

A 2.3 alfejezet szinte csak definíciókat és tételeket tartalmaz, bizonyításokból csak igen keveset. Miután egy kivonatot tovább kivonatulni elég nehéz feladat, itt meg kell elégednem a téma egy rövid vázlatával.

A 2.3.1 részben Minkowski síkokon kúpszeleteket vizsgál, és a különféle definíciók kapcsolatát vizsgálja (távolságok összege/különbsége, ill. vezérkör/vezéregyenes és fókusz segítségével történő definíciók).

A 2.3.2 részben Minkowski síkokon kinematikát vizsgál (általánosított szög-mérték definíció, pillanatnyi forgás-centrum, előállítás két egymáson gördülő görbe segítségével), és eljut az Euler-Savary egyenletekig.

A harmadik fejezet címe: From the semi-indefinite inner product to the time-space manifold.

Míg a második fejezetben a skaláris szorzásnak egy általánosítása szerepelt, a fél-skaláris szorzás, a jelen harmadik fejezetben egy másik általánosítást mutat, amely Minkowskitól származik, és amely fogalom vizsgálatának szükségessége a fizikával, pontosabban a relativitás elmélettel kapcsolatban merült fel.

Ez az indefinit skaláris szorzat, amely annyiban gyengítése a skaláris szorzat definíciójának, hogy a pozitív definitéség nincs megkövetelve. (Ez a speciális relativitás elméletbeli tér-idő fogalom, ahol az indefinit skaláris szorzat szignatúrája $(-, +, +, +)$.) Viszont ekkor fel kell tenni, hogy $\forall y \in V [x, y] = 0 \implies x = 0$ (a megfelelő hatás nem-trivialitása).

A 3.1 alfejezetből a következőket emelem ki.

A szerző definiálta a kétféle skalárszorzat általánosításnak egy további, közös általánosítását, a szemi-indefinit skaláris szorzat tereket (Def. 3.1.1). Itt egy V komplex/valós vektortéren vesz egy kétváltozós komplex/valós értékű $[\cdot, \cdot]$ függvényt. Itt nincs megkövetelve a második változóbeli additivitás (így persze a konjugált-szimmetria sem). Viszont meg van követelve mindkét hatás nem-trivialitása (a fenti formula és annak a másik változóra való analógja). A pozitív definitéség helyett csak $[x, x] \in \mathbb{R}$ teljesül, és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség posztulálva van mind a pozitív, mind a negatív alterekre. A 72-dik oldalon S, T fenti terekre az $S \oplus T$ téren definiálja a $[\cdot, \cdot]^\pm$ szemi-indefinit skaláris szorzat tereket: $[u, v]^-$, ill. $[u, v]^+$ a komponensenkénti szemi-indefinit skaláris szorzatok összege, ill. különbsége (!).

A 3.2 alfejezet, Generalized space-time model címmel, a szemi-indefinit skaláris szorzat terek mélyebb vizsgálata.

A továbbiakban felteszi hogy $\dim T = 1$ (és akkor $V = S \oplus T$ miatt $\dim S = n - 1$), ami éppen a speciális relativitáselméletben használt modell (74. oldal). A szokásos módon definiálja ($[x, x]$ előjele szerint) a térszerű, fényzerű és időszzerű vektorokat, amelyek által alkotott halmazok $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$. Ekkor természetes módon van $\mathcal{T}$ -nek egy pozitív $\mathcal{T}^+$ része, amely konvex kúp (Th. 3.2.1). Az imaginárius egységgömb $H := \{v \in V \mid [v, v]^+ = -1\}$ (Def. 3.2.2.), míg a de Sitter gömb $G := \{v \in V \mid [v, v]^+ = 1\}$ (84. oldal). Az általánosított tér-idő modellben egy hiperfelületre definiálja a Minkowski-Finsler tér fogalmát (Def. 3.2.3.), és definiálja a Minkowski-Finsler távolságot (Def. 3.2.4.). Itt számos tételt bizonyít be, amelyeket nehezen lehetne itt szabatosan leírni, ezért csak egy-két állítást emelek ki.

Th. 3.2.4 egyik állítása szerint ha az imaginárius egységgömbön a lineáris izometriák (a $[\cdot, \cdot]^+$ szemiskaláris szorzattal) csoportja tranzitívan hat, akkor $[a, b]^+$ (fenn $[u, v]^+$) értéke $-\text{ch}(d(a, b))$ a d Minkowski-Finsler távolságra. (V.ö. a hiperbolikus tér hiperboloid modelljével.) Egy $F \subset V$ hiperfelületre vizsgálja az első és második alapformát (Def. 3.2.7 és 3.2.8). Ezután a skalár és a Ricci görbületet

definiálja (Def. 3.2.10). Miután itt nem Riemann térről van szó, az érintőtérbeli, tetszőleges, ill. egy adott egységvektort tartalmazó tetszőleges ortonormált bázis helyett az ilyen ortonormált bázisokra való leátlagolással definiálja a skalár és a Ricci görbületet. (A szekcionális görbület definícióját l. Def. 3.2.9.) Th. 3.2.5-ben V -re a $[\cdot, \cdot]^+$ szemüindefinit skaláris szorzattal vizsgálja az imaginárius egységgömböt, a de Sitter gömböt, a fénykúpot, és a beágyazásnál szóba kerülő fél-skaláris szorzatos tér egységgömbjét ($[\cdot, \cdot]^-$ -ra) és többek között a következőket bizonyítja. Alkalmas feltételekkel az imaginárius egységgömb konstans negatív görbületű és a de Sitter gömb konstans pozitív görbületű, míg a fénykúpra a görbületek 0-k. Az egységgömbre (a $[\cdot, \cdot]^-$ fél-skalár szorzatra) meghatározza a két alapformát, és a különféle görbületeket.

A 3.3 alfejezet a következő kérdéskört vizsgálja. Ismeretes, hogy az origóra szimmetrikus konvex testek $\mathcal{K}_0$ halmazára, a Hausdorff metrikával, nem létezik “jó” geometriai tulajdonságú mérték. Pl. nem lehet “érdekes” mértéket konstruálni, amely az alap euklideszi téren ható izometriákra invariáns volna. Ez azonban nem zárja ki, hogy a konvex testek halmazán értelmezett, “jó” geometriai tulajdonsággal rendelkező függvény esetén ne lenne egy “jó” tulajdonságú mérték, amelyre a függvény értékeire egy pontos, nem triviális eloszlás érvényes. A egymásra épülő több tétel közül itt csak a végső tételt mondom ki (Th. 3.3.3). Az origóra szimmetrikus konvex testek terén, a Hausdorff metrikával, létezik egy P valószínűségi mérték, amelyre a nem-üres nyílt halmazok mértéke pozitív, P -majdnem minden test síma, és az ún. push-forward measure $\alpha_0(K)^{-1}(P)$ az $[1/2, 1]$ intervallumon egy adott eloszlással megadott mérték (mégpedig csonkított normális eloszlással). Itt α_0 a $\mathcal{K}_0$ -n definiált számértékű függvény (l. Def. 3.3.1., ahol az összes konvex test $\mathcal{K}$ halmazára definiálja α_0 -t, de később csak $\mathcal{K}_0$ -ra használja), amely hasonlóságinvariáns, mégpedig konkrétan az átmérőnek és az átmérő és szélesség összegének hányadosa, és amelynek értékei az $[1/2, 1)$ intervallumba esnek. Továbbá $\alpha_0(K)^{-1}(P)$ jelenti azt a valószínűségi mértéket $[1/2, 1)$ -en (pushforward probability measure), amelyre egy $B \subset [1/2, 1)$ Borel halmazra $[\alpha_0(K)^{-1}(P)](B) := P(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \alpha_0(K) \in B\})$ (92. oldal).

A 3.4 alfejezetben az általános relativitáselmélet által felvetett matematikai problémákat vizsgál. (Amint ismeretes, az általános relativitáselméletben még nagyon sok tisztázásra váró kérdés van, mint pl. a metrikus tenzor alakja, világegyetemünk globális alakja, stb.) Itt kétféle modellt vizsgál: a determinisztikus, és a véletlen modellt. A világegyetemünk alakját egy konvex testben keresi, ami τ abszolút időpontban $\tau K(\tau)$, ahol $K(\tau)$ a megfelelő, C^2 -nek feltett norma egységgömbje, amelynek térfogata egy fix euklideszi egységgömb térfogatával egyenlő (és még további feltételekkel, l. 97-98. oldal). Itt is számos tételt bizonyít ezekről, amelyeket itt nehéz volna reprodukálni, ezért csak általánosságban írok róluk. A determinisztikus modellnek sok geometriai jellemzőjét meghatározza, speciálisan vizsgálja az imaginárius egységgömböt, a de Sitter gömböt, definiálja a konstans sebességgel mozgó “frame”-et. A véletlen modellről megmutatja, hogy bizonyos értelemben jól approximálható determinisztikus modellekkel (Th. 3.4.2).

Az Appendix A-ban a relativitáselmületről ír általánosságban, ill. hogy ezek hogyan illeszkednek a szerző által vizsgált modellhez.

Az Appendix A1-ben bemutatja a speciális relativitáselmélet szokásos elemi formuláit, eljutva a Lorentz transzformációig.

Az Appendix A2-ben az általános relativitáselméletre tér at. Bemutat négyféle, a fizikusok által használt metrikát (ds^2 különféle konkrét alakjait a négy-dimenziós

tér-idő sokaságon, amelyeknek szignatúrája $(-, +, +, +)$). Ezután ismerteti az ekvivalencia elvet (Ax. A.2.1), mint a speciális és általános relativitáselmélet közötti kapcsolatot (lokalizálás), majd a szokásos alapvető differenciálgeometriai jellemzőket határozza meg, mint affín konnexió, geodetikus egyenlete, metrikus tenzor, kovariáns derivált, parallel eltolás, és különféle görbületek (Riemann, Ricci és skalár).

A disszertáció végén szerepel egy List of Figures, majd egy index következik, az összes állítás és definíció oldalszámaival, ami nagyon hasznos a későbbi visszakeresés céljából. A disszertációt egy 147 tételes irodalomjegyzék zárja, amiből az első 14 a szerzőnek a disszertációban ismertetett cikkei, de a többi között is van 7 cikke a szerzőnek.

Egy ekkora terjedelmű munka természetesen nem lehet mentes bizonyos elírásoktól. Mivel ezek nem értelemzavarók, felsorolásuktól eltekintek.

A fentiekből látszik, hogy a pályázó a lineáris algebrát, a konvexitás elméletét és differenciálgeometriát jól ismeri és rutinosan kezeli. De emellett jól elsajátította az algebrai topológiát, a sokaságok elméletét, a funkcionálanalízist, a geometriai mértékelméletet, a valószínűségszámítást, és fizikából a relativitáselméletet. Mindezeket szépen tudta alkalmazni a disszertációjában.

Szintén a fentiekből látszik, hogy a disszertáció anyaga bőségesen elegendő az MTA doktorával szemben támasztható követelményeknek. Javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását. Továbbá melegen javaslom a pályázónak az MTA doktora cím odaítélését.

Budapest, 2018. II. 2.

Makai Endre
a matematikai tudomány doktora