

Opponensi vélemény

G. Hováth Ákos: Convexity and non-Euclidean Geometries

című MTA-doktori értekezéséről

Az angol nyelven megírt értekezésében a szerző 14 publikációjában közzétett geometriai eredményét foglalja össze 124 oldalon, amit még 16 oldal terjedelmű bevezetés, tartalomjegyzék és irodalomjegyzék egészít ki. A terjedelmes munkában a tételek és bizonyítások kidolgozását gyakran megjegyzések, sejtések és a kapcsolódó publikációk tartalmi összefoglalásai egészítik ki. Ezek a kísérő megjegyzések sok esetben emelik a mű értékét azzal, hogy hasznos információkkal szolgálnak a kutatási célkitűzéseknek és eredményeknek a nemzetközi szakirodalomban betöltött szerepéről és hatásáról, számos esetben azonban nehezítik a gondolatmenetek követhetőségét, mivel az idézett definíciók és eredmények érthető tárgyalását a kapcsolódó publikációkra való hivatkozások helyettesítik.

A disszertáció 3 fejezetből és egy appendixből áll.

Az *első fejezet* fő eredménye egy rögzített és egy mozgó konvex test konvex burka maximális térfogatának meghatározása, feltételezve, hogy a mozgó test metszi az adott testet. Az extrémális alakzatok vizsgálatát a tér mozgáscsoportján belüli különböző részcsoportokon belüli mozgásra vonatkozóan végzi el. Érdekes jellemzést fogalmaz meg az olyan síkbeli konvex tartományokra, amelyeknek az érintő helyzetű eltoltjaira a kapott konvex burok területe konstans. Hasonló térbeli konstrukciókkal ellipszoidok jellemzését írja le. A fejezet további részében a szerző érdekes és mély eredményeket bizonyít be az egységgömb felületére írt poligonok konvex burkának térfogatáról, kapcsolódva Fejes-Tóth László erre vonatkozó eredményéhez. Végül a hiperbolikus tér poliédereinek térfogatára vezet le explicit formulákat.

A *második fejezet* tartalmazza a disszertáció legfontosabb eredményeit, amelyek a véges dimenziós normált vektortér, az u.n. a Minkowski-tér két ponttól egyenlő távolságra lévő pontthalmazainak (az u.n. biszektoroknak) leírására és jellemzésére vonatkoznak. A Minkowski-térben két pont távolságát a különbségvektor normája adja. Ez a távolságfüggvény metrikát határoz meg akkor és csak akkor, ha a norma egységgömbje konvex. A biszektorok által meghatározott un. Leibniz-félterek topológiai és geometriai tulajdonságai vizsgálatának fontos eredményeként adódik, hogy ha a Minkowski-tér egységgömbje szigorúan konvex, akkor a biszektorok hipersíkkal homeomorfak. A fordított állítás vizsgálatához olyan konstrukciókat tanulmányoz, amelyekben az egységgömb felülete párhuzamos alkotószerek által meghatározott hengert tartalmaz. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező Minkowski-normákra érdekes további eredményeket bizonyít, amelyeket alkalmaz a vektortérben adott rácsok cellarendszerének vizsgálatára is. Igazolja, hogy egy rács cellarendszere a tér topologikus síkokkal való felbontását adja, ha a Minkowski-egységgömb szigorúan konvex. A biszektorok részletesebb geometriai finomszerkezetének leírásához tanulmányozza a Minkowski-egységgömb árnyékhatárát. Egy adott irányhoz tartozó árnyékhatár az egységgömb felülete azon pontjaiból áll, amelyekre illeszthető az adott irányú támasztó egyenes. A szerző fő sejtése szerint a biszektorok pontosan akkor topologikus hipersíkok, ha az egységgömb árnyékhatárai 2-kodimenziós topologikus gömbfelületek. A sejtés igazolásához az árnyékhatárokat előállítja bizonyos könnyebben leírható geometriai szerkezetű alakzatok Hausdorff metrikában képezett határértékeként. A síktopológia egy nevezetes tételét alkalmazva az előzőekben vizsgált konstrukciókra igazolja a sejtést a 3-dimenziós tér esetén. Magasabb dimenzióban példákkal illusztrálja, hogy az árnyékhatár geometriai szerkezete nagyon bonyolult lehet. Általános esetben többek között bizonyítja, hogy ha az árnyékhatár 2-kodimenziós topologikus sokaság, akkor az homeomorf a gömbfelülethez, ha pedig 1-kodimenziós határral rendelkező sokaság, akkor homeomorf a gömbfelület és egy intervallum topologikus szorzatához.

A továbbiakban a normált terekhez rendelhető fél-skalárszorzatokra vonatkozó Abel-féle adjungált operátorokról és a terek izometria csoportjáról közöl új eredményeket. Végül a kúpszeletet fogalmát általánosítja Minkowski síkokra és vizsgálja a kúpszeletek tulajdonságait, majd az euklideszi kinematika alapösszefüggéseire fogalmaz meg egy általánosítást.

A *harmadik fejezet* minimális differenciálhatósági (kétszer differenciálható, illetve kétszer folytonosan differenciálható) feltételeknek eleget tevő, de nem szükségképpen pozitív definit normafüggvénnyel ellátott vektorterekkel foglalkozik, amelyekre előír bizonyos természetes konvexitási feltételeket. Ehhez először a fél-belsőszorzatokkal ellátott un. s.i.p. tereket tanulmányozza. A fél-belsőszorzat differenciálható esetben a pozitív definit normanegyzet függvény derivált operátora, ennek megfelelően az egyik vektorváltozójában lineáris, a másikban pedig nem szükségképpen az, de mindkét változójában elsőfokú homogén. Ezt a konstrukciót általánosítja indefinit esetre, amit s.i.i.p. térnek nevez. Ha egy s.i.i.p. tér felbontható komplementer pozitív definit és negatív definit altereinek direkt összegére, akkor egy új normanegyzet függvényt definiál a felbontó altereken indukált fél-belsőszorzatok pithagoraszai összegével. Az így kapott indefinit normanegyzet függvénnyel meghatározott struktúrát általánosított Minkowski-térnek nevezi. Példával illusztrálja, hogy ez a tér nem szükségképpen tesz eleget az s.i.i.p. terekre kirótt konvexitási feltételnek. Tanulmányozza az s.i.i.p. terek és az általánosított Minkowski-terek egységgömbjein és imaginárius egységgömbjein indukált Finsler-jellegű geometriát. Eredményei különösen érdekesek abban az esetben, amikor a tér negatív definit altere 1-dimenziós. Ez a struktúra alkalmas lehet a fizikai tér-idő modellezésére, amit részletesen elemez.

A tartalom ismertetése után áttérek a disszertáció, a tézisek és azokban megfogalmazott eredmények értékelésére.

Úgy tűnik, hogy a szerző nem tudta eldönteni, hogy értekezést írjon-e vagy összefoglaló bevezetővel ellátott cikkgyűteményt adjon be. A téziszűzet megfogalmazása inkább az utóbbi szándékra utal, hiszen abban nem a disszertáció fő eredményeit, hanem a publikált dolgozatok tartalmát ismerteti. A disszertációban a szerző sokoldalú áttekintést kíván nyújtani a publikációiban tárgyalt további kutatási eredményeiről is, amelyek nem tartoznak a fő gondolatmenethez, esetenként bizonyítás nélkül. Emiatt a fő eredmények nincsenek tézisszerűen kiemelve, a tárgyalás nem koncentrálna a disszertáció fő eredményeire.

Véleményem szerint a disszertáció legfontosabb eredményei a következők:

1. Egy rögzített és egy mozgó konvex test konvex burkának térfogatára vonatkozó vizsgálatok és karakterizációs tételek.
2. Az egységgömb felületére írt poligonok konvex burkának térfogatára vonatkozó eredmények.
3. A biszektorok által meghatározott un. Leibniz-félterek topológiai és geometriai jellemzése Minkowski-terekben.
4. A Minkowski-terek biszektorai tulajdonságainak vizsgálata az egységgömb árnyékhatárai szerkezetének leírása segítségével.
5. A differenciálható s.i.i.p. terek és általánosított Minkowski-terek vizsgálata.
6. Az ortogonalitás és az egységgömbök, illetve az imaginárius egységgömbök geometriájának leírása s.i.i.p. terekben és általánosított Minkowski-terekben.

Az értekezés tartalmának matematikai kidolgozottsága nem egyenletes. A sűrű sorszedéssel írt 130 oldal tartalmilag kissé zsúfoltnak tűnik. A tárgyalás stílusa esetenként szóbeli előadás jellegű, például a 90. oldalon leírt tanácsa: "The reader can read on these concept on the internet...". Számomra zavaró, hogy azt a vektorteret, amelyen a Minkowski norma definiálva van, beágyazó térnek nevezi, hiszen a matematikában a beágyazás szó általában egy részstruktúrának egy bővebb struktúrába való leképezésére utal. A harmadik fejezetben tárgyalt struktúrákkal kapcsolatosan bizonyos definíciók meglehetősen bonyolult konstrukciókkal vannak megadva, például az általánosított Minkowski-tér definíciója. A bevezetett fogalmak segítségével a szerző a klasszikus Minkowski-geometria és az indefinit metrikájú Minkowski- és Finsler-terek elméletének alapvető struktúráit terjeszti ki minimális differenciálhatósági feltételek teljesülésének esetére. Ez a vizsgálat természetesen új módszereket igényel. Mindazonáltal célszerű lett volna erősebb differenciálhatósági feltételek esetén összehasonlítani a szerző által adott konstrukciókat és bizonyított tételeket az analitikus elmélettel.

Ezzel kapcsolatban a következő kérdéseket fogalmazom meg:

Két fél-belsőszorzattal ellátott vektortér direkt összegén a fél-belső szorzatok $+1$ - illetve -1 -szeresének pithagoraszsi összegével definiált indefinit normanégyszet függvény milyen esetben definiál általánosított Minkowski-teret?

Egy olyan $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett 4-szer folytonosan differenciálható másodfokú homogén függvény, amelynek a második deriváltjaiból képezett Hesse-mátrixa $(k, n - k)$ szignatúrájú nem-elfajuló mátrix, $(1 < k < n)$, milyen feltételek mellett definiál általánosított Minkowski-féle normanégyszetet?

A szerző legértékesebb tudományos eredményeinek egy szűkebb terjedelmű és lényegretörőbb összefoglalása jobban hangsúlyozta volna azok értékeit. Ez a megjegyzés azonban nem kérdőjelezi meg a disszertációban feldolgozott tételek és bizonyítások matematikai mélységét és tudományos jelentőségét. A tárgyalt témakörök sokoldalúsága és az eredmények bizonyításához használt változatos és nehéz analitikus, topologikus, nem-lineáris és konvex geometriai, valamint differenciálgeometriai eszközök eredményes alkalmazása igazolják a szerző ötletgazdagságát, valamint mély matematikai intuíción és bizonyítási készségét. A szerző gazdag és értékes matematikai tudományos munkássággal és publikációs tevékenységgel rendelkezik, amit a szakmai tudományos közvélemény elismer. Ezek alapján megállapítható, hogy G. Horváth Ákos a konvexitási problémák és a nem-euklideszi geometriák vizsgálatának nemzetközi szempontból kiemelkedő szakembere.

Javaslom a doktori mű nyilvános vitára bocsátását és G. Horváth Ákos számára az MTA-doktori fokozat megítélését.

Budapest, 2018. február 24.

Nagy Péter Tibor
MTA doktora