## Válasz Cserti József opponensi véleményére

Szeretném megköszönni Cserti Józsefnek alapos bírálatát és konstruktív észrevételeit. Visszatekintve magam is sajnálom, hogy nem a kísérleti kontextus felvezetésével fűztem egybe azokat a tanulmányokat, amelyek az értekezés alapját képezik. Kissé elbizonytalanított, hogy a doktori értekezés szempontjai között a saját eredmények bemutatása is nagyon hangsúlyos, és nem voltam biztos benne, lerövidíthetem-e ezeket a részeket annyira, hogy a kísérleti vonatkozások kellő alapossággal megtárgyalhatók legyenek.

Általánosságban elmondhatom, hogy a 4.3., 4.4., és 4.6. fejezetekben bemutatott [1–3] munkák kivételével mindegyik tanulmány vagy kísérleti eredményekhez kapcsolódott, vagy olyan kísérletekkel kapcsolatban tett előrejelzést, amelyek akkor beláthátható időn belül elvégezhetőknek tűntek.

Mivel a cikkek többnyire olyan kérdésekhez szóltak hozzá, amelyek annak idején és gyakran most is vita tárgyát képezték, az elfogadottságuk részleges. Így pl. a 2.1. fejezet alapját képező [4] tanulmányt sokan hivatkozzák, de jelenleg úgy tűnik, nem a legvalószínűbb szcenáriót írja le (lásd alább az 5. kérdésre adott válaszomat). A 3.2. és 3.3. fejezetekben bemutatott [5, 6] eredmények egyszerűek és konklúzívak; nem is vitatja őket senki. Hivatkozottságuk azonban nem jelentős.

Mivel a 2.3. fejezet kivételével társszerzős cikkek tartalmát ismertetem, nem vállalkoznék arra, hogy saját eredményeimet elkülönítsem a társszerzőim eredményeitől. Ettől eltekintve csak az értekezés bevezető fejezetében, illetve az egyes fejezeteket bevezető a 3.1. és 4.1. alfejezetekben ismertetettem mások eredményeit.

## Válaszok a számozott kérdésekre

1. Grafén esetében a lineáris diszperzió kb. 1 eV-ig érvényes. Mivel a tört kvantált Hall effektust az  $|n| \leq 1$  szinteken vizsgáljuk, két feltételnek kell teljesülnie: (i) az  $n = \pm 1$  szintek  $\sqrt{2\hbar}v_F/\ell$  energiájának abszolút értékben kisebbnek kell lennie 1 eV-nál, és (ii) a kölcsönhatás  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell}$  skálájának is kisebbnek kell lennie 1 eV-nál. Itt  $\ell$  a mágneses hossz,  $v_F$  a Fermi-sebesség. Ezekből a feltételekből

$$0.036\sqrt{B[\mathrm{T}]} \ll 1$$
 és  $\frac{0.056}{\epsilon_r}\sqrt{B[\mathrm{T}]} \ll 1.$ 

adódik, ami a kísérletekben alkalmazott 5 T feletti terekben teljesül. ( $\epsilon_r$  a közek relatív dielektromos állandója, nyilván  $\epsilon_r > 1$ ).

Ettől eltérő gondolatmenetre van szükség a 2.4. fejezethez. Itt az alsó néhány  $|n| \leq 3$ Landau-szint részleges betöltésénél dolgozunk. A fenti érvelés alapján ezeknek a szinteknek az energiája még mindig jóval kisebb, mint 1 eV. Amikor azonban a többi Landau-szint leárnyékoló hatását az RPA közelítésben vesszük figyelembe, a Landau szintek sorát 5400/B[T]-nél vágjuk le, ami megfelel a tömegtelen Dirac-modell kiterjesztésének a teljes sávra. Ez durva közelítésnek tűnik, de leárnyékolásnál a legközelebbi Landau-szintek közötti dipólátmenetek relevánsak  $q\ell < 1$  momentumnál, azaz a levágás lényegtelen;  $q\ell > 1$  esetén a mágneses térben és a mágneses tér nélkül számolt polarizáció szinte egybeesik. Ez utóbbi esetben a polarizálhatóság levágás nélkül is konvergens, azaz az energiában távoli állapotok leárnyékoló hatása gyorsan lecseng.

2. Az egzakt diagonalizációs eljárás a részecskeszámmal exponenciálisan skálázódik, ezért kis rendszerekre kell szorítkoznunk. A legmesszebb a 3.2. fejezetben mentünk, ahol a

Hilbert tér dimenziója 3.5 milliárd körüli. Ilyen esetben a Lánczos-algoritmust kell alkalmaznunk, amivel csak az alapállapotot kaptuk meg kb. egy hónap alatt. Kisebb rendszereknél az alsó kb. egy tucat állapot is biztonságosan előállítható. Így készült pl. a 4.15. ábra jobb alsó panelje, ahol azonban a Hilbert tér dimenziószáma csak fél millió körüli.

Az elérhető legnagyobb rendszerméret a betöltési számtól függ. Teljes spinpolarizációt és a Lánczos algoritmus használatát feltételezve,  $\nu = 1/3$ -nál  $N \leq 14$ ,  $\nu = 2/5$ -nél  $N \leq 16$ ,  $\nu = 1/2$ -nél  $N \leq 18$ ,  $\nu = 3/7$ -nál  $N \leq 18$ ,  $\nu = 3/5$ -nél  $N \leq 21$ ,  $\nu = 2/3$ -nál  $N \leq 26$ ; a spin figyelembe vételével ennél jóval kisebb. A rendszerméret növekedése a betöltési számmal félrevezető, mivel Landau-szinten belüli részecske-lyuk szimmetria alkalmazásával a  $\nu > 1/2$  törtek  $\nu < 1/2$  törtekre képezhetők le, a releváns részecskék száma csökken, miközben a fizikai probléma ugyanaz marad.

- 3. Nem jellemző, hogy az egész betöltési számnál előforduló kvantált Hall ferromágneses állapotok gerjesztési energiáját egzakt diagonalizációval határozzák meg. Egy kivétel, amelyről tudomásom van, az a számolás, amelyet még diákként végeztem [7]. Ez az n = 0 Landau-szinten az SU(2) szimmetrikus esetre vonatkozott, és 0.6 gapet talált  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell}$  egységben. Kétrétegű grafén esetében a gerjesztési energiához legalább két Landau-pálya (n = 0, 1) és a spindegeráció meghagyásával kellene egzakt diagonalizációt végezni, ami lehetetlen. Ezért fordultunk a Hartree-Fock módszerhez, ami a kvantált Hall ferromágneses jelenségek esetében nagyon jól működik. A kapott transzport gap  $1.56 \frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell}$ . Tipikus, hogy a minta rendezetlenségét és a kölcsönhatás leárnyékolódását elhanyagolva számolt gerjesztési energiák nagyobbak, mint a mért gerjesztési energiák; tört kvantált Hall állapotoknál ez a különbség akár egy nagyságrend is lehet. Ez esetben frissebb publikációk az alábbi gerjesztési energiákat mérték (a kísérletek és a nem tisztán számszerű eltérések diskusszióját lásd a 6. pontban):
  - (a) Velasco *et al.* [8] felfüggesztett mintán kapott eredményét  $\epsilon_r = 1$  feltételezéssel B = 4 T-nél átszámítva  $0.2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell}$  a gap.
  - (b) Kou *et al.* [9] mintája hatszöges bór nitridre volt helyzve, ezért a  $\epsilon_r = \frac{1+6}{2} = 3.5$  becsléssel élünk. Nagyjából konstans 23-25 meV gerjesztési energiát kaptak a 1-12 T tartományban; 24 meV-vel számolva ez 0.43 és  $1.49 \frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell}$  között van.
  - (c) Lee et al. [10] egyik mintán 13 meV, egy másikon 40 meV gerjesztési energiát mértek a 8-12 T tartományban. Ez 1.23 és  $1.5 \frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell}$ közé esik.

Olyan elméleti számolást nem ismerek, amely közvetlenül a vezetőképességet határozná meg erős mágneses térben a kölcsönhatás figyelembe vételével. A kölcsönhatási effektusok elhanyagolásával persze könnyen generálható ilyen elmélet pl. az egyrétegű grafén esetéhez hasonlóan [11]. A ferromágneses állapot kimutatására GaAs alapú félvezető mintákban a polarizáció szerint szűrt fotolumineszcencia [12] a legalkalmasabb eszköz; ez grafénben nem működik a vegyértéksáv eltérő szerkezete miatt. Egy másik módszer a Faraday illetve a Kerr rotáció mérése lenne. GaAs-ban ezzel a módszerrel sikeresen mérték meg a spinpolarizációt  $\nu = 1$  környékén [13]. Grafénben ilyen méréssel detektálták a kvantált Hall állapotokat [14], de a spinpolarizációra vonatkozó állítással nem találkoztam.

4. Igaz,  $\Delta' \approx 7$  meV nem feltétlenül kicsi  $E_C$ -hez viszonyítva:  $\Delta'/E_C = 0.125\epsilon_r\sqrt{B[T]}$ . Ezért  $\Delta'$  elhanyagolását korrekt módon úgy lehetne igazolni, hogy megismételjük a számolást  $\Delta'$ -val, és az eredményül kapott tulajdonságokat összehasonlítjuk a  $\Delta'$  = 0 esetben kapottakkal. Knothe és Jolicoeur [15] egy később megjelent, jóval átfogóbb átlagtérelméleti tanulmányában  $\Delta'$  hatását a perturbációszámolás első rendjében veszik figyelembe.  $\Delta' = 16$  meV becsléssel azt kapják, hogy az egyes egész betöltési számoknál számol fázisdiagramok csak jelentéktelen mértékben változnak meg  $\Delta'$  hatására.

5. Az elméleti és a kísérleti irodalomban teljesen általános a g = 2 feltételezés mind a kétrétegű, mind az egyrétegű grafénre vonatkozóan. Nem tudok róla, hogy ezt bárki kimérte vagy levezette volna. HOPG grafit esetében g = 2.003 a kristály *ab* síkjába eső, és g = 2.15 a *c* irányú tér esetében [16]; nem gondolom, hogy kétrétegű grafén esetében *g* ennél lényegesebben eltérne kettőtől.

A 3.3. ábra egyrétegű grafénre vonatkozik; itt a g giromágneses faktor és az  $\epsilon$  dielektromos állandó szorzatára teszünk feltételezést. Mivel Feldman mérései [17] felfüggesztett mintára vonatkoznak, a minta alatt bizonyos távolságban lévő dielektrikumra kell gondolnunk. Ha  $\epsilon < 3$ , a mért és számolt gapek közötti diszkrepancia még nagyobb lesz, összhangban azzal, hogy csak kvalitatív egyezést állítunk.

- 6. A kétrétegű grafén szimmetriasértő kvantált Hall ferromágneses állapotaival kapcsolatban később is jelentek meg kísérleti munkák [8–10, 18–20]. Itt most a  $\nu = 0$  betöltési számnál megfigyelt viselkedésre koncentrálok.
  - (a) Bao et al. [18] elsősorban a mágneses tér nélküli esettel foglalkozik, akárcsak a disszertációm 2.1. fejezete. Magnetotranszportot mértek két végpont között. Nagy számú egy oldalon kapuzott, ill. fent és lent is kapuzott mintát elemezve azt találták, hogy azok két csoportba sorolhatók: (i) olyan minták, amelyek B = 0 esetén szigetelők, (ii) olyanok, amelyek  $B \rightarrow 0$  limeszben is véges, a  $e^2/h$  vezetőképességkvantum néhányszorosának megfelelő mértékben vezetnek. Az előbbi csoportba tipikusan olyan minták tartoztak, amelyeknek a mobilitása B = 0 mellett nagyobb volt, és kisebb kapufeszültség kellett a töltéssemlegességet jellemző minimális vezetőképesség eléréséhez, azaz kisebb az *intrinsic* dópolásuk, emiatt vélhetően rendezettebbek. Az (i) csoportba tartozó mintákban B bekapcsolásával nem záródik a gap. (Ez utóbbi eredmény a 2.1. fejezetben leírtak szempontjából is releváns, az ott leírt szcenáriót nem erősíti meg.)
  - (b) Velasco *et al.* [8] szintén magnetotranszportot mértek. Nagyon tiszta, B = 0 határesetben szigetelő mintán mérték a gap nagyságát a mágneses tér függvényében. A kapott gap  $\Delta = 1 \text{ meV} + \sqrt{(1 \text{ meV})^2 + (5.5 \text{ meV}/\text{T})^2 B^2}$ , nem záródik. A gappel rendelkező állapotot mind a merőleges elektromos tér, mind kétrétegű grafén dópolása elrontja; nem találtak átmenetet másik kvantált Hall állapotba.
  - (c) Kou *et al.* [9] az elektronrendszer kompresszibilitását mérték a kapacitáson keresztül. A 0 < B < 12 T tartományban nagyjából konstans 23-25 meV körüli gapet találtak, ami meglepő, mert a kölcsönhatási effektusoknak  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell} \propto \sqrt{B}$ -vel kellene skálázniuk. Ha a kölcsönhatás erősen leárnyékolt, akkor ez a skálázás *B*-ben lineárisra módosul, a Zeeman-energiához hasonlóan. Ők sem találtak átmenetet másik kvantált Hall állapotba, igaz, merőleges elektromos teret nem tudtak kialakítani.
  - (d) Maher *et al.* [19] hatszöges bór nitridbe helyezett kétrétegű grafénen mértek transzportot, felső és alsó kapuval. A  $\nu = 0$  szigetelő állapot mindig jelen van, nem figyeltek meg a gap záródásával járó átmeneteket.
  - (e) Nagyon fontos eredmény Lee et al. [10] mérése. Két párhuzamos kétrétegű grafén síkot vizsgáltak, amelyeket 2-6 nm vastag hatszöges bór nitrid dielektrikum választ

el egymástól. Emellett mérni tudták az alsó grafén sík kémiai potenciálját a dópolás és a külső terek függvényében. A felső grafén sík kapuelektródaként szolgál; használnak továbbá egy alsó kapuelektródát is. Töltéssemleges esetben ( $\nu = 0$ ) három inkompresszibilis állapotot találtak, azaz a merőleges elektromos tér növelésével kétszer záródik a gap. A kis elektromos térnél megvalósuló szigetelőt canted antiferromágnesként [21], a nagy térnél megvalósulót rétegpolarizált állapotként, a közbensőt Lambert és Côté [22] nyomán spin- és völgykoherens állapotként azonosították. A kis és a nagy térhez tartozó állapotok nagyjából megfelelnek a 2.2. fejezetben tárgyalt állapotoknak, ugyanis a *canted* antiferromágnes állapot a ferromágneses állapot módosulata, ha a Hartree-Fock számolás során figyelembe vesszük a kölcsönhatás rövidtávú anizotróp járulékai közül néhányat, mint a 2.1. fejezetben; a spinek bedőlését az elmélet csak durván tudja becsülni, a kísérletek nem tudják megmérni. A közbenső fázis viszont új felfedezés; felvetődik azonban a kérdés, hogy a kétrétegű grafén rétegek közötti kis távolság miatt valóban szabad-e egy sík fázisdiagramjára következtetni. Meglepő módon a nagy elektromos térhez tartozó szigetelő állapot gapje nagyjából függetlennek tűnik a külső mágneses tértől.



1. ábra. Kétrétegű grafén  $\nu = 0$  kvantált Hall állapotának fázisdiagramja Hunt *et al.* [20] nyomán. A bal oldalon a függőleges tengely a külső elektromos térrel arányos. A jobb oldalon az állapotoknak a szerzők javasolta értelmezésének vázlata szerepel.

(f) A terület legfrissebb eredménye Hunt *et al.* [20] munkája. Ez szintén kapacitásmérés, amelyben külön tudják mérni a felső kapuelektróda és a kétrétegű grafén sík, ill. az alsó kapuelektróda és a kétrétegű grafén sík közötti kapacitást, ezáltal következtetni tudnak a rétegpolarizációra. Ők is három fázist találtak. A kis- és nagyterű fázist Lee *et al.* [10]-hoz hasonlóan azonosítják, a kisterű állapotban a spinek esetleges bedőlését ők sem tudják mérni. A közbenső állapotot olyan szimmetriasértő állapotként azonosítják, amelyben a kedvezőtlenebb réteg n = 0 pályája töltődik be a kedvezőbb spinnel, a kedvezőbb réteg n = 0 pályája mindkét spinnel, és a

kedvezőbb réteg n = 0 pályája az energetikailag kedvezőbb spinnel. Ezt az azonosítást egyszerű Hartree-Fock számolással támaszják alá. Ez az állapot tehát spin és völgy-pszeudospin értelemben is részlegesen polarizált. Az 1. ábra mutatja a kísérleti fázisdiagramot és annak Hunt *et al.* [20] által adott értelmezését.

Összefoglalva: a két kvantált Hall ferromágneses fázis, amit a 2.2. fejezet alapját képező [23] cikkben diszkutáltunk, létezik, bár az általunk elhanyadolt kisebb effektusok a kis elektromos tér melletti állapotban a spinek bedőlését (*canted* antiferromágnes) okozhatják. A két állapot között azonban nem gap nélküli tartomány van, ahogy mi gondoltuk, hanem egy újabb szigetelő fázis, amelynek értelmezése további kutatást igényel [15].

7. A termodinamikai határesetre extrapolált energiáknál csak az azonos módszerrel, különböző spinpolarizáció mellett kapott értékeket lehet összehasonlítani. Így pl. a 3.4(a) panelen az egzakt diagonalizációból származó lila egyenes a kéknél kisebb, a variációs fekete a pirosnál kisebb értékre extrapolál; mindkettő polarizálatlan alapállapotot jósol  $\nu = 2/7$ -re. A 3.4(c) panel egyszerűbb: módszertől függetlenül a teljesen polarizált állapot energiája alacsonyabb. A 3.4(d) panel szintén: mindkét variációs módszerrel a teljesen polarizált állapot energiája a legalacsonyabb (kék és piros), ezután következik a részlegesen polarizált (zöld és fekete), majd a polarizálatlan (sárga és narancs). A 3.4(b) panelen van egy kis zavar. Mindkét variációs módszer a teljesen polarizált állapotot jósolja alacsonyabb energiájúnak, de az egzakt diagonalizáció a szinglettet. Itt azonban a kis  $\nu = 2/9$  betöltési szám miatt a spin figyelembe vételével különösen gyorsan nő a Hilbert-tér dimenziója, és extrapoláció csak három apró rendszeren alapul (N = 4, 6, 8). Ebben az esetben az egzakt diagonalizációból kapott szinglet energia megbízhatatlan. Jobb lett volna ezt a szövegben is megemlíteni.

Azokban az állapotokban, ahol m = 1, csak a teljesen polarizált esetre van variációs konstrukció; ez indokolja, hogy a  $\nu = m/(4m-1)$  sorozatban a 2/7-t elemezzük elsőként. De van egy további oka is annak, miért nem tekintjük  $\nu = 1/3$ -t a  $\nu = m/(4m-1)$  sorozat m = 1 tagjának. Ennél a törtnél valósul meg a Laughlin-állapot, ami a  $\nu = m/(2m+1)$  sorozat m = 1 tagja. Ez utóbbi egyszerűbb, vélhetően alacsonyabb energiájú. Sokszorosan bizonyított, hogy a Laughlin-állapot nagyon közel van az egzakt alapállapothoz. Nem tudok róla, hogy  $\nu = 1/3$ -nél bárkinek sikerült volna ennél jobb variációs elmélettel előállnia. Ez az oka annak is, hogy a 60. oldalon  $\nu = 1/3$ -dal nem foglalkozunk. Azt, hogy  $\nu = 1/3$ -nél az állapot spinpolarizált, egzakt diagonalizáción túl kísérletek sora igazolja.

8. Köszönöm az észrevételt. Sajnos a szöveg éppen fordított sorrendben hivatkozott az ábra paneljeire. A 3.2. fejezet utolsó előtti mondata tehát helyesen a következő:

"Az energiák kiértékelésével azt találjuk, hogy ez igaz  $\nu = m/(2pm - 1)$  törteknél (3.5(a,b) ábra), de nem teljesül a  $\nu = m/(2pm + 1)$  TKH állapotoknál (3.5(c,d) ábra)."

Az utolsó mondatban szereplő következtetés viszont érvényben marad.

A 3.5(a,b) ábrákon görbeillesztéssel és megfelelő hibaszámítással a következő eredményeket kapjuk:  $\nu = 3/13$ -nál az eredeti (3.1) vetítéssel a termodinamikai határesetre extrapolált energia -0.348353(8), a (3.22) egyenletben szereplő módosított vetítéssel -0.348295(10), az eltérés 0.000058(18), azaz a hibaintervallumok összegének háromszorosa.  $\nu = 4/17$ -nél -0.351231(11) ill. -0.351138(14), az eltérés 0.000093(25), azaz a hibaintervallumok összegének három és fél-szerese.

9. A 4.2. fejezet alapja a [25] publikáció.

A Bishara-Nayak kölcsönhatás alapja perturbációszámítás. A 2. ábra (b) és (c) diagramjai példát mutatnak ilyen járulékokra a perturbációszámítás második rendjében. A vízszintes nyilak virtuális állapotok valamely üres Landau-szinten; ilyen állapotokon keresztül kölcsönhatási mátrixelem jön létre a részlegesen betöltött Landau-szint 123 indexű (bemenetek) ill. 456 indexű állapotai (kimenetek) között. A perturbációszámítás dimenziótlan kis paramétere a mágneses hosszon vett Coulomb-kölcsönhatás és a ciklotron energia  $\kappa$ -val jelölt hányadosa [(4.5) egyenlet]. Mivel  $\kappa$  1 nagyságrendű, azaz nem igazán kicsi, ezért a perturbációszámítás igazolása pragmatikusan az, adott esetben nincsen nem áll rendelkezésünkre jobb módszer.



2. ábra. A Landau-szintek közötti átmenetek által generált effektív két- és háromrészecske kölcsönhatások Bishara és Nayak [24] nyomán. (a) a ponttal jelölt vertex definíciója. (b) és (c) példák háromrészecskés kölcsönhatást generáló tagokra. (d) példák a párkölcsönhatás járulékaira.

- 10. Alapvetően továbbra is fennáll a patthelyzet, azaz a különböző közelítéseket alkalmazó számolások különböző konklúziókat vonnak le. Az újabb eredmények közül kiemelném Ed Rezayi [25] munkáját, amely szerint ha a perturbációszámításból származó háromrészecskés pszeudopotentciálok közül figyelembe vesszük a harmadikat legjelentősebbet is (a (4.4) egyenlet jelölésével: W<sub>9</sub>), akkor a tendencia megfordul, azaz gömbön diagonalizálva kis rendszereket az anti-Pfaff állapot bizonyul előnyösebbnek.
- 11. A (4.17) képletben szereplő tagok közül E(5N/2 4) = 0, mivel ennél a monopóluserősségnél valósul meg a (4.15) egyenletben szereplő Gaffnian alapállapot, ami egzakt zérus energiájú alapállapota a (4.8) egyenletben szereplő pozitív szemidefinit  $\mathcal{H}^{\rm G}$  modellhamitoninak. E(5N/2 - 3) = 0, mivel eggyel megnöveltük a fluxust, az adott számú elektron széthúzódhat, a taszító potenciál várható értéke a legalacsonyabb energiájú állapotokban nulla lesz. (Más szóval, a kvázilyukak energiája nulla a pozitív szemidefinit modellkölcsönhatás szerint). Azonban E(5N/2 - 5) > 0, csak numerikusan állapítható meg.

Ebben a fejezetben tisztán elméleti céljaink voltak, a kísérleti relevanciával nem foglalkoztunk. A modellkölcsönhatás és a Coulomb-kölcsönhatás közötti interpolációval az volt a célunk, hogy megviszgáljuk, változhatnak-e a gerjesztések topologikus tulajdonságai a gap záródása nélkül. Közhely, hogy a topologikus tulajdonságok változásához a gap záródása kell, azonban arra az esetre, ha *a topologikus tulajdonságokat a gerjesztések hordozzák*, ezt nem bizonyította senki. Célunk annak megmutatása volt egy konkrét példán, hogy ez az érvelési mód alaptalan. Természetesen, mivel a numerikus módszerek miatt kis rendszerekre kell korlátozódnunk, nem tudunk erős állítást tenni a termodinamiai határesetre vonatkozóan. Azonban azt is kielemezzük, mi a topologikus tulajdonságok változásának mechanizmusa: a Coulomb-kölcsönhatás bekapcsolása a sokszorosan degenerált kvázilyuk sávot széthúzza, és legalább négy kvázilyuk esetén a sávon belül megjelenik egy alsáv, amelynek a kvantumszámai a szokványos  $\nu = 2/5$  tört kvantum Hall állapot véges rendszerben leszámolt kvantumszámaival esnek egybe. Hangsúlyozom, hogy a példa *nem* arra az esetre vonatkozik, amikor az alapállapotnak van megfogható topologikus jellemzője; ott elvárható a gap záródása.

- 12. A spinpolarizációt és a spinátmenetekek a következő kísérleti módszerekkel vizsgálják:
  - (a) Döntött mágneses tér [26–28]: mivel a betöltési számot a mágneses tér mintára merőleges komponense határozza meg, a Zeeman-energiát viszont a teljes tér, a mágneses tér döntésével és hangolásával megoldható, hogy rögzített betöltési számnál a Zeeman-energia növekedjen. Ha ilyenkor a gap (aktivációs energia) lecsökken, ideális esetben nullává válik, majd ismét növekedni kezd, azt a Zeeman-energia által hajtott fázisátalakulásként, azaz különböző spinállapotok közötti átmenetként értelmezzük. Megfelelő kapuzással az elektronsűrűség is hangolható egy kettes szorzón belül [29].
  - (b) A fotolumineszcens jel cirkulárisan polarizált komponenseinek mérésével az elektronrendszer spinpolarizációja mérhető [12, 30].
  - (c) NMR [31–33] és rezisztíven detektált NMR [34].
  - (d) Cirkulárisan polarizált fény abszorpciója [35] (GaAs vegyértéksávjából a vezetési sávba történő átmenetek).
  - (e) A Faraday- és Kerr-rotáció mérése GaAs-ban [13].
  - (f) Grafén esetében az elektronrendszer kompresszibilitása közvetlenül is mérhető a minta felett elhelyezett egyelektron-tranzisztor segítségével [36, 37]. Mivel itt a mágneses tér és az elektronsűrűség egymástól függetlenül hangolható, rögzített betöltési számnál a gap eltűnésével járó átalakulások közvetlenül leszámlálhatók B függvényében.

## Válaszok a megjegyzésekre

- 1. Igaz, a következő kiadásban megváltoztatom.
- 2. Igaz, a hiányzó formula a fejezet jelöléseivel  $E_2 = \frac{\hbar e B 2 \sqrt{2} v^2}{\gamma_1}$
- 3. Igaz, a következő kiadásban kiegészítem.
- 4. A vízszintes tengelyen a teljes impulzusmomentum szerepel, mivel az egzakt diagonalizációt gömbön végeztük. Ez lényegében megfeleltethető a hullámszámnak a  $k\ell = L/\sqrt{Q}$ képlet szerint, ahol Q a dimenziótlanított monopólus-erősség, amit adott esetben (3.13) egyenlet ad meg. Részletes diszkusszió az 1.4.1. fejezetben.
- 5. Igaz ugyan, hogy a 3.5. fejezet kísérleti motívációként a kétdimenziós elektrongázra hivatkozik [28, 38, 39], a felvetés azonban teljesen általános. Ha a grafén minták tisztasága eléri a félvezető heteroszerkezetekben megvalósított kétdimenziós minták tisztaságát, nincs ok arra, hogy a 3.5. fejezetben vizsgált állapotok ne jelenjenek meg itt is. A 3.16. ábra a (3.26)-(3.33) egyenletekben részletezett konstrukciót illusztrálja, ezért a megjegyzéssel egyetértve úgy tűnik, jobb lett volna az ábrafeliratben hivatkozni az egyes konstrukciós lépésekre.

- 6. Qitt is a monopólus-erősség, amit a gömbi számítási módszerekkel kapcsolatosan 1.4.1. fejezet diszkutál.
- 7. Nincs elírás, de a megfogalmazás kissé túl tömör. Ha a kétdimenziós elektrongázt kvantumgödörrel valósítjuk meg a z irányban, a hullámfüggvény z irányú részét legegyszerűbb  $\psi_z = \sqrt{\frac{2}{w}} \cos\left(\frac{z\pi}{w}\right)$  alakban modellezni a  $-\frac{w}{2} < z < \frac{w}{2}$  tartományban; erre mondtam, hogy cos hullámfüggvény.
- 8. Igen, ez a mondat túl tömörre sikeredett, emiatt nem teljesen világos. Itt arra utaltam, hogy mágneses tér jelenlétében az Aharonov-Bohm fázis is értelmezhető geometriai Berry-fázisként. Lin *et al.* [40] olyan konstrukciót ír le, amelyben három fajta hiperfinom állapottal rendelkező semleges bozonokat (<sup>87</sup>Rb; F = 1,  $m_F = -1, 0, 1$ ) két egymásra merőleges, megfelelően elhangolt Raman-lézerrel csatolnak, majd egy ezekkel 45 fokos szöget bezáró inhomogén mágneses térrel kialakítanak egy Zeeman-tér gradienst is. Ennek a komplikált konstrukciónak eredményeként a csatolt állapotok egyike olyan effektív hamiltonit érzékel, amely analóg a mágneses térbe helyezett töltött részecskék Landau-mértékben felírt hamiltonijával. Ekkor egy zárt pályán végighaladó semleges atom a dinamikai fázison túl egy olyan geometriai (Berry) fázist is felvesz, ami minden szempontból analóg egy Aharonov-Bohm fázissal. Az így előállított szintetikus mágneses térrel (ez a szerzők szava járása) sikerült kvantált örvényeket megfigyelni a Bose-Einstein kondezátumban.
- 9. Igaz, szükséges lett volna további magyarázat. A 4.10. ábra a (4.10) egyenlet és az annak részeit definiáló (1.4) és (1.5) egyenletek grafikus ábrázolását kísérelte meg.
- 10. Igaz, jobb lett volna kiegészítenem a dolgozatot egy összefoglalóval.

Még egyszer köszönöm a nagyon alapos elemzést, a sok kérdést, és a nagy számú konstruktív észrevételt.

Budapest, 2018. május 30.

Tőke Csaba, PhD Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Elméleti Fizikai Tanszék

## Hivatkozások

- [1] A. Wójs, C. Tőke, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. 105, 196801 (2010).
- [2] G. J. Sreejith, C. Tőke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. 107, 086806 (2011).
- [3] C. Tőke and J. K. Jain, Phys. Rev. B 80, 205301 (2009).
- [4] Y. Lemonik, I. L. Aleiner, C. Tőke, and V. I. Fal'ko, Phys. Rev. B 82, 201408 (2010).
- [5] A. C. Balram, C. Tőke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B 92, 075410 (2015).
- [6] A. C. Balram, C. Tőke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B 92, 205120 (2015).
- [7] C. Tőke, P. E. Lammert, V. H. Crespi, and J. K. Jain, Phys. Rev. B 74, 235417 (2006).
- [8] J. Velasco, L. Jing, W. Bao, Y. Lee, P. Kratz, V. Aji, M. Bockrath, C. N., Lau, C. Varma, R. Stillwell, et al., Nat. Nanotech. 7, 156 (2012).

- [9] A. Kou, B. E. Feldman, A. J. Levin, B. I. Halperin, K. Watanabe, T. Taniguchi, and A. Yacoby, Science 345, 55 (2014).
- [10] K. Lee, B. Fallahazad, J. Xue, D. C. Dillen, K. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, and E. Tutuc, Science 345, 58 (2014).
- [11] N. H. Shon and T. Ando, J. Phys. Soc. Japan 67, 2421 (1998).
- [12] I. V. Kukushkin, K. v. Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. Lett. 82, 3665 (1999).
- [13] H. Ito, T. Yamazaki, D. Fukuoka, K. Oto, K. Muro, Y. Hirayama, and N. Kumada, Journal of Physics: Conference Series 334, 012021 (2011).
- [14] R. Shimano, G. Yumoto, J. Y. Yoo, R. Matsunaga, S. Tanabe, H. Hibino, T. Morimoto, and H. Aoki, Nature Communications 4, 1841 (2013).
- [15] A. Knothe and T. Jolicoeur, Phys. Rev. B 94, 235149 (2016).
- [16] K. Matsubara, T. Tsuzuku, and K. Sugihara, Phys. Rev. B 44, 11845 (1991).
- [17] B. E. Feldman, J. Martin, and A. Yacoby, Nat. Phys. 5, 889 (2009).
- [18] W. Bao, J. Velasco, F. Zhang, L. Jing, B. Standley, D. Smirnov, M. Bockrath, A. H. MacDonald, and C. N. Lau, Proceedings of the National Academy of Sciences 109, 10802 (2012).
- [19] P. Maher, L. Wang, Y. Gao, C. Forsythe, T. Taniguchi, K. Watanabe, D. Abanin, Z. Papić, P. Cadden-Zimansky, J. Hone, et al., Science 345, 61 (2014).
- [20] B. M. Hunt, J. I. A. Li, A. A. Zibrov, L. Wang, T. Taniguchi, K. Watanabe, J. Hone, C. R. Dean, M. Zaletel, R. C. Ashoori, et al., Nature Communications 8, 948 (2017).
- [21] M. Kharitonov, Phys. Rev. Lett. 109, 046803 (2012).
- [22] J. Lambert and R. Côté, Phys. Rev. B 87, 115415 (2013).
- [23] C. Tőke and V. I. Fal'ko, Phys. Rev. B 83, 115455 (2011).
- [24] W. Bishara and C. Nayak, Phys. Rev. B 80, 121302 (2009).
- [25] E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. 119, 026801 (2017).
- [26] J. P. Eisenstein, H. L. Stormer, L. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. 62, 1540 (1989).
- [27] R. R. Du, A. S. Yeh, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. 75, 3926 (1995).
- [28] A. S. Yeh, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. 82, 592 (1999).
- [29] Y. Liu, S. Hasdemir, A. Wójs, J. K. Jain, L. N. Pfeiffer, K. W. West, K. W. Baldwin, and M. Shayegan, Phys. Rev. B 90, 085301 (2014).
- [30] I. V. Kukushkin, J. H. Smet, K. von Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. Lett. 85, 3688 (2000).

- [31] S. Melinte, N. Freytag, M. Horvatic, C. Berthier, L. P. Lévy, V. Bayot, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. 84, 354 (2000).
- [32] N. Freytag, Y. Tokunaga, M. Horvatić, C. Berthier, M. Shayegan, and L. P. Lévy, Phys. Rev. Lett. 87, 136801 (2001).
- [33] S. E. Barrett, G. Dabbagh, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and R. Tycko, Phys. Rev. Lett. 74, 5112 (1995).
- [34] L. Tiemann, G. Gamez, N. Kumada, and K. Muraki, Science **335**, 828 (2012).
- [35] P. Plochocka, J. M. Schneider, D. K. Maude, M. Potemski, M. Rappaport, V. Umansky, I. Bar-Joseph, J. G. Groshaus, Y. Gallais, and A. Pinczuk, Phys. Rev. Lett. **102**, 126806 (2009).
- [36] B. E. Feldman, B. Krauss, J. H. Smet, and A. Yacoby, Science 337, 1196 (2012).
- [37] B. E. Feldman, A. J. Levin, B. Krauss, D. A. Abanin, B. I. Halperin, J. H. Smet, and A. Yacoby, Phys. Rev. Lett. 111, 076802 (2013).
- [38] Y. Liu, D. Kamburov, S. Hasdemir, M. Shayegan, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin, Phys. Rev. Lett. 113, 246803 (2014).
- [39] Y. Liu, S. Hasdemir, J. Shabani, M. Shayegan, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin, Phys. Rev. B 92, 201101 (2015).
- [40] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. Jimenez-Garcia, J. V. Porto, and I. B. Spielman, Nature 462, 628 (2009).