

Erős korreláció kétdimenziós elektronrendszerekben

MTA doktori értekezés

Tóke Csaba



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Elméleti Fizika tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. A kvantált Hall effektus	6
1.2. Erősen korrelált fázisok a kvantált Hall tartományban	7
1.3. Kétdimenziós elektronrendszerek megvalósításai	11
1.4. Számítási módszerek	12
1.4.1. Kompakt geometriák	13
1.4.2. Egzakt diagonalizáció	15
1.4.3. A variációs Monte Carlo módszer	15
1.4.4. Kompozit fermion diagonalizáció	16
1.4.5. Egyéb módszerek	17
2. Korrelált elektronrendszerek többretegű grafén rendszerekben	18
2.1. Spontán szimmetriasértés és a Lifsic-átalakulás kétrétegű grafénben	18
2.2. Kvantált Hall állapotok és Landau-szinten belüli gerjesztéseik dőpólatlan két-retegű grafénben	25
2.3. Részecske-lyuk szimmetria többretegű grafén rendszerek kvantált Hall ferromágneses állapotaiban	31
2.4. Töltéssűrűség-hullámok szigetelővel elválasztott közeli grafén síkokban merőleges mágneses térben	38
3. Többkomponensű tört kvantált Hall rendszerek	48
3.1. Bevezetés	48
3.2. Tört kvantált Hall effektus grafénben: elmélet és kísérlet kvantitatív összehasonlítása	50
3.3. Kompozit fermionok spontán polarizációja grafén $ n = 1$ Landau-szintjén	58
3.4. Többkomponensű tört kvantált Hall állapotok gerjesztései grafénben	67
3.5. Kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotai többkomponensű rendszerekben	71
4. A félig töltött Landau-szintek fizikája	82
4.1. Bevezetés	82
4.2. A Landau-szintek keveredése és a Pfaff-állapot és gerjesztéseinek stabilitása $\nu = 5/2$ betöltési számnál	83
4.3. Tört kvantált Hall effektus háromrészecskés taszító kölcsönhatásból	88
4.4. Kétosztatú kompozit fermion állapotok	93
4.5. Páros nevezőjű tört állapotok egyrétegű grafénben	96
4.6. Kvázirészecskék topologikus jellegének megváltozása a tiltott sáv záródása nélkül a tört kvantált Hall effektus egy modelljében	100
4.7. Érvényes-e a Luttinger-tétel a kompozit fermionok Fermi-tenger állapotára?	108

5. A disszertáció tézispontjai	115
6. Köszönetnyilvánítások	118

Rövidítések, jelölések, konvenciók

KHE	Kvantált Hall effektus
TKH(E)	Tört kvantált Hall (effektus)
$\ell = \sqrt{\hbar/eB}$	mágneses hossz (SI mértékegységekben)
$\phi_0 = h/e$	fluxuskvantum (SI mértékegységekben)
ν	betöltési szám, lásd az (1.1) egyenletet a 6. oldalon.
Δ_Z	Zeeman-energia, lásd az (1.8) egyenletet a 9. oldalon.
E_C	a Coulomb kölcsönhatás energiaskálája, lásd az (1.2) egyenletet a 7. oldalon.
KF	Kompozit fermion, lásd az (1.4) és (1.5) egyenleteket a 8. oldalon.

A csak egyes fejezetekben érvénnyel bíró jelöléseket helyben vezetem be.

A képletek az SI mértékegység-rendszert veszik alapul.

Az ábrák eredetileg angol nyelvű cikkekben jelentek meg; csak azokat az ábrákat magyarítottam, amelyeket korrigáltam, vagy amelyek explicit hivatkozást tartalmaznak egyenletekre.

1. fejezet

Bevezetés

Bár az elektron-korrelációs effektusok tanulmányozása két dimenzióban nagy múltra tekint vissza, e terület számos újdonsága az utóbbi évtizedre datálható. Ez egyfelől a szén közelmúltban felfedezett allotróp változatainak – a grafénnek [1, 2] és variánsainak [3–5] – köszönhető, amelyek a megszokottól különböző kétdimenziós elektron-rendszereket adnak a kezünkbe, és ezáltal újszerű kölcsönhatási effektusokat tesznek lehetővé. Főbb jellemzőik a pozitív és negatív energiájú Landau-szintek sorozata, a $n = 0$ Landau-szint speciális szerkezete (többrétegű grafén esetében), a völgy szabadsági fok jelenléte, a sebesség-renormálás és emiatt az egyrészecskés és sokrészecskés effektusok versengése [6, 7], vagy a rendkívül vékony vezető és szigetelő rétegeket tartalmazó heterostruktúrák létrehozásának lehetősége. Újszerű kétdimenziós rendszerek alakulnak ki továbbá háromdimenziós topologikus szigetelők felületén, szilícium hidrogénnel lezárt (111) felületén [8] (hat ekvivalens völgy), vagy erősen anizotróp SnTe [9–11] és bizmut [12] (111) felületén (három völgy). Másfelől a kísérleti módszerek fejlődése korábban nem ismert részleteket tett elérhetővé ismert jelenségekkel, pl. a félig töltött legalacsonyabb Landau-szinttel kapcsolatban [13] ($\nu = 1/2$ és $\nu = 3/2$ betöltések esete). A kvantum-számítástechnikai vonatkozások [14] miatt intenzív kutatás folyik továbbá régi nyitott problémákkal kapcsolatban, mint amilyen a $\nu = 5/2$ tört kvantált Hall állapot [15] eredete és tulajdonságai.

A doktori disszertációm óta eltelt időszakban alkalmam volt a fenti részterületek mindegyikéhez hozzájárulni [16–34]; a jelen értekezés ezekből az eredményekből válogat. A 2. fejezetben a (egy- ill. többrétegű) grafénnel kapcsolatos kutatásaimat foglalja össze, mind zérus, mind véges külső mágneses tér esetén. Az itt vizsgált jelenségekre sokszor már az átlagtér-közelítés is eredményt ad, a korreláció itt tkp. nem mondható erősnek. Az értekezés további részeit az erős külső mágneses térben alacsony hőmérsékleten elérhető kvantált Hall tartomány erősen korrelált állapotainak szentelem. A tört kvantált Hall effektusnak többkomponensű rendszerekben felvetődő kérdéseivel foglalkozik a 3. fejezet. Az 4. fejezetben a félig töltött Landau-szint problémáit vizsgálom a kvantált Hall jelenségek tartományában. Ez magában foglalja a második Landau-szint $\nu = 5/2$ ($\nu = 7/2$) tört kvantált Hall állapotainak bizonyos aspektusait, valamint a $\nu = 1/2$ -nél és $\nu = 3/2$ -nél előforduló, jól ismert összenyomható Fermi-folyadék állapot korábban nem ismert tulajdonságainak diszkuszióját. Minden esetben áttekintettem a cikkek megjelenése óta született fejleményeket, és ahol szükséges, az adatokat újraszámoltam korszerűbb, pontosabb módszerrel. Beillesztettem még publikálatlan adatokat, főként a 2.4. alfejezetben. A kísérleti vonatkozások tárgyalását mai tudásunk szemszögéből korszerűsítettem.

1.1. A kvantált Hall effektus

Klaus von Klitzing és munkatársai fedezték fel [35], hogy kétdimenziós elektronrendszerek alacsony hőmérsékleten mért magnetotranszportjában a szemiklasszikus viselkedéstől való reprodukálható eltérések a kétdimenziós vezetőrendszerek általános és robosztus tulajdonságai. Az egész kvantált Hall effektus (KHE) lényege, hogy ha a Hall-ellenállás (R_{xy}) lefutását a külső mágneses tér ($B_{\perp}$) függvényében vizsgáljuk, akkor a szemiklasszikus dinamika által jó-solt $R_{xy} = B_{\perp}/(nec)$ egyenest vízszintes platók dekorálják $h/(e^2 f)$ értékeknél, ahol f egész; a plató közepén a hosszanti ellenállás (R_{xx}) nagyságrendeket csökkenve nulla közelébe esik (1.1(a) ábra). A vezetés ekkor nem disszipatív jellegű, hanem kvantált királis vezetési csatornákön keresztül valósul meg a minta peremén. A hosszanti ellenállás esetleges nemnulla értéke mezoszkópikus visszaszórás jelenséggént értelmezhető [36]. A felfedezés óta eltelt harminchét évben a kvantált Hall effektust számos különböző hordozóban megvalósított kétdimenziós elektron- és lyukvezető rendszerben megfigyelték, lényegileg azonos vonásokkal. A jelenség egyetlen rendszerfüggő tulajdonsága a platók konkrét értéke, amit a Landau-szintek érték-készletén és degenerációján keresztül a sávszerkezet határoz meg.

Mivel a külső mágneses tér makroszkópikus degenerációjú kvantált Landau-szinteket alakít ki, az elektronok számát egy Landau-szint degenerációjához viszonyító

$$\nu = \frac{N}{N_{\phi}} = \frac{n\phi_0}{B_{\perp}} \quad (1.1)$$

betöltési szám egész értékeinél a minta belseje szigetelő ($\phi_0 = h/e$ a fluxuskvantum, n az elektronsűrűség). Ha a minta áramot vezet, ez csakis a minta peremén lehetséges [37], ahol királis vezető állapotok kialakulását biztosítja a töltéshordozók elektrosztatikus bezárása [38]. Vezető élállapotok első megközelítésben ott alakulnak ki, ahol a Landau-szinteknek a külső bezáró potenciál által megemelt értéke metszi a Fermi-energiát. Ez a kép részben módosul, ha figyelembe vesszük, hogy az elektronfolyadék részlegesen leárnyékolja a bezárást biztosító teret [39, 40]. Ekkor az elektronfolyadékban a peremtől távolodva összenyomhatatlan (szigetelő) és összenyomható (tiltott sávval nem rendelkező) sávok alakulnak ki. A vezetési csatornák döntően az összenyomhatatlan sávokban alakulnak ki.

A kinetikus energia kvantáltsága és az élállapotok kialakulása csak szükséges, de nem elégséges feltételei a KHE fellépésének, mivel véges szélességű R_{xy} -platók csak akkor lehetségesek, ha $B_{\perp}$ függvényében van egy véges intervallum, amikor a Fermi-energia a minta belsejére jellemző Landau-energiaszintek közötti tartományba esik. A minta rendezetlensége okozza azt, hogy a töltéshordozók mindig érzékelnek egyfajta mobilitási élt, amely elválasztja az ún. lokalizált állapotok energia-tartományait – amelyeknek feltöltése a transzport-tulajdonságokat nem befolyásolja – és a delokalizált állapotokat, amelyeknek feltöltése a kvantált Hall platók közötti átmenetekkel hozható kapcsolatba. Rendezetlenség persze mindig jelen van; a KHE feltétele, hogy a rendezetlenség sima legyen az $\ell = \sqrt{\hbar/eB_{\perp}}$ mágneses hossz skáláján.

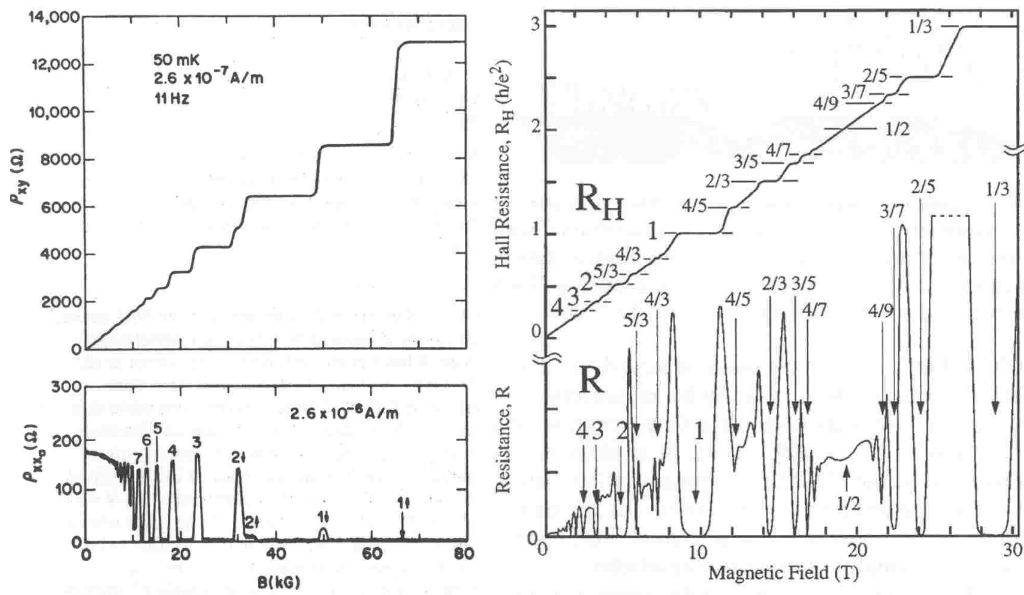
Az egész KHE tehát alapvetően egyrészecskés jelenség, amelyben az elektron-elektron kölcsönhatás másodlagos szerepet játszik, és kvantitatív hatásai általában jól leírhatók átlagtér-elméletekkel. Spin- vagy völgydegenerált rendszerekben vannak olyan egész betöltési számok, amelyek nem felelnek meg egy a kinetikus energia által definiált Landau-szint teljes betöltöttségének. Kellően tiszta mintákban és erős mágneses terekben azonban ezeknél ilyenkor is megfigyelhető kvantált Hall effektus. Ez a *kvantált Hall ferromágnesesség*, a legegyszerűbb kölcsönhatási effektus, amely értelmezhető a Hartree-Fock közelítés keretében. A 3. és 4. fejezetek azonban erősen korrelált rendszereket vizsgálnak, amelyeknél sem átlagtér-elméleti, sem perturbatív, sem pl. sűrűségfukcionál módszerek nem vezetnek eredményre.

1.2. Erősen korrelált fázisok a kvantált Hall tartományban

Az egész kvantált Hall effektushoz szükséges, hogy a ciklotron-energia (kvadratikus sávban $\hbar\omega_c = \hbar e B_{\perp}/m^*$, ahol m^* az effektív tömeg) a hőmérséklet $k_B T$ skáláját és a rendezetlen háttérpotenciál tipikus fluktuációinak (általában nehezen számszerűsíthető) mértékét meghaladja. Ha az elektron-elektron kölcsönhatást jellemző

$$E_C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell} \quad (1.2)$$

Coulomb-energiaskála a ciklotron-energiánál kisebb, a hőmérsékletnél és a rendezetlenségnél viszont nagyobb, további elektron-korrelációs jelenségek lépnek fel.



1.1. ábra. Az egész (a) és a tört (b) kvantált Hall effektus. A képek forrása [41, 42].

A Tsui, Störmer és Gossard által felfedezett törtszámú kvantált Hall effektus (TKHE) fenomenológiája az egész KHE-hoz hasonló, azonban bizonyos $\nu = p/q$ racionális tört betöltések környékén lép fel [43]; a kvantált platók értéke $R_{xy} = h/(e^2\nu)$ (1.1(b) ábra). Jelenleg mintegy 80 platót ismerünk, amelyek sorozatokba rendezhetők; q néhány kivételtől eltekintve páratlan, és a legtöbb Hall plató a legalacsonyabb Landau-szint részleges betöltésének felel meg ($\nu < 2$ alulról korlátos sáv és kis Zeeman-felhasadás esetén). Ilyen betöltésnél egyrészesecske vagy átlagtérelméleti megfontolások nem adnak tiltott sávot. Ha a rendezetlenség okozta komplikációktól egyelőre eltekintünk, a kinetikus energia konstans, és a Coulomb-kölcsönhatás egyedüli szereplőként nem kezelhető perturbációként vagy átlagtér-közelítés keretei között. A TKHE az erős elektron-korreláció megnyilvánulása, ami tiltott sávot hoz létre a tiszta (nem rendezetlen) rendszerben. A rendezetlenség szerepe az egész KHE-hoz hasonlóan abból áll, hogy lokalizált kvázirészecske-állapotok kialakításával lehetővé teszi, hogy a Fermi-energia a transzport-tulajdonságokat meghatározó delokalizált állapotok sávjai közötti értéket vehessen fel véges $B_{\perp}$ -tartományban. A minta peremén vezető kvázirészecske-csatornák alakulnak ki, amelyeknek szerkezete az elektron-elektron kölcsönhatás alapvető szerepe miatt szintén bonyolultabb.

A TKHE megértésében Laughlin elmélete hozott áttörést 1983-ban [44]. Ez egy paraméterek nélküli variációs hullámfüggvény az elektrongáz alapállapotára $\nu = 1/m$ betöltési szám

esetén:

$$\Psi_{1/m}(\{z_i\}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2}, \quad (1.3)$$

ahol $z_i = x_i - iy_i$ komplex elektron-koordináta a síkon, m egész, szimmetrikus mértéket használtunk: $\mathbf{A} = (-B_\perp y/2, B_\perp x, 0)$, és a hosszegységet úgy választjuk meg, hogy $\ell = 1$. A hullámfüggvény normálásától eltekintünk. $\Psi_{1/m}$ az N -részecskés Schrödinger-egyenlet alapállapotának nagy pontosságú variációs közelítése, ami igazolható pl. egzakt diagonalizációval való összehasonlítás során (rögzített N részecskeszám és L_z teljes pálya-impulzusmomentum esetén).

$\Psi_{1/m}$ persze csak $N \rightarrow \infty$ esetben ír le eltolás- és elforgatás-invariáns folyadék-állapotot; véges N esetén a sűrűség egy az origó körüli korongon koncentrálódik. A korong belsejében az elektronsűrűség $n \approx \nu/2\pi\ell^2$, a betöltési számnak megfelelő tömbi érték; a korong szélén a sűrűség lecsengő oszcillációkat mutat. $m = 1$ esetben megkapjuk egy teljesen betöltött Landau-szint hullámfüggvényét, ami egyben a Hartree-Fock alapállapot. Az $m > 1$ kitevő többszörössé teszi a részecske-koordináták egybeesésekor ($z_i \rightarrow z_j$) a zérushelyet, amely fermionok esetében eleve legalább egyszeres. Az elmélet részét képezik a kvázirészecske és kvázilyuk típusú gerjesztések hullámfüggvényei is, amelyeknek jósága az alapállapot jóságához hasonlóan numerikus kísérletekben ellenőrizhető.

A megfigyelhető törtek többségére Laughlin elmélete nem ad magyarázatot. Egy időben népszerű volt az ún. hierarchikus konstrukció [45, 46], amely az $1/m$ betöltéstől távolodva a kvázirészecskéket ill. -lyukakat tartalmazó rendszerre alkalmazta a Laughlin-típusú korrelációkat. Ez az elv minden páratlan nevezőjű törtre jósol TKH effektust, melyek többségének nincs nyoma a kísérleteken. (Egy hasonló konstrukciót tesztelünk azonban a 3.5. alfejezetben.)

Ennél sikeresebb a kompozit fermion-elmélet [47–51], amely megmagyarázza a megfigyelhető törtek sorozatait, és kvantitatív magyarázatot ad a tört állapotok relatív erősségére (a transzport gap nagyságára), és az elemi gerjesztések tulajdonságaira. Szemléletes megfogalmazásban egy kompozit fermion (KF) [47, 50–53] egy elektron és páros számú ($2p$) kvantált örvény kötött állapota (ennek (1.4–1.5) egyenletek adnak értelmet). A kompozit fermionok Landau-szinteket töltenek fel egy kisebb effektív mágneses térben, amelynek nagysága $B^* = B - 2p n \phi_0$, ahol n az elektronsűrűség. A kompozit fermionok ν^* betöltési száma az elektronokéval $\nu = \nu^*/(2p\nu^* \pm 1)$ kapcsolatban áll. A prominens TKH állapotok $\nu = m/(2pm \pm 1)$ törteknél kompozit fermionok $\nu^* = m$ egész kvantált Hall állapotainak felelnek meg. Az alapállapotra vonatkozó paraméterek nélküli variációs Ansatz $\nu = m/(2pm \pm 1)$ betöltés esetén, egyelőre teljesen spinpolarizált elektronrendszert feltételezve:

$$\Psi_{m/(2pm+1)}^{\text{KF}}(\{z_i\}) = \mathcal{P}_{\text{LLL}} \Phi_m(\{z_i\}) J^{2p}, \quad (1.4)$$

$$\Psi_{m/(2pm-1)}^{\text{KF}}(\{z_i\}) = \mathcal{P}_{\text{LLL}} \Phi_m^*(\{z_i\}) J^{2p}. \quad (1.5)$$

Itt

$$J = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j), \quad (1.6)$$

J^{2p} a korrelációkat beépítő Jastrow-tényező, $\Phi_m(\{z_i\})$ Slater-determináns, amelyben m Landau-szint teljesen betöltött, és $\mathcal{P}_{\text{LLL}}$ vetítés a legalacsonyabb Landau-szint alterére [54–57]. A (1.4) konstrukció esetében „megegyező fluxuscsatolásról”, (1.5) esetében és „fordított fluxuscsatolásról” beszélünk. Ennek jelentése az, hogy az a B^* effektív mágneses tér, amelynek Landau állapotaiból a $\Phi_m(\{z_i\})$ Slater-determináns felépül, azonos vagy ellentétes irányú-e a külső mágneses térrel. Szokás továbbá a J^2 , J^4 , J^6 , stb. Jastrow-tényezőt tartalmazó sorozatokról mint „kétörvényes”, „négyörvényes”, „hatörvényes” stb. kompozit fermion állapotokról beszélni.

A külső térnél kisebb B^* effektív mágneses térben mozgó kompozit fermionok kialakulását számos geometriai interferencia-kísérlet igazolja [58–62]; A TKHE fenomenológiájáért a kompozit fermionok kinetikus energiaszintjeinek kialakulása felelős. Elméleti oldalon az effektív mágneses tér és a KF Landau-szintek létezését két eredmény támasztja alá: (i) a kölcsönható elektronrendszer alacsony energiájú energiaszintjei *tetszőleges* B esetén egy-az-egyhez kapcsolatba hozhatók kölcsönhatásmentes fermionok energiaszintjeivel B^* tér mellett, és (ii) a kölcsönható elektronok alacsonyenergiás állapotai B -nél szoros kapcsolatban állnak kölcsönhatásmentes fermionok állapotaival B^* -nél (kompozit fermionizációval) [50]. A kompozit fermion-elmélet variációs jellege miatt a Laughlin-elmülethez hasonlóan szintén csak numerikusan kidolgozott predikcióin keresztül verifikálható.

Jegyezzük meg, hogy mivel a legalacsonyabb Landau-szintet szimmetrikus mértékben a

$$\eta_{0m}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2^m m!} z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \quad (1.7)$$

egyrészesekés hullámfüggvények feszítik ki; e Landau-szint sokrészesekés hullámfüggvényei a mindenütt jelen lévő $e^{-\frac{1}{4}\sum_i |z_i|^2}$ gaussi tényezőtől eltekintve z_i változók antiszimmetrikus polinómjai, ill. holomorf függvényei. Ez alapján a TKHE kapcsolatba hozható a szimmetrikus polinómok elméletével és a konform térelmülettel. $\mathcal{P}_{\text{LLL}}$ erre a függvénytérre vetít.

A fentiekben feltételeztük, hogy a minta teljesen spinpolarizált. Ha azonban a

$$\Delta_Z = g\mu_B B \quad (1.8)$$

Zeeman-energia kellően kicsi a Coulomb-energiaskálához képest, a spin is szerephez juthat. (Pl. GaAs kvantumgödörben $\Delta_Z/E_C = -0.00585/\sqrt{B} [\text{T}]$.) A kompozit fermion-elmélet keretében [24, 57, 63–67] megengedhető, hogy az $m = m_\uparrow + m_\downarrow$ betöltött egészszámú KF Landau-szint között az egyes spinekből $m_\uparrow$ és $m_\downarrow$ darab forduljon elő. Ezzel a kiterjesztéssel az a döntött mágneses térben megfigyelt jelenség [68–75], hogy Δ_Z hangolásával az egynél nagyobb számlálójú tört állapotok erőssége előbb csökken, majd ismét nő, különböző spinállapotok közötti fázisátmenetként értelmezhető (3. fejezet).

Vannak tört kvantált Hall állapotok, amelyekről a fenti elméletek nem adnak számot. A legfontosabb közülük a második ($n = 1$) Landau-szinten található $\nu = 5/2$ állapot, amely 1987 óta ismert [15], sokszorosan reprodukált, robusztus TKH állapot. Viszonylag meggyőző bizonyítékok vannak továbbá a $\nu = 2 + 3/8$ állapot mellett [76–78]. Mivel a kompozit fermion-elmélet nem ad páros nevezőjű állapotokat, e két állapot mindenképpen új elméletet igényel. Bár a $\nu = 7/3$ és $\nu = 8/3$ állapotok értelmezhetők a $n = 1$ Landau-szint $\nu^{(1)} = 1/3$ és $\nu^{(1)} = 2/3$ Laughlin illetve kompozit fermion állapotaiként, a numerikus eredmények bizonytalanok, a kísérleti adatok anomálisak.

A második Landau-szint állapota jelenleg rendkívül intenzív kutatás tárgyát képezik. Ennek fő oka az, hogy a $\nu = 5/2$ magyarázatára szolgáló, jelenleg legjobban, bár korántsem konklúzivan konfirmált modell Moore és Read Pfaff-polinóm állapota [79] nemábeli gerjesztésekkel rendelkező topologikus fázis, amely utat nyíthat topologikusan védett kvantumszámítógépek létrehozásához [14, 80, 81]. Mivel a Landau-szintek indexére léteznek szokásos léptetőoperátorok, a Moore-Read állapotot a legalacsonyabb Landau-szinten írjuk fel:

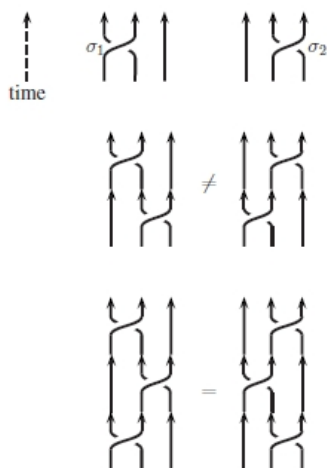
$$\Psi_{\text{Pf}}(\{z_i\}) = \text{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) J^2 e^{-\sum_i \frac{1}{4}|z_i|^2}. \quad (1.9)$$

A betöltési szám $\nu = 1/2$, a fizikai állapot az $n = 0$ Landau-szint két teljesen betöltött spinváltozatából és az $n = 1$ szintre emelt Ψ_{Pf} állapotból áll. A $\text{Pf}(A_{ij})$ Pfaff-polinómot a

$2n \times 2n$ antiszimmetrikus mátrixok esetén a következőképpen definiáljuk:

$$\text{Pf}(A_{ij}) = \sum_{P \in S_N} (-1)^P A_{P1,P2} A_{P3,P4} \dots A_{P(2n-1),P(2n)}, \quad (1.10)$$

ahol S_N N elem permutációinak halmaza, $(-1)^P$ a permutáció paritásának megfelelő előjel. Mivel J^2 kompozit fermionokat képez, $\text{Pf}(g(z_i - z_j))$ pedig valamely kétrészecske állapotok által definiált rendszernek a Pauli elvvel összeegyeztethető általános formája [82] (előfordul pl. a rögzített számú elektronra felírt BCS hullámfüggvényben), Ψ_{Pf} párosított kompozit fermion állapotnak tekinthető. Ha a rendszerben $2k$ kvázilyukat helyezünk el rögzített pozíciókban, 2^{k-1} lineárisan független állapotot kapunk [83]. Ha ezek degeneráltak, a kvázirészecskék adiabatikus mozgatása, amelynek során a kezdeti pozíciójukba térnek vissza (fonás, *braiding*) a degenerált altéren egy $U(2^{k-1})$ unitér transzformációt valósít meg. A kvázirészecske-életutak különböző összefonásához tartozó transzformációk nem feltétlenül kommutálnak; innen a nemábeli (fonási) statisztika fogalma. Fonási statisztikáról természetesen csak két dimenzióban beszélhetünk.



1.2. ábra. A fonási csoport elemei. Fent: két elemi fonási operáció, σ_1 és σ_2 három kvázirészecske esetében. Középen megmutatjuk, hogy $\sigma_1 \sigma_2 \neq \sigma_2 \sigma_1$, azaz a fonási csoport nemábeli. Lent: a fonási csoport egyik azonossága $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. A „nemábeli statisztika” a fonási csoport reprezentációja a kvázirészecskék jelenlétében vett degenerált alapállapotú altéren ható unitér mátrixokkal. A Pfaff-állapotban a degenerációhoz $n \geq 4$ kvázilyuk szükséges. A kép forrása [14].

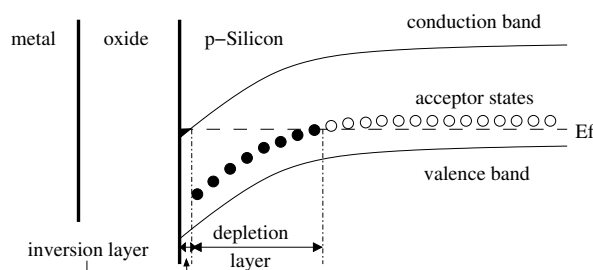
Ha a fonás során a kvázilyukak nem közelítik meg egymást annyira, hogy átfedjenek, ami a mágneses hossz néhányszorosának megfelelő távolságot jelent, a felvett transzformáció csak az életutak összefonásának topológiájától függ. Legalább négy kvázilyuk felhasználásával a degenerált altéren kvantum bitet definiálhatunk, amelyet csak az életutak fonásának nemlokális művelete fordíthat át, ezért lokális perturbációkra érzéketlen, „topológikusan védett a dekoherenciával szemben”. Fonási sorozatokkal a szokásos kvantum-számítástechnikai műveletek előállíthatók [14]. A dolog fantasztikuma nyilvánvaló; hogy léteznek-e az anyagnak nemábeli fázisai, és speciálisan a $\nu = 5/2$ TKH ilyen állapot-e, a közelmúlt és a jelen legintenzívebben kutatott kérdéseinek egyike.

A $n \geq 2$ indexű Landau-szinteken még nem figyeltek meg TKH effektust. A kölcsönhatási effektusokat itt elméletileg vizsgálták először. Fukuyama, Platzman és Anderson korábbi

munkájára [84] támaszkodva Koulov, Fogler és Shklovskii [85, 86] töltéssűrűség-hullámok kialakulását jelezték előre: félegész betöltések környékén az egy irányban modulált csíkozott (*stripe*) fázisét, a félegésektől eltávolodva a hatszöges buborékfázisét. Jólátukat megerősíti, hogy magasabb félegész betöltések környékén a vezetőképesség erősen anizotróp [87–89]. Releváns továbbá a reentráns egész KHE [90, 91]: az $n = 1$ Landau-szinten a kis számú TKH állapot szomszédságában a Hall vezetőképesség visszatér a legközelebbi egész értékre. Ezt a jelenséget úgy magyarázzák, hogy hatszöges buborék-fázis alakul ki, amit a rendezetlenség lokalizál, ezért a részlegesen betöltött Landau-szint nem vesz részt a transzportban. Mindazonáltal *közvetlen* bizonyíték a töltéssűrűség-hullámok kialakulására nincs.

1.3. Kétdimenziós elektronrendszerek megvalósításai

Kétdimenziós elektronrendszer megvalósítható szilícium MOSFET-ek inverziós rétegében (1.3. ábra), molekulanyaláb epitaxiával készített moduláció-dópolt heterostruktúrák heterointerfészein és kvantumgödreiben (1.4. ábra), grafén vékonyrétegekben [1–5], és folyékony hélium felszínén. Az utóbbi esetben nagyon kicsi az elektronsűrűség, ezért számunkra irreleváns.

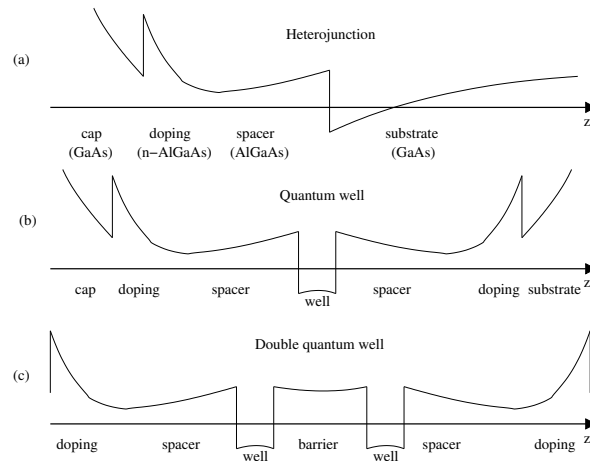


1.3. ábra. Szilícium MOSFET inverziós rétegének kialakulása [92].

Szilícium MOSFET-eknél a mobilitás korlátja alacsony hőmérsékleten a kiürített rétegben elhelyezkedő ionizált donorokon történő szórás. Az egész kvantált Hall effektust ilyen eszközön fedezték fel [35], de érzékenyebb effektusok kimutatására a MOSFET-ek nem alkalmasak. A közelmúltban azonban Si/SiGe heteroszerkezetekben sikerült elérni a TKHE megfigyeléséhez szükséges tisztaságot [93].

Jóval tisztább rendszerek érhetők el moduláció-dópolt GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterointerfészekben. A rendezetlenséget az ionizált donorok térbeli elkülönítésével csökkentik [94]. GaAs és AlAs rácsállandója közel megegyezik (a különbség 0.15%), miközben a tiltott sáv (1.42 eV és 2.163 eV) lényegesen eltér. Az Al_xGa_{1-x}As esetében a rácsállandó lineárisan interpolál és a gap monoton nő $x \approx 0.45$ -ig, ahol a gap indirekté válik. Al_xGa_{1-x}As és Al_yGa_{1-y}As határán, ha $x < y < 0.45$, a vezetési és a vegyértéksáv eltolását a 1.4(a) ábra mutatja. Mind az elektronok, mind a lyukak a GaAs oldalán esnek csapdába. A donorokat az Al_xGa_{1-x}As oldalán helyezük el egy néhány száz Å vastag dópolatlan réteggel elválasztva; az elektronok a GaAs-ba vándorolnak, és a kialakuló elektromos tér nagyjából háromszög profilú csapdapotenciált alakít ki.

Ezzel a módszerrel érhetők el a legnagyobb mobilitás-értékek alacsony (~ 10 mK) hőmérsékleten. A rekord [76, 90] $\mu = 3100$ m²/Vs. Tisztább mintákban adott betöltési számhoz tartozó TKHE alacsonyabb sűrűségnél és mágneses térnél is megfigyelhető, ami szerephez juttathatja a elektronspint [68–75]. A 1.4. ábra három a tipikus alkalmazást mutat be: a heterointerfészt, az egyszeres és a kettős kvantumgödrt. *p*-dópolt (lyukvezető) heterointerfészek esetében is sikerült elérni a TKH effektus megfigyeléséhez szükséges tisztaságot [95, 96].



1.4. ábra. Tipikus $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ heteroszerkezetek. A vonal a vezetési sáv alsó határát jelöli n -dópolást feltételezve. (a) Egyszerű heterointerfész: a kétdimenziós elektrongáz a határ GaAs oldalán alakul ki egy nagyjából háromszög profilú kvantumgödörben. (b) Szimmetrikusan dópolt kvantumgödör. (c) Kettős kvantumgödör.

A grafén esetében a kétdimenziós elektrongáz atomi vékonyságú. Általában a mobilitás nem éri el a GaAs-rendszerek értékeit, de ezért kárpótol az kísérleti technikai viszonylagos egyszerűsége. Egyrétegekben az alacsony energiájú töltéshordozók diszperziója lineáris, tömegtelen Dirac-fermion jellegű. A grafén rendszerek további jellemzője a völgy szabadsági fok jelenléte, kétrétegekben a külső elektromos térrel hangolható tiltott sáv.

Az AlAs kvantumgödörben [97, 98] kialakított elektrongáz két völgygel rendelkezik, melyeknek energiája egymáshoz képest mechanikai deformációval hangolható.

A TKH effektus megfigyelésére alkalmas mintákat sikerült készíteni továbbá CdTe kvantumgödörökben [99], ahol spin-pálya csatolás is szerephez jut.

Szilícium hidrogénnel lezárt (111) felületén [8] hat energetikailag ekivalens völgy alakul ki. Mivel a Zeeman-energia itt viszonylag nagy, $\text{SU}(6)$ szimmetrikus állapotok fordulhatnak elő. SnTe [9–11] és bizmut [12] (111) felületi állapotainak gázában három völgy releváns, és erős az effektív tömeg-anizotrópia. Ezekben a rendszerekben ezidáig csak az egész KHE-t figyelték meg.

ZnO az első oxidrendszer, amelyben TKH effektust figyeltek meg [100]. GaAs mellett ez az egyetlen ismert rendszer, amelyben a páros nevezőjű állapotok is előfordulnak [101]. E rendszer specialitása a viszonylag kis ciklotron-energia (a kölcsönhatás skálájához képest), ami fontosabbá teszi a leárnyékolási effektusokat. MgZnO/ZnO heteroszerkezetekben sikerült elérni $\mu = 100 \text{ m}^2/\text{Vs}$ körüli mobilitást, ami ezt a hordozót szinte egy szintre helyezi a $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ rendszerekkel.

Végül, tömegtelen Dirac-fermionok előfordulását várjuk háromdimenziós topologikus szigetelők felületi állapotainak gázában. Jelenleg csak az egész KHE-ra vonatkozó megfigyeléseink vannak [102], a kölcsönhatási effektusokra nincs kísérleti adat.

1.4. Számítási módszerek

A 2. fejezet munkái standard technikákat alkalmaznak, mint a Hartree-Fock átlagtér-elmélet és a perturbatív renormálási csoport módszer. Ezekkel részletesebben nem foglalkozunk.

Erősen korrelált rendszerek esetében, mint amilyenek 3. és 4. fejezetekben tárgyalt állapotai a mágneses térbe helyezett kétdimenziós elektronrendszernek, elkerülhetetlen numerikus módszerek alkalmazása. Ebben az értekezésben döntően két ilyen módszert alkalmazunk: kis rendszerek egzakt diagonalizációját és a variációs Monte Carlo módszert. A két módszer kiegészíti egymást: egzakt diagonalizációval csak korlátozott mértékben tehetők kísérleti előrejelzések; igazolhatók viszont azok a variációs elméletek, amelyekkel nagyobb rendszerek számolhatók, releváns kísérleti előrejelzések tehetők, amelyeknek fogalmaiban a kísérletek értelmezhetők.

1.4.1. Kompakt geometriák

A tömbi tulajdonságok vizsgálatához kompakt geometriára van szükség. Az egyik megoldás a Haldane gömb [45] (1.5(a) ábra): az elektronok egy gömb felszínén mozognak, amelynek középpontjában egy Q erősségű mágneses monopólus helyezkedik el, azaz a gömb felszínén $2Q\phi_0$ mágneses fluxus halad át. $2Q$ egész szám [103]; a gömb sugara $\sqrt{Q}\ell$.

Az egyrészesecske állapotok Y_{Qlm} monopólharmonikusok [104, 105]:

$$Y_{Qlm}(\theta, \phi) = N_{Qlm} (-1)^{l-m} v^{Q-m} u^{Q+m} \sum_{s=0}^{l-m} (-1)^s \binom{l-Q}{s} \binom{l+Q}{l-m-s} (v^* v)^{l-Q-s} (u^* u)^s,$$

$$N_{Qlm} = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-Q)!(l+Q)!}}, \quad u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}}, \quad v = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}}.$$

E függvények matematikája a spinek algebrájához hasonló; $Q=0$ esetben a monopólharmonikusok a szokásos gömbfüggvények. Az n . Landau-szint az $l=Q+n$ impulzusmomentum-altérnek felel meg, amelynek $2l+1$ állapota van: $-l \leq m \leq l$. A legalacsonyabb Landau-szinten $l=Q$, és

$$Y_{QQm} = \sqrt{\frac{2Q+1}{4\pi} \binom{2Q}{2Q-m}} (-1)^{Q-m} v^{Q-m} u^{Q+m}. \quad (1.11)$$

Ha ez a Landau-szint teljesen betöltött, a hullámfüggvény a normálástól eltekintve

$$\Psi_1 = \prod_{j < k} (u_j v_k - u_k v_j). \quad (1.12)$$

A gömbön a kölcsönhatást a hűrtávolsággal értelmezzük [106]. További részletekért lásd [50, 106].

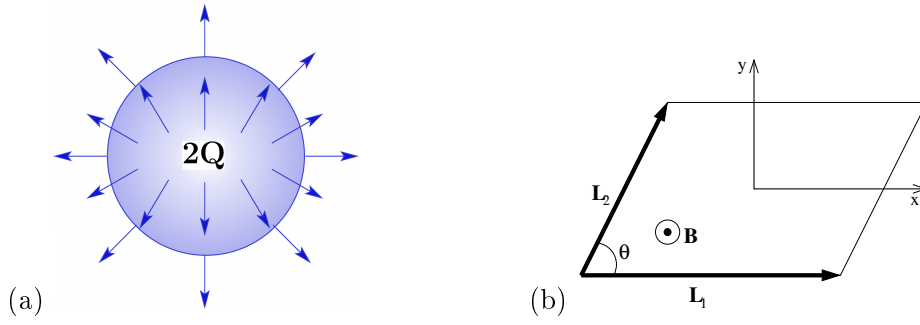
A teljes energia tartalmaz egy egyenletesen elosztott pozitív háttértöltést, amellyel együtt a rendszer semleges:

$$E_N = E_{e-e} - \frac{N^2}{2\sqrt{Q}} E_C, \quad (1.13)$$

ahol az első tag az elektronrendszer energiája, a második az elektron-háttér és háttér-háttér kölcsönhatást veszi figyelembe. Végül soron az egy elektronra jutó E_N/N energia érdekel bennünket a termodinamikai határesetben. Véges rendszerek elektronsűrűsége enyhén függ az N részecskeszámától. Ezért alkalmazzuk az alábbi sűrűségkorrekciót [107]:

$$E'_N = \sqrt{\frac{2Q\nu}{N}} E_N, \quad (1.14)$$

és csak ezután extrapolálunk a $N \rightarrow \infty$ limeszre. Általános tapasztalat, hogy a korrigált energiák $1/N$ függése simább, az így extrapoláció könnyebben elvégezhető.



1.5. ábra. (a) A Haldane gömb felszínén N elektron mozog egy radiális mágneses térben, amelyet egy a gömb középpontjában elhelyezett Dirac-féle mágneses monopólus generál. Az egész vagy félegész Q monopóluserősség jelentése, hogy a felszínen $2Q\phi_0$ fluxus halad át. (b) A tórusz principális tartománya a szövegben használt definíciókkal.

Egy másik értelmes kompakt geometria a *tórusz*, amelyet úgy kapunk, hogy azonosítjuk két nempárhuzamos vektor, $\mathbf{L}_1 = (L_1, 0)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2 \cos \theta, L_2 \sin \theta)$ által kifeszített paralelogramma szemközti oldalait, lásd a 1.5(b) ábrán. A határfeltételek felírásához szükségünk van a mágneses eltolások definíciójára [108]:

$$t(\mathbf{L}) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{p} - i \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})}{\ell^2} \right), \quad (1.15)$$

ahol $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla - e\mathbf{A}$ a kanonikus momentum. Az $\mathbf{A} = -By\hat{\mathbf{x}}$ Landau-mértékben ez speciálisan $t(\mathbf{L})\psi(\mathbf{r}) = \exp(\frac{ix\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{L}}{\ell^2})\psi(\mathbf{r} + \mathbf{L})$ módon hat. A legalacsonyabb Landau-szint állapotainak alakja [109]

$$\psi_0(z) = f(z)e^{-\frac{y^2}{2\ell^2}}, \quad (1.16)$$

ahol $f(z)$ holomorf függvény. Legáltalánosabb esetben a szemközti oldalak azonosítását csavart periodikus határfeltétel megkövetelésével tehetjük meg, $\phi_{1,2}$ csavarási szögek:

$$t(\mathbf{L}_{1,2})\psi(\mathbf{r}) = e^{i\phi_{1,2}}\psi(\mathbf{r}). \quad (1.17)$$

A két feltétel csak akkor kompatibilis egymással, ha a paralelogrammán áthaladó fluxus a fluxuskvantum többszöröse:

$$N_\phi = \frac{|\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2|}{2\pi\ell^2} = \frac{L_1 L_2 \sin \theta}{2\pi\ell^2} \quad \text{egész.} \quad (1.18)$$

Az egyrészecskés pályák a legalacsonyabb Landau-szinten pl.

$$\psi_{0m}(z) = \frac{1}{\sqrt{\ell L_1 \sqrt{\pi}}} \vartheta \left[\begin{matrix} a_m \\ b_m \end{matrix} \right] \left(\frac{\pi N_\phi z}{L_1} \middle| N_\phi \tau \right) e^{-\frac{y^2}{2\ell^2}}, \quad (1.19)$$

$$a_m = \frac{\phi_1}{2\pi N_\phi} + \frac{m}{N_\phi}, \quad b_m = -\frac{\phi_2}{2\pi} - \frac{N_\phi \Re \tau}{2}, \quad m = 0, \dots, (N_\phi - 1), \quad (1.20)$$

ahol a Jacobi elliptikus függvények karakterisztikákkal általánosított alakját használtuk [110]:

$$\vartheta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] (z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+a)^2 + 2i(n+a)(z+b\pi)}. \quad (1.21)$$

A legtöbb ismert variációs hullámfüggvénynek létezik átírata a tóruszra [109, 111–113].

1.4.2. Egzakt diagonalizáció

Az egzakt diagonalizációhoz a Hilbert-tér egy véges alterét kell kijelölnünk, ahol a Hamiltoni-operátor mátrixát kiszámoljuk, diagonalizáljuk, megkapva vagy a teljes spektrumot és saját-állapotokat (ha a mátrix mérete legfeljebb néhány száz tízezer), vagy a legalacsonyabb energiájú néhány állapotot a Lánczos algoritmussal (legfeljebb néhány milliárd dimenzió). A véges alter kijelölése két lépésben történik: (i) Tipikusan egyetlen Landau-szintre korlátozódunk, azaz „elhanyagoljuk a Landau-szintek keveredését”.¹ Ezzel a kinetikus energia egy lényegtelen konstansra redukálódik, és csak a kölcsönhatás mátrixelemeit kell kiszámolnunk. (ii) Kompakt geometriát alkalmazunk (1.4.1. szakasz). Ezzel a Landau-szintek degenerációja véges lesz.

Tóruszon az összetartozó részecskeszám-teljes fluxus párok kapcsolata $N_\phi = N/\nu$. Egyes állapotok csak akkor létezhetnek, ha az N részecskeszám további feltételek teljesít, pl. $\Psi_{m/(2pm\pm1)}^{KF}$ esetében N többszöröse m -nek, Ψ_{Pf} esetében N páros. (Ellenkező esetben homogén alapállapot helyett kvázirészecskék diszperzióját várjuk; helyes modell esetében ezt meg is kapjuk.) Gömbön a kapcsolat $2Q = N/\nu - \delta$, ahol δ konstans offszet. Itt $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2Q} = \nu$; véges rendszerekben a sűrűség eltér a termodinamikai határesetről, és különböző ν betöltési számokhoz tartozó konstrukciókhoz tartozó N és $2Q$ párok kis rendszereknél egybeeshetnek.

A mátrixelemek kiszámolásának jelentős technikai irodalma van [45, 50, 106, 114, 115]. Fontos számunkra a Haldane pszeudopotenciálok fogalma [45]. Két részecske állapota felbontható tömegközépponti és relatív impulzuszórási sajátállapotok bázisán; a V_m pszeudopotenciál a kölcsönhatási energia az $L_z^{\text{rel.}} = m$ relatív impulzuszórási sajátállapotban. (Spinpolarizált esetben csak a páratlan m -ek relevánsak.) A síkon az áttérés az alsó Landau-szint η_{0m} pályáiból alkotott párokról az $\eta_{0m}^{\text{com}}(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}) \eta_{0m}^{\text{rel.}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ szorzatra egyszerű algebrai probléma. A gömbön a Y_{Qlm} pályák párjaiból Clebsch-Gordan együtthatók kifejtéssel megkapható a teljes pályamomentum négyzetének és z -vetületének (L, M) sajátállapotai szerinti felbontás. A μ relatív impulzuszórási a $2l - \mu$ kombinált impulzuszórási momentumnak felel meg [106]. Monopólharmónikusokból álló kétrészecske-állapotok között a mátrixelem

$$\langle m_1, m_2 | V | m_3, m_4 \rangle = \sum_{\mu} \langle l, m_1; l, m_2 | 2l - \mu, m_1 + m_2 \rangle V_{\mu} \langle 2l - \mu, m_1 + m_2 | l, m_3; l, m_4 \rangle. \quad (1.22)$$

A gömbön és a síkon definiált pszeudopotenciálok különbözők, csak a $Q \rightarrow \infty$ határesetben válnak egyenlővé. Például a legalacsonyabb Landau-szinten lévő részecskék pszeudopotenciáljai a síkon

$$V_m = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m + 1/2)}{\Gamma(m + 1)} E_C, \quad (1.23)$$

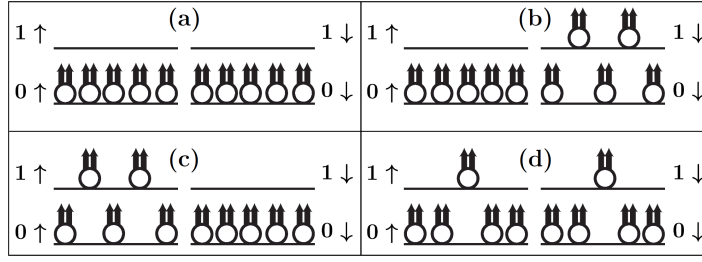
a gömbön [106] $J = 2Q - \mu$ jelöléssel

$$V_{\mu} = 2 \frac{\binom{4Q-2J}{2Q-J} \binom{4Q+2J+2}{2Q+J+1}}{\binom{4Q+2}{2Q+1}^2} E_C. \quad (1.24)$$

1.4.3. A variációs Monte Carlo módszer

Az (1.4), (1.5), (1.9) egyenletek variációs sokrészecske hullámfüggvények. Energiájuk, párkorrelációs függvényük, egzakt állapotokkal való átfedésük, stb. sokdimenziós integrálok szá-

¹A kvantált Hall irodalom elterjedt ez a kissé szerencsétlen terminus. A „Landau-szintek keveredésének elhanyagolása” azt jelenti, nem engedjük meg, hogy a Landau-szintek közötti átmenetek leárnyékolják a kölcsönhatást. A konvencionális kétdimenziós elektrongázban a $B \rightarrow \infty$ limeszben ez jó közelítés, mivel a ciklotron-energia B magasabb hatványával skáláz, mint a kölcsönhatási effektusok. Grafénban nincs ilyen különbség, de a ciklotron-energia eleve magasabb. A „Landau-szintek keveredésének hatása” tkp. a Coulomb-kölcsönhatás leárnyékolását jelenti a szintek közötti átmenetek (polarizáció) által.



1.6. ábra. Kompozit fermion bázisfüggvények, melyeket a spin-szingett $\nu = 2/(4p + 1)$ tört kvantált Hall állapot kompozit fermion diagonalizációjához használunk fel. (a) A perturbálatlan alapállapot. Vezető rendben ez hibridizálódhat a (b), (c) és (d) állapotokkal, ami alacsonyabb energiájú alapállapotot eredményez, mint az (a) állapot.

molását követeli, ami csak a Metropolis Monte Carlo módszerrel lehetséges [116]. Ennek során véletlen bolyongást végzünk az $2N$ -dimenziós konfigurációs téren. A véletlen próbálépések elfogadási valószínűsége a mintavételezendő sokrészecske hullámfüggvény abszolútérték-négyzetének a régi és az ennek véges környezetében véletlenszerűen választott új helyen vett hányadosának függvénye. A hullámfüggvény normálási tényezője irreleváns, ezért minden esetben elhagyjuk. Ebben a módszerben nem lép fel az előjelprobléma. A módszer kritikus része a termalizálás, azaz az önkényes, valószínűtlen kiinduló konfiguráció elfelejtése, ill. a korrelált mintavételezést miatt a helyes hibaszámítás.

1.4.4. Kompozit fermion diagonalizáció

A (1.4-1.5) kompozit fermion modell hangolható paraméter nélküli variációs elmélet. Az eredmények javíthatók egyfajta „konfiguráció kölcsönhatás” módszerrel, melyet kompozit fermion diagonalizációnak nevezünk [117]. Ehhez a módszerhez folyamodunk, ha a KF-ok közötti reziduális kölcsönhatást akarjuk figyelembe venni, vagy ha a legalacsonyabb Landau-szintre történő vetítés hatékony, de közelítő algoritmusán [54, 55] akarunk túlmenni.

A gömbön a megfelelő L összipulzusmomentumú és S összspinű kompozit fermion alapállapothoz hozzáveszünk olyan korrelált állapotokat, amelyek egy, két, stb. kompozit fermion kvázirészecske-lyuk párt (kompozit fermion excitont) tartalmaznak, és kvantumszámuk a keveredést lehetővé teszik (1.6. ábra). A Coulomb kölcsönhatást ezen a bázison diagonalizáljuk. A

$$\mathcal{H}_{IJ} = \int \Psi_I^*(\{z_i\}) \left(\sum_{i < j} \frac{1}{|z_i - z_j|} \right) \Psi_J(\{z_i\}) d^2r_1 \dots d^2r_N \quad (1.25)$$

kölcsönhatási mátrixelemek kiértékeléséhez KF bázison Monte Carlo integrálás szükséges. A korrelált KF bázis elemei általában nem ortogonálisak, sőt előfordul, hogy lineárisan független állapotokat a kompozit fermion-képzés lineárisan függővé tesz. Ezért Gram-Schmidt ortogonalizációt végzünk a szintén Monte Carlo-ból számított

$$\mathcal{O}_{IJ} = \int \Psi_I^*(\{z_i\}) \Psi_J(\{z_i\}) d^2r_1 \dots d^2r_N \quad (1.26)$$

átfedési integrálok felhasználásával. $\mathcal{O}_{IJ}$ és $\mathcal{H}_{IJ}$ kiértékelhető egyazon Monte Carlo futásban. A hatékonyság kedvéért L^2 -alterenként végezzük el a számítást.

Az alapállapot javításához legalább két KF exciton (részecske-lyuk pár) kell, mivel egynek az impulzusmomentuma $L \geq 1$, ezért az alapállapothoz nem keveredik. Az 1.6. ábrán a $\nu =$

$2/(4p+1)$ spin-szinglett állapotok javítását mutatjuk be. A Hilbert-tér az excitonok számának növelésével gyorsan nő. Fordított fluxuscsatolás ($\nu = m/(2pm - 1)$) esetében a kompozit fermion diagonalizáció technikai korlátok miatt jelenleg nem kivitelezhető.

1.4.5. Egyéb módszerek

A diffúziós Monte Carlo módszer (DMC) [118] a próba-hullámfüggvényt csak súlyozott mintavételezésre használja, de az egzakt alapállapotot mintavételezi, annál hatékonyabban, minél jobban közelíti a próbafüggvény az egzakt alapállapotot. Fermionok esetében fellép azonban az előjelprobléma, amelynek tipikus megoldása, a nódusrögzítés (a sokrészecskés hullámfüggvény zérusfelületeinek rögzítése), variációs jellegűvé teszi a DMC módszert. Mágneses térben fázisrögzítésre van szükség [119]. A kvantált Hall irodalomban DMC-t elsősorban a Landau-szintek csonkolásából [120, 121] és a spinnel rendelkező állapotok pontatlanságából [122] eredő hibák csökkentésére használják.

A pályaintegrál kvantum Monte Carlo módszer [123, 124] (PIMC) véges hőmérsékletű számolásokat tesz lehetővé. Itt is szükséges nódus- ill. fázisrögzítés, amit a módszer alapját képező sokrészecskés sűrűségmátrix esetében nagy kihívás. A PIMC módszert eddig még csak véges, kvantum pötty-szerű rendszerekben alkalmazták.

A sűrűségmátrix-renormálás (DMRG) alapvetően egydimenziós alapállapotú módszer; alkalmazásai a TKH irodalomban tipikusan a pályák impulzusmomentum szerinti sorba rendezésén alapulnak. Az összefonódottságra vonatkozó felületi összefüggések miatt a DMRG hamar korlátokba ütközik; tipikusan csak 20-25%-kal több részecske számolható, mint egzakt diagonalizációval [125–128].

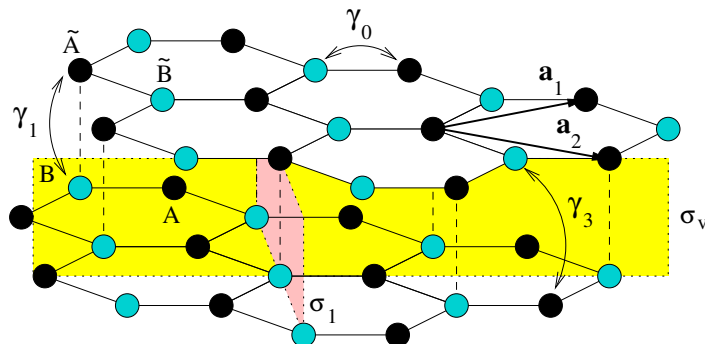
Vannak továbbá térelméleti megközelítések [129–132]. Ezek gyakran kvalitatíve helyes eredményt adnak, de kvantitatív megbízhatóságuk nem olyan fokú, hogy a numerikus modellezést kiváltsák.

2. fejezet

Korrelált elektronrendszerek többrétegű grafén rendszerekben

2.1. Spontán szimmetriasértés és a Lifsic-átalakulás kétrétegű grafénben

A Lifsic-fázisátalakulás [133] a legegyszerűbb topologikus effektus a fémek fizikájában. Az azonos energiához tartozó felületek összefüggőségének változását jelenti momentum térben vagy az elektronsűrűség, vagy külső paraméterek, pl. deformáció hatására. Mivel a felületek, így a Fermi-felület topológiájának változása nem lehet folytonos, a rendszer számos megfigyelhető mennyisége szingularitást mutat a Lifsic-átalakulás során. A Lifsic-átalakulás megfigyelése tömbi fémekben rendkívül nehéz, mivel a Fermi-felület variálásához dőpolni kell, ami rendezetlenné teszi a rendszert; számottevő deformációhoz pedig rendkívül nagy nyomáson kell kísérletezni.



2.1. ábra. A kétrétegű grafén kristályszerkezete Bernal-pakolásban. Az alsó (felső) réteg méhsejtrácsának nem ekvivalens rácspontjait A, B ($\tilde{A}, \tilde{B}$) jelöli. Feltüntettük, hogy az egyes átugrási amplitudók melyik rácspontok között érvényesek.

A kétrétegű grafén (2.1. ábra) ideális rendszer a Lifsic-átalakulás tanulmányozására [134]. Az alacsonyenergiás elektronszerkezetben nincsen gap; a vezetési és vegyértéksávok a hatszöges első Brillouin-zóna határához közel érintik egymást. Közepes energiákon a disperzió nagyjából parabolikus, $\epsilon_{\pm}(p) \approx \pm p^2/2m$. Az elektronok hullámfüggvénye $\phi_B = 2\pi$ Berry-fázist vesz fel, ha a momentum megkerüli a $p = 0$ viszonyítási pontot. Mágneses térben ez a nulla-energiás Landau-szint kétszeres pályadegenerációját okozza (a spin- és völgydegenerá-

C_{6v}	E	C_6^3	C_6^2	C_6^1	σ_v	σ'_v
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1	-1
B_1	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	2	-1	-1	0	0
E_2	2	-2	-1	1	0	0

2.1. táblázat. A C_{6v} csoport karaktertáblája [138].

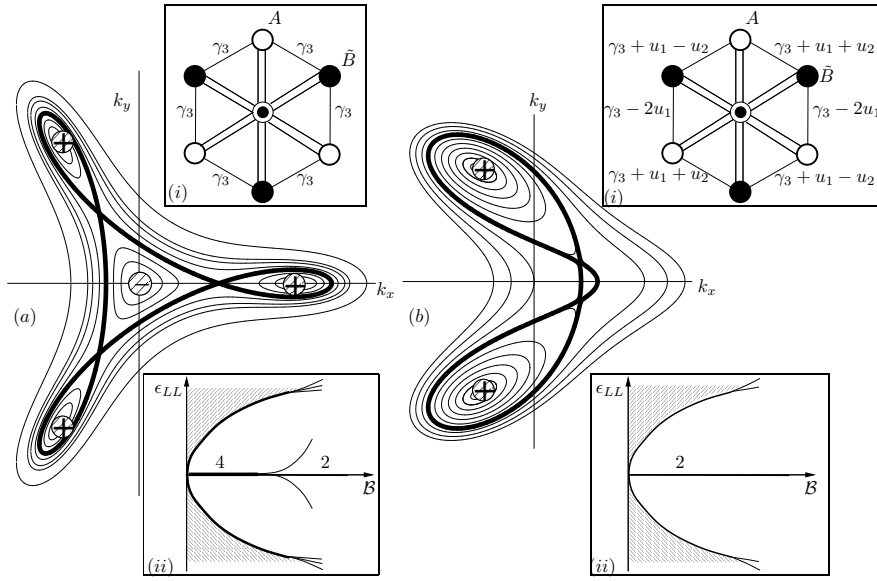
ciókon felül) [134–137]. A kristályszimmetria azonban nem védi ezeket a tulajdonságokat. A parabolikus diszperzió alacsony energián háromszögesen torzul, és a $\epsilon = 0$ állapot négy Dirac-pontra esik szét: egy pontosan az első Brillouin-zóna sarkában, három pedig $2mv_3$ mértékben eltolva a γ_3 rétegek közötti másodsomszéd átugrási amplitudó miatt, lásd a 2.2(a) ábrán. A teljes ϕ_B megmarad: a Brillouin-zóna sarkában a Dirac-pont $\phi_B = -\pi$ fázist ad, a másik három közeli pedig $\phi_B = \pi$ fázist. Gyenge mágneses térben ez megduplázza a nulla energiájú Landau-szint degenerációját [134]. A Lifsic-átalakulás egy és négy Fermi-kontúr között valósul meg. A szokásos fémektől eltérően az elektronsűrűség kapufeszültséggel hangolható.

A kétrétegű grafén pontcsoportja $\mathcal{D}_{3h}$ (az etánmolekula csoportja): (i) háromfogású a pontosan egymás felett lévő B és $\bar{A}$ rádspontokat összekötő, a 2.1. ábrán szaggatott vonallal jelölt tengely, (ii) van egy erre merőleges szimmetriasík (σ_v , sárgával a 2.1. ábrán), (iii) ha azt a síkot tekintjük, amely az előzőre merőleges és a háromfogású tengelyt tartalmazza (σ_1 , rózsaszínnel a 2.1. ábrán), akkor az erre történő tükrözést követően tükröznünk kell a szénrétegek közötti térrész felezősíkjára; a kapott transzformációt σ'_v -vel jelöljük. Ismert, hogy a $\mathcal{D}_{3h}$ csoport izomorf a C_{6v} -vel, ami az egyrétegű grafén pontcsoportja. A továbbiakban a C_{6v} terminológiáját használjuk. A karaktertáblát a 2.1. táblázat mutatja. A kétrétegű grafén tércsoportját ezen túl még valamelyik rácsvektor szerinti eltolás generálja ($\mathbf{a}_1$ vagy $\mathbf{a}_2$ a 2.1. ábrán).

Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, stabil marad-e a Lifsic-fázisátmenet a kölcsönhatási effektusokkal szemben. Ha az elektron-elektron kölcsönhatás nem hoz létre szimmetriasértő állapotot, a sávszerkezet renormálásán keresztül legfeljebb kvantitatíve módosíthatja a Lifsic-átalakulás paramétereit, pl. a kritikus $n_L = (2/\pi^2)(mv_3/\hbar)^2$ sűrűséget. Ha igen, a spektrum kvalitatíve módosul, pl. a Dirac-pontok számát a kisebb szimmetria határozza meg [139–141]. A renormálási csoportelmélet segítségével belátjuk, hogy (i) a n_L sűrűség nem renormálódik, (ii) a legvalószínűbb spontán szimmetriasértés kétrétegű grafénben olyan effektív Hamilton-operátorral írható le, amelyben az átugrási amplitudók aszimmetrikussá válnak, mintha a $A - \bar{B}$ alrácok eltolódnának [139], lásd a 2.2(b) ábrán. Ha elképzeljük, hogy v_3 hangolható, a szimmetria egy elsőrendű kvantum-fázisátalakulás során sérül, amelyben a spektrum gap nélküli marad, de két Dirac-pont megsemmisül, és a megmaradók mindegyike $\phi_B = \pi$ Berry-fázist hordoz; a nulla-energiás Landau-szint degenerációja fele lesz, mint a teljes C_{6v} szimmetria esetében. A Berry-fázisok határozzák meg a nulla energiájú Landau-szintek degenerációját, ami megjelenik pl. a Shubnikov-de Haas oszcillációkban; bizonyos paraméterértékek esetén a véges hőmérsékletű fázisátalakulás elsőrendű, ami a transzportban bistabil viselkedés okozhat.

A kétrétegű grafén alacsonyenergiás elmélete a Brillouin-zóna K és K' sarkainak környékén érvényes [134–137] kb. $\mathcal{E}_0 \simeq 0.3$ eV energiáig. A Hamilton-operátor

$$\mathcal{H} = \int d^2r \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_w + \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_{sr}) \Psi_\sigma(\mathbf{r}). \quad (2.1a)$$



2.2. ábra. Konstans energiájú vonalak kétrétegű grafén spektrumában. Az energia függvényében akkor történik meg a Lifsic-átalakulás, amikor a Fermi felület metszi a szeparátrixot (vastag vonal), amely elválasztja (a) a grafén rács C_{6v} szimmetriájával bíró, és (b) a $C_{6v} \rightarrow C_{2v}$ sértett szimmetriájú tartományt. A körök a Dirac-pontokat jelzik, és $\pm$ a $\phi_B = \pm\pi$ Berry-fázist. A bennfoglalt ábrák a sávszerkezet szoros kötésű modelljét (fent) és a Landau-szintek mágneses tér-függését vázlatát mutatják (lent), feltüntetve a spin- és völgydegenerációt. Az alrácsok jelölése a 2.1. ábrával megegyező, a $\odot$ helyen egymás felett vannak a $\tilde{A}$ és B alrácsok.

A kétszeresen előforduló $\sigma = \pm 1/2$ indexekre összegzünk. A négykomponensű

$$\Psi_\sigma = \left(\hat{\psi}_\sigma^{A,K}, \hat{\psi}_\sigma^{\tilde{B},K}, \hat{\psi}_\sigma^{\tilde{B},K'}, -\hat{\psi}_\sigma^{A,K'} \right) \quad (2.1b)$$

fermion-tér a völgy (KK') és alrács ($A\tilde{B}$) komponenseken vesz fel értékeket [134] (az A és $\tilde{B}$ alrácsok más rétegen vannak). Az ezen a négydimenziós téren ható mátrixokat $\hat{\tau}_i^{A\tilde{B}}, \hat{\tau}_i^{KK'}$ Pauli-mátrixok direkt szorzataként ábrázoljuk ($i = 0, 1, 2, 3$):

$$\hat{M}_i^j \equiv \hat{\tau}_i^{KK'} \otimes \hat{\tau}_j^{A\tilde{B}}, \quad (2.1c)$$

$\hat{\tau}_0^{\dots}$ a 2×2 egységmátrix.

A kinetikus energia $\hbar = 1$, $k_{x,y} = -i\partial_{x,y}$ konvenciókkal

$$\mathcal{H}_0(k_{x,y}) = -\frac{1}{2m} \left(\hat{M}_3^1 (k_x^2 - k_y^2) - 2\hat{M}_3^2 k_x k_y \right). \quad (2.1d)$$

A 2.2(a) ábrán látható spektrumot a háromszöges torzulási tag,

$$\mathcal{H}_w(k_{x,y}) = v_3 \left(\hat{M}_0^1 k_x + \hat{M}_0^2 k_y \right), \quad (2.1e)$$

és (2.1d) együttesen határozzák meg.

A legerősebb tag a hosszútávú Coulomb-kölcsönhatás:

$$\mathcal{H}_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon} \int d^2\mathbf{r}' \frac{\Psi_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.1f)$$

Azonban a leányékolódás miatt nem skálázódik, és önmagában nem okoz szimmetriasértést. A szimmetriákat a marginális rövid távú kölcsönhatás tükrözi:

$$\mathcal{H}_{sr} = \frac{2\pi}{m} \sum_{i,j=0}^3 g_i^j \hat{M}_i^j \left(\Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{M}_i^j \Psi_\sigma(\mathbf{r}) \right). \quad (2.1g)$$

A g_i^j csatolások nem mind függetlenek [142]. A kétrétegű grafén $\mathcal{C}_{6v}$ szimmetriája az alábbi megkötéseket implikálja:

$$\begin{aligned} g_1^1 = g_2^2 = g_1^2 = g_2^1 = g_G, \quad g_3^1 = g_3^2 = g_{E_1}, \quad g_0^3 = g_{B_1}, \quad g_3^0 = g_{A_2}, \quad g_3^3 = g_{B_2}, \\ g_1^3 = g_2^3 = g_{E_1'}, \quad g_0^1 = g_0^2 = g_{E_2}, \quad g_1^0 = g_2^0 = g_{E_2'}, \end{aligned} \quad (2.1h)$$

ahol az index a kiterjesztett pontcsoport irreducibilis reprezentációját jelöli [143]. Pl. E_1 kétdimenziós irreducibilis reprezentáció, amely nem vált előjelet C_2 elforgatásokra, és a 2.2(b) ábrán mutatott szimmetriasértésnek felel meg, B_2 egydimenziós irreducibilis reprezentáció a rétegszimmetria $\mathcal{C}_{6v} \rightarrow \mathcal{C}_{3v}$ sérülését írja le.

A (2.1) modell renormálási csoport vizsgálata a 2.3. ábra diagramjain alapul. Végig Matsubara-formalizmusban dolgozunk. Látszólag a Coulomb-kölcsönhatás a legrelevánsabb operator, azaz perturbatív lineáris (nem pedig logaritmikus) divergenciát ad. Azonban ez a kölcsönhatás a leányékolódás miatt marginálissá válik (2.3(c) ábra), az értéke $\simeq 1/[N\Pi(q, \omega)]$, ahol $\Pi(q, \omega)$ a polarizáció. A 2.3(c) ábrán szereplő közelítésnek formális igazolása az $1/N$ sorfejtés, ahol $N = 4$, és a hosszúhullámú limesz. Megjegyezzük, hogy g_0^0 a Coulomb-kölcsönhatás mellett szerepel, ezért kiesik, a csatolási állandók lefutását nem befolyásolja. A többi g_i^j konstans kicsinek tekintjük, és egy-hurok rendben vesszük őket figyelembe [144].

Mivel a polarizáció operátorának nincs logaritmikus divergenciája és minden kölcsönhatást egy-hurok rendben veszünk figyelembe, a levágás részletei nem lényegesek. Minden lépésben megszorítjuk a hurok hullámvektorát a $\mathcal{E} - d\mathcal{E} < k^2/2m(\mathcal{E}) \leq \mathcal{E}$ intervallumra. Majd újra-skálázunk, $\psi \rightarrow (1 + \delta Z/2) \psi$, (δZ definíciója a 2.3(d) ábrán), hogy a $\partial_\tau \psi$ tag változatlan maradjon. A skalár vertex nem renormálódik a mértékinvariancia miatt, lásd a 2.3(f) ábrán. m és v_3 renormálását a 2.3(e) ábra mutatja, aminek alapján

$$\frac{d \ln m}{dl} = -\frac{d \ln v_3}{dl} = -\alpha_1/N, \quad (2.2a)$$

ahol $l \equiv \log(\mathcal{E}_0/\mathcal{E})$, és $D(x) = \left[\ln \left(\frac{4x^2+4}{4x^2+1} \right) + \frac{2 \arctan(x) - \arctan(2x)}{x} \right]^{-1}$ rövidítéssel

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{D(x)}{(1+x^2)^2} \frac{1-3x^2}{(1+x^2)} \approx -0.078, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{2D(x)}{(1+x^2)^2} \approx 0.469, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{D(x)}{(1+x^2)^2} \frac{D(x)}{4} \approx 0.066. \end{aligned}$$

A lehetséges szimmetriasértéseket a rövid távú kölcsönhatási tagok renormálása írja le:

$$\begin{aligned} \frac{dg_i^j}{dl} &= -\delta_{i3}(\delta_{j1} + \delta_{j2}) \frac{\alpha_3}{N^2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 B_i^j}{N} g_i^j - 2N B_i^j (g_i^j)^2 - \\ &\quad - \sum_{k,l=0}^3 \frac{\alpha_2}{N} D_{i;k}^{j;l} g_k^l - \sum_{k,l=0}^3 \sum_{m,n=0}^3 \widetilde{C}_{i;km}^{j;ln} g_k^l g_m^n \quad (2.2b) \end{aligned}$$

tagot tartalmazó renormálási csoport közelítések már előfordultak az irodalomban [139–141].

Az elektronok (lyukak) sűrűsége, ahol a Fermi-felület topológiája megváltozik, (2.1d) és (2.1e) alapján $n_L = (2/\pi^2) (mv_3/\hbar)^2 \simeq 2 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ($m = 0.035$ és $v_3 \simeq 10^5 \text{ m/s}$ felhasználásával). (2.2a) egyenlet szerint az elektron-elektron kölcsönhatás hosszú távú része nem renormálja n_L -t, de a nyeregponatok $\mathcal{E}_L \equiv mv_3^2/2$ energiáját igen. Ennek a nyers értéke a fenti m , v_3 felhasználásával megbecsülhető: $\mathcal{E}_L \simeq 1 \text{ meV}$. A renormált érték $\tilde{\mathcal{E}}_L = \mathcal{E}_L (\mathcal{E}_0/\mathcal{E}_L)^{\frac{\alpha_1}{N}} \simeq \mathcal{E}_L (\mathcal{E}_L/\mathcal{E}_0)^{0.02}$; ilyen kicsi változás megfigyelhetetlen.

A g_i^j csatolási állandók divergenciája a renormálás során szimmetriasértést jelez, olyan rendparaméterrel, amely a megfelelő irreducibilis reprezentációból származik (további részletekért lásd [145]). Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E}_0$ energiaskálán a rövid távú kölcsönhatások elhanyagolhatóak, azaz $g_i^j = 0$. A konstans tagok jelentése az (2.2b) egyenletben az, hogy ez nem fixpont, mert g_{E_1} és g_{B_1} csatolások eltávolodnak tőle (2.1h). Ha g_{B_1} -t elhagyjuk, g_{E_1} -re az adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dg_{E_1}}{dl} &= -\frac{c_1}{N(N+2)} - 2(N+2)(g_{E_1} - c_2)^2, \\ c_1 &\approx \left(\frac{\alpha_3(N+2)}{N} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{8N} \right), \quad c_2 \approx \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4N(N+2)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mivel $N > 0$ esetén $c_1 > 0$, nincs fixpont; bár α_3 kicsi, ha elhanyagolnánk, az nemtriviális fixpontot eredményezne $g_{E_1} \simeq 1/N^3$. (2.3) megoldása

$$g_{E_1}(l) = c_2 - \sqrt{\frac{c_1}{2N(N+2)^2}} \cot \left(\sqrt{\frac{2c_1}{N}} (l_0 - l) \right), \quad (2.4)$$

ahol $l_0 \sim 7.1$ a feltétel $g_{E_1}(l=0) = 0$ alapján $N = 4$ -re. Ha figyelembe vesszük g_{B_1} -t, a pólus $(g_{E_1}; g_{B_1}) \propto (l_0 - l)^{-1}(-1.67; 0.85)$ módon eltolódik. (Megjegyezzük, hogy (2.4) egyenlet instabil megoldása a csatolási állandók folyását megadó (2.2b) egyenletnek, és csak akkor értelmes, ha a többi állandó pusztá értéke $\lesssim 1/N$, ezért $\mathcal{E}_1$ energián még mindig kicsik. A stabil irányokat és vonzáskörzetüket [145] tárgyalja.)

Ez a divergencia szimmetriasértést implikál $\mathcal{E}_{E_1} \simeq E_0 e^{-7.1} \simeq 0.3 \text{ meV}$ környékén. Mivel $\mathcal{E}_{E_1}$ és $\mathcal{E}_L$ azonos nagyságrendbe esnek, egyszerre kell őket vizsgálni. A pontosabb elméleti összehasonlításhoz szükségünk lenne a kölcsönhatási konstansok kezdeti értékeinek jobb ismeretére, ami nem áll rendelkezésünkre. Ezért a lehetséges fázisátalakulásokat a $\Upsilon \equiv \mathcal{E}_{E_1}/\mathcal{E}_L$ arány függvényében diszkutáljuk.

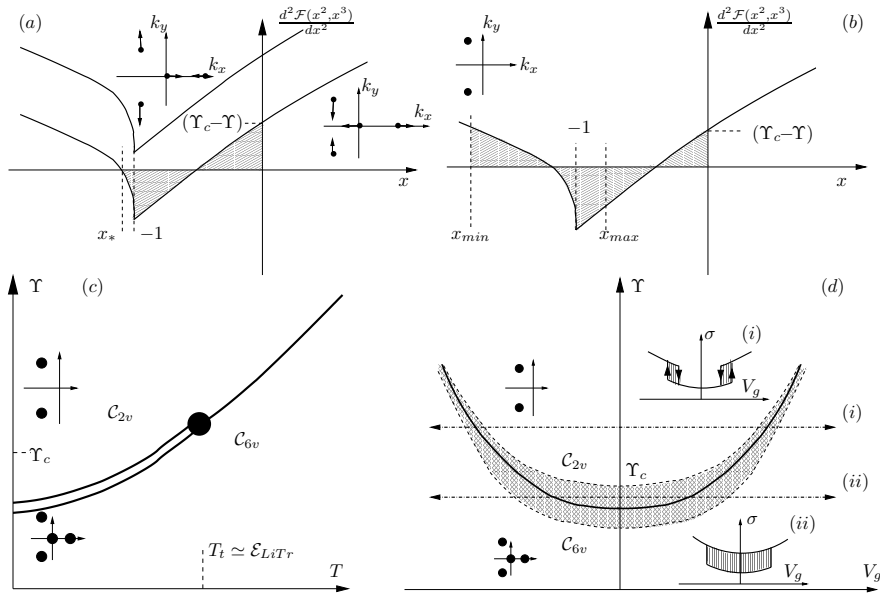
Ha $\Upsilon \lesssim 1$, g_{E_1} növekedése megszakad és nem történik szimmetriasértés. A g_{E_1} csatolás lehetséges divergenciája $\Upsilon \gtrsim 1$ esetén szimmetriasértés jele; anomális átlagok jelennek meg a $\mathcal{C}_{6v}$ csoport E_1 irreducibilis reprezentációja szerint.

$$u_j = \frac{2\pi}{m} \langle \Psi_\sigma^\dagger \hat{M}_3^j \Psi_\sigma \rangle, \quad j = 1, 2. \quad (2.5)$$

A fázisátalakulás vizsgálatához tekintsük a Landau szabadenergia-sűrűséget. Ennek formája

$$f = n_L \mathcal{E}_L \mathcal{F}_\Upsilon \left(\frac{u_1^2 + u_2^2}{\mathcal{E}_L^2}; \frac{u_1^3 - 3u_1 u_2^2}{\mathcal{E}_L^3} \right) \quad (2.6)$$

a szimmetriák és dimenziók miatt. Ha $\Upsilon < \Upsilon_c$ (ahol $\Upsilon_c \simeq 1$), a $\mathcal{F}(x, 0)$ függvénynek lokális minimuma van $x = 0$ -ban, ami $\Upsilon > \Upsilon_c$ esetén maximummá válik. Mivel a $\mathcal{C}_{6v}$ szimmetria megenged egy köbös invariánst is, a zérus hőmérsékleti fázisátalakulás Υ függvényében elsőrendű.



2.4. ábra. (a,b) Az átlagtér-elméletben kapott energia görbülete a legmeredekebb irányban. A négyzetgyökös szingularitást a Dirac-pontok ütközése okozza (bennfoglalt ábra) Ha $\Upsilon < \Upsilon_1 < \Upsilon_c$, további lokális minimum és maximum alakul ki az (a) esetben, amelyekre $|u_1^{\max}| > \mathcal{E}_L$, azaz csak két Dirac-pont marad (b). A teljes besatírozott terület zérus. (c,d) A véges hőmérsékletre tartozó (c) és zérus hőmérsékletű (d) fázisdiagram vázlata. Ez utóbbit a V_g kapufeszültség vezérli. A bennfoglalt ábrák a vezetőképesség hiszterézis-tartományát mutatják (besatírozott terület) a diagramon felvázolt irányokban.

A rendparaméter értéke a rendezett fázisban olyan, hogy a spektrumban két Dirac-pont van, mint a 2.2(b) ábrán. Átlagtér-közellítésben az egyrészezkés Hamilton-operátor

$$\mathcal{H}_{\text{MF}} = \mathcal{H}_0(k_{x,y}) + \mathcal{H}_w(k_{x,y}) - u_1 \hat{M}_3^1 - u_2 \hat{M}_3^2. \quad (2.7)$$

$u_1 = -\mathcal{E}_L, u_2 = 0$ mellett két Dirac-pont találkozik és eltűnik, és létrejön a 2.2(b) ábrán látható sávszerkezet. $u_1 = 3\mathcal{E}_L, u_2 = 0$ esetén három Dirac-pont találkozik, és ismét két Dirac-ponttal rendelkező állapot jön létre.

Az energia átlagtér-közellítésben

$$f_{\text{MF}}(u_1, u_2) = (\Upsilon_c - \Upsilon) \frac{mu_i u_i}{2\pi} + \int \frac{d^2 k}{\pi^2} \left(\epsilon(\mathbf{k}) - \epsilon(\mathbf{k})|_{u_1,2=0} - \frac{u_i u_j}{2} \frac{\partial^2 \epsilon(\mathbf{k})}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_{u_1,2=0} \right), \quad (2.8)$$

ahol $\epsilon \mathcal{H}_{\text{MF}}$ negatív sajátértéke [(2.7) egyenlet], és az ismételt $i, j = 1, 2$ indexekre most összegzünk. Az energiasűrűség görbülete (2.8) alapján [2.4. ábra] arra utal, hogy u_1 alakul ki a 2.2(a) ábrától 2.2(b) ábrához történő fázisátmenet során.

Az átlagtérelmélethez adódó további korrekciók nem szüntethetik meg az ütköző Dirac-pontokból adódó szingularitásokat, mivel a (2.7) alacsonyenergiás Hamilton operátort szimmetria védi. Ezért úgy gondoljuk, a Dirac-pontok számára vonatkozó állításunk általánosabb, mint az átlagtér-elméleti levezetés.

A kvantum fázisátalakulás elsőrendűsége fontos következményekkel jár a véges hőmérsékletű fázisdiagramra, lásd a 2.4(c) ábrán. Alacsony hőmérsékleten, $T \ll \mathcal{E}_L$, az átalakulás

elsőrendű marad valamilyen T_t trikritikus pontig [139]. A kvantum-fázisátalakulás vizsgálható az n sűrűség függvényében, a fázisdiagramot lásd a 2.4(d) ábrán. A rendezett fázisban a Dirac-pontok száma változatlan marad.

A fázisdiagram részletesebben feltérképezi a [145] cikk, amely azonban a háromszöges torzulás és a Lifsic-fázisátalakulás kérdésére nem tér ki.

A kísérletek vegyes képet mutatnak. Mayorov *et al.* [146] minimális vezetőképesség-mérései konzisztensek két Dirac-kúp jelenlétével, azaz a nematikus fázissal. Velasco *et al.* [147] szigetelő és gap nélküli viselkedést mutató mintákat is találtak; az első esetben a nematikus fázis kizárható. Eredményeiket a réteg antiferromágneses állapot melletti bizonyítékként értelmezték. Végül vannak mérések [148, 149], amelyek a nematikus, a réteg antiferromágneses, valamint a kvantált spin Hall állapottal is konzisztensek. Azt mondhatjuk, hogy a probléma még nyitott, és könnyen elképzelhető, hogy a tényleges fizikai rendszerekben az elméletek által nem kellően figyelembe vett effektusok választanak egymáshoz közeli energiájú rendeződési módok között.

2.2. Kvantált Hall állapotok és Landau-szinten belüli gerjesztéseik dőpolatlan kétrétegű grafénben

Bernal-pakolású kétrétegű grafénen (2.1. ábra) [3] végzett magnetotranszport mérések [148–151] megmutatták, hogy a jellegzetes, nyolcszorosan kvázidegenerált (spin $\sigma = \uparrow, \downarrow$, völgy $\xi = \pm 1$, és pálya $n = 0, 1$) zérus energiájú Landau-szintje a ν betöltési szám minden egész értékénél felhasad. Ezeket az állapotokat kvantált Hall ferromágnesességgel magyarázzuk [18, 152, 153]. A $\nu = 0$ betöltésnél a megszokottól eltérően a R_{xx} hosszanti ellenállás divergál mind csökkenő hőmérséklet, mind növekvő mágneses tér esetén egy bizonyos mintafüggő küszöb mágneses tér felett. Hasonló jelenséget figyeltek meg egyrétegű grafénben [154, 155], és más részecske-lyuk szimmetrikus félvezetőrendszerekben [156]. Ez szokatlan viselkedés, de a kvantált Hall fizikával összeegyeztethető [157]. Zhao *et al.* [150] azt találták, hogy $\nu = 0$ -nél a gap mágneses tér-függése $\sqrt{B_\perp}$, amint a Coulomb kölcsönhatási effektusoktól várható, nagy mobilitású felfüggesztett mintákban viszont Feldman *et al.* [148] $B_\perp$ -ben lineáris gapet találtak, amely alig függ $B_\parallel$ -tól. A gap lineáris $B_\perp$ -függését, amely egy meglehetősen nagy terekig fennáll, Nandkishore és Levitov [140, 141, 158] és Gorbar *et al.* [159, 160] a dinamikus leárnýékolás figyelembe vételével magyarázták.

Mágneses tér nélkül, merőleges elektromos térben tiltott sáv alakul ki [161–163]. Ha van $B_\perp$ merőleges mágneses tér is, az előbbi tiltott sáv befolyásolja a Landau-szinteket; de a kicserélődési kölcsönhatásnak a kvantált Hall ferromágnesességben betöltött szerepe miatt az alacsonyenergiás fizikát egész betöltéseknél együttesen határozzák meg az elektronok közötti kölcsönhatás, a $\Delta_Z = g\mu_B B_\perp$ Zeeman-energia, és a rétegek közötti $\Delta_L = edE_\perp - \Delta n/(2\epsilon_0)$ potenciális energia-különbség (Δn az elektronsűrűség eltérése a rétegek között, $d = 0.335$ nm a rétegtávolság). Átlagtér-közelítésben a rendszer alapállapota spontán sérti [159–161] a (közelítő) spin és völgy szimmetriákat [152]. Az alapállapot ferromágneses $\Delta_L \ll \Delta_Z$ limeszben, és völgy-polarizált $\Delta_L \gg \Delta_Z$ limeszben. Mivel a Coulomb-kölcsönhatás meglehetősen erős a Landau-szintek szeparációjához képest, $E_C/E_2 \approx 11.7/[\sqrt{B} [\text{T}]\epsilon_r]$ (E_2 a legnagyobb különbség Landau-szintek között, lásd alább), a Landau-szintek közötti átmenetek leárnýékoló hatása fontos lehet [140, 141, 158–160]. (Itt ϵ_r a kétrétegű grafén és környezete dielektromos állandója.) Ezért amikor a kétrétegű grafén $G_{xy} = 0$ állapotának gerjesztéseit vizsgáljuk, e két szimmetriasértő kvantált Hall állapotból indulunk ki. Azonban Δ_L helyett az $E_\perp$ merőleges elektromos teret tekintjük hangolható paraméternek.

Landau-szintek és szimmetriasértő alapállapotok $\nu = 0$ esetén

Az első Brillouin-zóna K ($\xi = 1$) és K' ($\xi = -1$) sarkainak közelében a kétrétegű grafén elektronszerkezetét szoros kötésű közelítésben az alábbi Hamilton-operátor adja [134, 135]:

$$\mathcal{H}_\xi = \xi \begin{pmatrix} \frac{\Delta_L}{2} & 0 & 0 & v\pi^\dagger \\ 0 & -\frac{\Delta_L}{2} & v\pi & 0 \\ 0 & v\pi^\dagger & -\frac{\Delta_L}{2} & \xi\gamma_1 \\ v\pi & 0 & \xi\gamma_1 & \frac{\Delta_L}{2} \end{pmatrix} - \Delta_Z \hat{\sigma}_z, \quad (2.9)$$

ahol $\pi = p_x + ip_y$ és $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}$, $v = \sqrt{3}a\gamma_0/2\hbar \approx 10^6$ m/s a rétegen belüli sebesség, és $\gamma_1 \approx 0.39$ eV a rétegek közötti átugrási amplitúdó. Ez a Hamilton-operátor az $[\psi_A, \psi_{\tilde{B}}, \psi_{\tilde{A}}, \psi_B]$ alrács-amplitúdókon hat a K völgyben, és a $[\psi_{\tilde{B}}, \psi_A, \psi_B, \psi_{\tilde{A}}]$ amplitúdókon a K' völgyben. Felfüggesztett mintára gondolva $\epsilon_r = 1$, $g = 2$ paramétereket használunk.

A grafit Slonczewski-Weiss-McClure modelljéből [164–166] elhagyjuk a $\gamma_3, \gamma_4, \Delta'$ paramétereket; ismert [134, 135], hogy $\gamma_3 \approx 0.1\gamma_0$ elhagyása kétrétegű grafén esetében alig befolyásolja a Landau-szinteket reális $B_\perp$ esetén, ami arra utal, hogy a γ_3 miatti pályakeveredés elhanyagolható. Irodalmi értékekkel számolva $\gamma_4 \approx 40$ meV és $\Delta' \approx 7$ meV kicsi a Coulomb kölcsönhatás E_C energiaskálájához képest.

A $\mathbf{A} = -B_\perp y \hat{\mathbf{x}}$ Landau-mértékben a szintek és a pályák alakja [136, 167]

$$\psi_{0\xi q}(\mathbf{r}) = [\zeta_{0q}(\mathbf{r}), 0, 0, 0]^\text{T}, \quad (2.10)$$

$$\psi_{1\xi\alpha q}(\mathbf{r}) = [A_{\alpha\xi}^1 \zeta_{1q}(\mathbf{r}), 0, iC_{\alpha\xi}^1 \zeta_{0q}(\mathbf{r}), iD_{\alpha\xi}^1 \zeta_{0q}(\mathbf{r})]^\text{T},$$

$$\psi_{n\xi\alpha q}(\mathbf{r}) = [A_{\alpha\xi}^n \zeta_{nq}(\mathbf{r}), B_{\alpha\xi}^n \zeta_{n-2,q}(\mathbf{r}), iC_{\alpha\xi}^n \zeta_{n-1,q}(\mathbf{r}), iD_{\alpha\xi}^n \zeta_{n-1,q}(\mathbf{r})]^\text{T},$$

ahol $n \geq 2$; $1 \leq \alpha \leq 4$ ($E_{n\alpha} < E_{n,\alpha+1}$), és ζ_{nq} a szokásos kvadratikus diszperziójú kétdimenziós elektrongáz egyrészcsekés pályája:

$$\zeta_{nq}(\mathbf{r}) = \frac{e^{iqx - (y/\ell - q\ell)^2/2}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}2^n n! \ell}} H_n\left(\frac{y}{\ell} - q\ell\right); \quad (2.11)$$

$H_n(x)$ Hermite-polinóm. Bevezetve a

$$t = \frac{\gamma_1 \ell}{v\hbar}, \quad \delta = \frac{\Delta_L \ell}{2v\hbar},$$

dimenziótlan paramétereket, az $n = 1$ Landau-szintek $E_{1\alpha\xi} = \hbar v \epsilon_{1\alpha\xi} / \ell$, $\alpha = 1, 2, 3$ megkaphatók a szekuláris egyenletből, és a pályák amplitúdói

$$A_{\alpha\xi}^1 = -\frac{\xi(t^2 - \epsilon^2 + \delta^2)}{\sqrt{2}tN_{1\alpha}}, \quad C_{\alpha\xi}^1 = \frac{1}{N_{1\alpha}}, \quad D_{\alpha\xi}^1 = \frac{\epsilon + \xi\delta}{tN_{1\alpha}},$$

ahol $N_{1\alpha}$ a megfelelő normálási tényező. A $n \geq 1$ Landau-szintek $E_{n\alpha\xi} = \hbar v \epsilon_{n\alpha\xi} / \ell$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ hasonlóképpen kaphatók meg. A pályák konstans amplitúdói

$$A_{\alpha\xi}^n = \frac{1}{N_{n\alpha}}, \quad B_{\alpha\xi}^n = \frac{\xi\sqrt{2n-2}}{(\epsilon + \xi\delta)N_{n\alpha}} C_{\alpha\xi}^n, \quad C_{\alpha\xi}^n = \frac{\xi}{tN_{n\alpha}} \left(\sqrt{2n} - \frac{(\epsilon - \xi\delta)^2}{\sqrt{2n}} \right), \quad D_{\alpha\xi}^n = -\frac{\xi(\epsilon - \xi\delta)}{\sqrt{2n}N_{n\alpha}},$$

megfelelő $N_{n\alpha}$ normálási tényezővel.

Az energia nullpontja környékén speciálisan

$$E_{1,\alpha=2,\xi\sigma} = \frac{\xi\Delta_L}{2} \left(\frac{t^2 - 2}{t^2 + 2} + \frac{32\delta^2 t^2}{(t^2 + 2)^4} + O(\delta^5) \right) + \Delta_Z \sigma,$$

$$E_{0\xi\sigma} = \frac{\xi\Delta_L}{2} + \Delta_Z \sigma.$$

A $\psi_{0\xi\sigma q}$ és $\psi_{1,\alpha=2,\xi\sigma q}$ állapotok alkotják a zérus energiájú Landau-szintet. Mivel a $n = 0$ ($n = 1$) állapotok a K völgyben teljesen (főként) az A alrácson, a K' völgyben a $\tilde{B}$ alrácson vannak, a zérus energiájú Landau-szintjen a völgy szabadsági fok a réteg szabadsági fokkal együtt jár.

Ezzel a jelöléssel a ferromágneses állapot [152] $|\text{f.m.}\rangle = \prod_{q\xi} \hat{a}_{0,\xi,\uparrow q}^\dagger \hat{a}_{1,\alpha=2,\xi,\uparrow q}^\dagger |0\rangle$, és a völgy-polarizált állapot $|\text{v.p.}\rangle = \prod_{q\sigma} \hat{a}_{0,\xi=1,\sigma q}^\dagger \hat{a}_{1,\alpha=2,\xi=1,\sigma q}^\dagger |0\rangle$. Itt $|0\rangle$ végtelen sok ($n \geq 2$, $\alpha = 1, 2$, $\xi = \pm 1$ és $\sigma = \uparrow, \downarrow$) betöltött Landau-szint „vákuuma”, és $\hat{a}_{n\alpha\xi\sigma p}^\dagger \equiv \hat{a}_{Np}^\dagger$ a ψ_{Np} állapotban hoz létre részecskét. Δ_L különbözik a két állapotban:

$$\Delta_L^{\text{f.m.}} = eE_\perp d, \quad \Delta_L^{\text{v.p.}} = ed(E_\perp - E_0), \quad (2.12)$$

ahol $E_0 \equiv e^2 d / (\pi \epsilon_0 \epsilon_r \ell^2) \approx 8.75 \times 10^6 B[\text{T}] / \epsilon_r \text{ V/m}$. Így az $|\text{v.p.}\rangle$ állapotban Δ_L kisebb, mint a leárnýékolatlan értéke $\sim 34B [\text{T}] / \epsilon_r \text{ K}$, ami a $\Delta_Z \approx 1.4B [\text{T}] \text{ K}$ Zeeman-energiánál viszont nagyobb.

Magnetoexcitonok

A kvantált Hall állapotok alacsony energiás gerjesztései magnetoexcitonok, amelyeket úgy kapunk, hogy egy elektront a betöltött Landau-sávok valamelyikéről felviszünk egy üres sávba [168]. Mivel ez semleges gerjesztés, a tömegközéppontjának jól definiált $\mathbf{Q}$ impulzusa van. Kis Q esetén ez kollektív (sűrűség hullám) jellegű, $Q \rightarrow \infty$ -nél viszont elválasztott részecske-lyuk párnak felel meg. Az utóbbi limesz határozza meg a transzport gapet, kivéve, ha szkörmionok alakulnak ki [169, 170]. Az alapállapotból a magnetoexciton-állapotok az alábbi operátorokkal kaphatók meg [171]:

$$\hat{\Psi}_{NN'}^\dagger(\mathbf{Q}) = \sum_p e^{ipQ_y \ell^2} \hat{a}_{Np}^\dagger \hat{a}_{N'p-Q_x}. \quad (2.13)$$

Ha a magnetoexcitonok sűrűsége kicsi, az egymással való kölcsönhatásukat elhanyagolhatjuk, elegendő az alábbi átlagtér-hamiltoni mátrixot diagonalizálni:

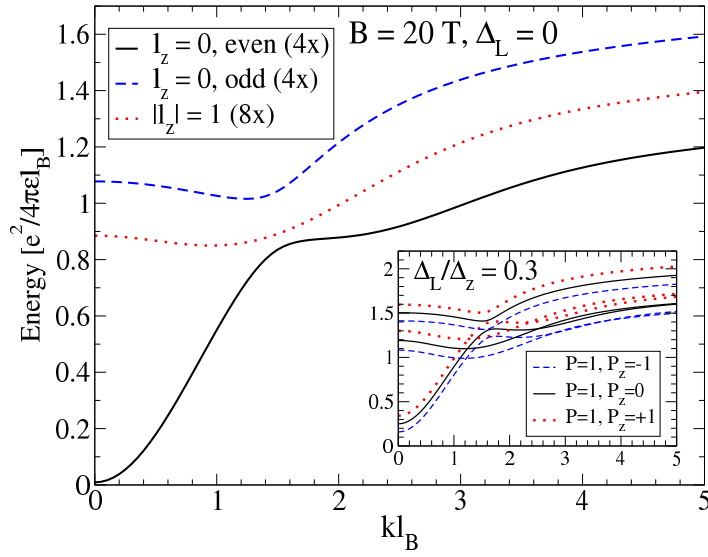
$$\mathcal{H}_{(NN')}^{(\tilde{N}\tilde{N}')}(\mathbf{Q}) = \langle 0 | \Psi_{\tilde{N}\tilde{N}'}(\mathbf{Q}) \hat{V} \Psi_{NN'}^\dagger(\mathbf{Q}) | 0 \rangle - \delta_{N\tilde{N}} \delta_{N'\tilde{N}'} \langle 0 | \hat{V} | 0 \rangle, \quad (2.14)$$

ahol $N = (n, \alpha, \xi, \sigma)$ [$N' = (n', \alpha', \xi', \sigma')$] specifikálja a részecske (lyuk) Landau-sávját, és $\delta_{NN'} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\xi\xi'} \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}$.

A magnetoexcitonoknak spin és völgy-pszeudospin kvantumszámaik vannak a részecskét és a lyukat jellemző kvantumszámokból következően. Definiálható továbbá egy „impulzusmomentum kvantumszám”, $l_z = |n| - |n'|$ [168, 172]. Ez utóbbi azonban csak a $\mathbf{Q} \rightarrow 0$ határesetben őrződik meg.

Eredmények

A $|\text{f.m.}\rangle$ ferromágneses állapot excitonjait a P, P_z pszeudospin és l_z impulzusmomentum kvantumszámok jellemzik. Ez utóbbi $l_z = 1$, ha a $n = 0$ pályáról viszünk fel egy elektront az $n = 1$ szintre, $l_z = -1$ fordított esetben. (Az $|\text{v.p.}\rangle$ állapotban a spin és a pszeudospin felcserélődik.) A spektrumot a 2.5. ábra bennfoglalt ábrája mutatja $\Delta_L = 0$ esetén. A $l_z = 0$ gerjesztéseknek két ága van, $E_{l_z=0}^{P, P_z, \text{even}}(\mathbf{k})$ és $E_{l_z=0}^{P, P_z, \text{odd}}(\mathbf{k})$, mindegyik degenerált pszeudospin-triplett és pszeudospin-szinglett változatban. Hosszúhullámú határesetben a $E_{l_z=0}^{P, P_z, \text{even}}(\mathbf{k})$ módus $\sim \Delta_Z + P_z \Delta_L$ értékhez tart (eltekintve egy kicsi $B_\perp$ -függő korrekciótól). Ez a gerjesztés arányos $(\Psi_{(0\xi\downarrow, 0\xi'\uparrow)}^\dagger + \Psi_{(1\xi\downarrow, 1\xi'\uparrow)}^\dagger)$ -vel ebben a határesetben. Eközben a gappal rendelkező



2.5. ábra. Dópolatlan ($\nu = 0$) kétrétegű grafén gerjesztései merőleges statikus terekben, ha a rétegek közötti Δ_L energiakülönbség nulla. „Even” és „odd” a $E_{l_z=0}^{P,P_z,\text{even}}(\mathbf{k})$ és $E_{l_z=0}^{P,P_z,\text{odd}}(\mathbf{k})$ módusokra utal, amelyek kis momentumnál a $\propto \Psi_{(0\xi\downarrow,0\xi'\uparrow)}^{P,P_z} \pm \Psi_{(1\xi\downarrow,1\xi'\uparrow)}^{P,P_z}$ páros és páratlan lineárkombinációknak felelnek meg. A belső ábra a sávok Δ_L miatti felhasadását illusztrálja kvalitatíve irreálisan nagy ($B \approx 10^4$ T) Zeeman-felhasadás esetén.

$E_{l_z=0}^{P,P_z,\text{odd}}(\mathbf{k})$ módus $\propto \left(\Psi_{(0\xi\downarrow,0\xi'\uparrow)}^{P,P_z} - \Psi_{(1\xi\downarrow,1\xi'\uparrow)}^{P,P_z} \right)$. Az $l_z = \pm 1$ ágak degeneráltak és gappel rendelkeznek, összhangban a rendszer globális részecske-lyuk szimmetriájával.

Ha Δ_L véges, mindegyik gerjesztési sáv felhasad a pseudospin és spin kvantumszámainak megfelelően, amint a 2.5. ábra mutatja. Általános Δ_L esetében magnetoexcitonok diszperziója közvetlenül is függ $B_\perp$ -től (nem csak ℓ -n keresztül) a pályák $\delta = \Delta_L \ell / (2v\hbar)$ függése miatt, lásd a 2.6. ábrát. A gerjesztési energiák csökkentése 1% és 16% között van a kétsáv-modellben érvényes $\frac{5}{4}E_C$ értéktől, és nagyjából lineárisan halad a $1 \text{ T} \leq B_\perp \leq 40 \text{ T}$ tartományban. A felső $l_z = 0$ ág és az $l_z = \pm 1$ ágak lapos szakaszaiból következő állapotsűrűség-csúcs megfigyelhető lehet Raman szórásban [173]. Az alsó $l_z = 0$ ág nagyobb $B_\perp$ esetén kevésbé görbült, de amint az 2.7. ábra mutatja, ez a kisebb spin-merevség nem elegendő, hogy a töltésgapet szkórmionossá tegye, kivéve talán óriási $B_\perp > 30 \text{ T}$ terek esetében.

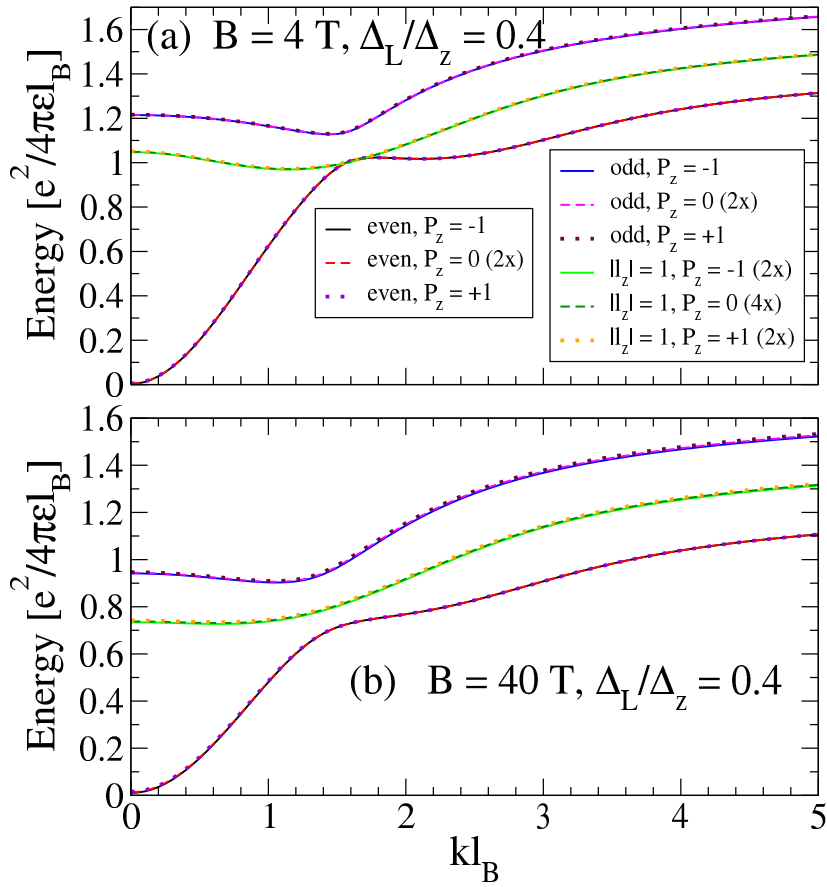
Ha a $\Delta_L \ll \Delta_Z$ limeszben a ferromágneses állapotból indulunk, a pseudospin-triplett módus okoz hosszú távú instabilitást. E módus kis hullámszámokra

$$\Psi_{l_z=0}^{P=1, P_z=-1, \text{even}}(\mathbf{k}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{(0\xi=-1, \uparrow, 0\xi'=1, \downarrow)}^\dagger + \Psi_{(1\xi=-1, \uparrow, 1\xi'=1, \downarrow)}^\dagger \right). \quad (2.15)$$

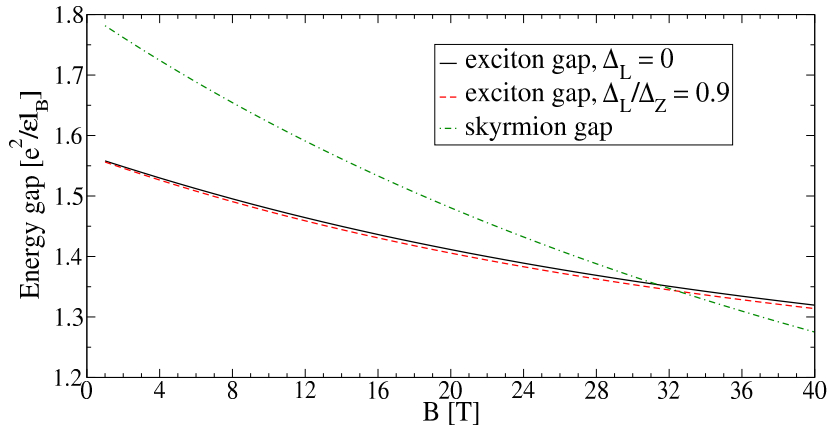
Az instabilitás olyan $\Delta_Z \sim \Delta_L$ értéknél következik be, ahol a módus gerjesztési energiája (2.5. ábra) eléri a nullát. Ez átmenetet jelez egy másik állapotba, ami itt energetikailag előnyösebbé válik (az (2.15) egyenletben pontos egyezés csak $\mathbf{k} = 0$ esetben van). Az 2.8. ábra a stabilitási régiókat mutatja $B_\perp$ és Δ_L/Δ_Z függvényében. Megfordítva, ha a völgypolarizált állapotból indulunk $\Delta_L \gg \Delta_Z$ határesetben, instabilitás van a

$$\Psi_{l_z=0}^{\dagger S=1, S_z=-1, \text{even}}(\mathbf{k}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{(0\xi=1, \downarrow, 0\xi'=-1, \uparrow)}^\dagger + \Psi_{(1\xi=1, \downarrow, 1\xi'=-1, \uparrow)}^\dagger \right) \quad (2.16)$$

módus miatt. Realisztikus terek esetében a 2.8. ábra mutatja a $\frac{\Delta_L}{\Delta_Z} \approx 1 + 0.00875B[\text{T}]$ fázis-

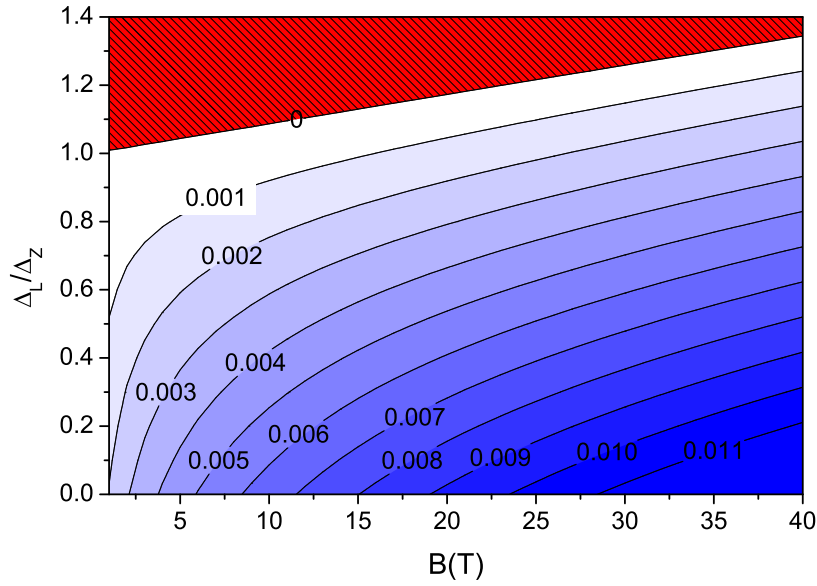


2.6. ábra. Dópolatlan ($\nu = 0$) kétrétegű grafén gerjesztései merőleges statikus terekben különböző $B_{\perp}$ és Δ_L/Δ_Z paraméterek esetén (l. a paneleken). Mivel a E_C energiaegység már $\sqrt{B_{\perp}}$ -vel skáláz, a további $B_{\perp}$ -függés a Landau-pályák $B_{\perp}$ -függésével kapcsolatos.



2.7. ábra. Töltésgap szeparált elektron-lyuk párok és szkórmion-antiszkórmion párok alapján. Az utóbbi független a rétegek közötti Δ_L potenciál-különbségtől; az előbbit Δ_L két különböző értékére mutatjuk.

határt¹.



2.8. ábra. Dópolatlan ($\nu = 0$) kétrétegű grafén nulla hőmérsékletű fázisdiagramja. A vörös régió kompresszibilis állapotnak felel meg. A ferromágneses tartomány kontúrjai a magnetoexciton gap hosszútávú limeszt adják meg E_C egységben.

Diszkusszió

A kísérletekben a rétegek közötti Δ_L energiakülönbséget az $E_\perp$ merőleges elektromos térrel hangoljuk. Az (2.12) egyenlet szerint van egy tartomány, $E_c^{(1)} < E_\perp < E_c^{(2)}$, $E_c^{(1)} = \Delta_Z/ed \approx 3.5 \times 10^5 B[T]$ V/m és $E_c^{(2)} = \Delta_Z/ed + e/(\pi\epsilon_0\ell^2) \approx 9.1 \times 10^6 B[T]$ V/m, ahol a ferromágneses állapotot destabilizálja a legelső $l_z = 0$ módus, miközben a völgypolarizált állapot még nem stabil (a külső elektromos teret túlzottan leárnýékolná, és $\Delta_L > \Delta_Z$ nem állna fenn). Ha $E_\perp > E_c^{(2)}$, völgypolarizált állapot az alapállapot.

Mivel $|v.p.\rangle$ és $|f.m.\rangle$ Zeeman- és rétegpolarizációs energiája extrémális, a $E_c^{(1)} < E_\perp < E_c^{(2)}$ tartományban nincsen a kicserélődési kölcsönhatás szempontjából kedvezőbb KHF állapot. Ha $E_\perp$ eléri $E_c^{(1)}$ -t, excitonok létrehozása csökkentheti az alapállapot energiáját. E megfigyeléssel két scenárió konzisztens: (i) elsőrendű fázisátalakulás a ferromágneses és völgypolarizált állapotok között, vagy (ii) crossover összenyomható állapotokon keresztül az $E_c^{(1)} < E_\perp < E_c^{(2)}$ intervallumban. Zérus hőmérsékleten ezt a kérdést a $|f.m.\rangle$ és $|v.p.\rangle$ állapotok között interpoláló Maxwell konstrukció és azon állapot energiájának összehasonlítása dönti el, amelyet a kvantált Hall ferromágneses állapotokból a kritikus $\mathbf{k} = 0$ magnetoexcitonok (2.15) betöltésével kapunk. Ez utóbbi tisztán formálisan magnetoexcitonok Bose-Einstein kondenzátumaként is felfogható, de ez csak annyit jelent, hogy az átlagtér-alapállapot folytonosan torzul, miközben a kvázirészecskék nem őrzik meg az identitásukat. Az egzakt kétdimeziós határesetben a $\mathbf{k} = 0$ magnonok nem hatnak kölcsön [174]; ha ettől a limesztől eltávolodunk,

¹ A leárnýékolts kölcsönhatás által módosított Landau-szint energiák felhasználásával Gorbar *et al.* [159, 160] elsőrendű fázisátalakulást jósol a két állapot között $B \approx 0.4\Delta_L$ környékén, ami $g = 2$ feltételezésével $\Delta_L/\Delta_Z \approx 1.87$ -nek felel meg.

a magnon-magnon kölcsönhatás vonzó, azaz az összenyomható állapot energiája alacsonyabb, mint a fázisszeperált állapoté, ezért a gap nélküli állapot megvalósul.

A korai kísérleteket [148, 150] egyetlen háttérkapuval végezték. A kapufeszültség, amely az esetleges környezeti dőpolást ellensúlyozza $|V_D| < 0.5$ V [148] cikkben, és $V_D \approx 4$ V [150] cikkben. Az elektromos tér tehát néhány volt kb. 300 nm-en, azaz $\sim 3 \times 10^6$ V/m. Ha $B \sim 10$ T, ez a ferromágneses tartományban van. Továbbá, a g -faktor magasabb lehetett [167]. Ebből következően a gap nélküli tartomány két kapuelektroda között elhelyezett kétrétegű grafén [149, 162, 175–177] esetében érhető csak el.

Wietz *et al.* [149] kétvégpontos magnetotranszport mérésről számol be két kapuelektroda között. A két $G \approx 0$ plató között megnövekedett vezetőképességű átmenetről számoltak be a külső elektromos tér függvényében, ha a mágneses tér kellően nagy. Az átmenet $E_\perp$ közöbértéke kb. 40%-kal nagyobb, mint $E_c^{(2)}$, és a meredeksége $B_\perp$ függvényében 11 mV/(nm·T), hasonló az általunk kapott 9 mV/(nm·T)-hez. A számolásunkból szélesebb vezető plató következne, mint amit ők megfigyeltek [149]. Kim, Lee, és Tutuc [151] négy végpontos méréseikben úgy találták, a ferromágneses állapot stabilabb, és a kritikus elektromos tér $B_\perp$ függése lineáris kissé nagyobb, 12 és 18 mV/(nm·T) közötti meredekséggel. A ferromágneses állapotot stabilizálhatja a Landau-szintek közötti átmenetek leárnýékoló hatása [140, 141, 158–160], amit mi itt elhanyagoltunk.

2.3. Részecske-lyuk szimmetria többrétegű grafén rendszerek kvantált Hall ferromágneses állapotaiban

A tiszta, dőpolatlan egyrétegű [1, 2], kétrétegű [3], és háromrétegű [4, 5] grafén eltűnő tiltott sávval rendelkező félvezetők, amelyeknek Landau-szintjük van nulla energiánál, azaz ahol a vegyérték- és vezetési sávok találkoznak külső mágneses tér hiányában. Ez a szint alapvetően befolyásolja az egész kvantált Hall effektust [35] ezekben a rendszerekben. Ezt a szintet a kvantált Hall ferromágnesség (KHF) [178], esetleg olyan kisebb tagokkal együtt, mint a Zeeman-energia, teljesen felbontja [148–150, 179–183]. Különösen érdekes a többrétegű grafén esete, mivel a zérus energiájú Landau-szint a mindig jelenlévő közelítő spin- és völgydegeneráció mellett pályadegenerációval is rendelkezik (2.2. alfejezet).

2012-ben K. Shizuya megmutatta, hogy a betöltött Landau-szintek által létrehozott kicserélődési tér figyelembe vétele alapvető fontosságú a helyes KHF alapállapotok azonosításához kétrétegű [153] és ABC-pakolású háromrétegű grafén [184] esetében. Ez a kicserélődési tér a pályakoherens állapotokat részesíti előnyben, ellentétben a nulla energiás állapotok betöltési sorrendjét előrejelző a Hund-szabály elmélettel [152, 185–190], amely szerint a Landau-szintek betöltési sorrendje (i) a völgyek szimmetrikus lineárkombinációját preferálja, majd (ii) a teljes spin maximalizálását, végül (iii) az alacsonyabb indexű Landau-pályák előnyben részesítését. Hasznosítom ezt a megfigyelést, de szakítok azzal a közelítéssel, hogy a Dirac-tenger mozduatlan, passzív. Azonosítok több KHF állapotot, és megmutatom, hogy az alrács-struktúra és a kicserélődési kölcsönhatás összjátéka az alapállapot bifurkációjához (más terminológiában: Ising-típusú kvantált Hall ferromágneses fázisátalakuláshoz) vezet, ha a rétegek s száma páros és a betöltési szám olyan, hogy valamilyen rögzített spin és völgy mellett a nulla energiás pályaszektort pontosan félig tölti be.

Modell

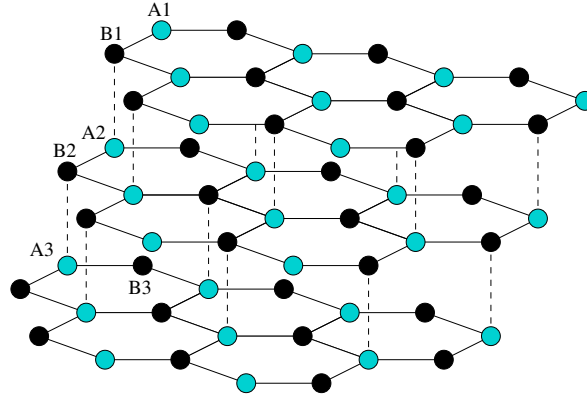
A Hamilton-operátorok alábbi osztálya tömör leírását adja az egyrétegű grafén és a többrétegű grafén-változatok királis (rombos) sorozata, azaz a AB, ABC, ABCA... pakolású többrétegek

($s > 1$) alacsonyenergiás elektronszerkezetének, ha a rétegek között nincs potenciálkülönbség:

$$\mathcal{H}_\xi^{(s)} = \frac{v^s}{(-\gamma_1)^{s-1}} \begin{pmatrix} 0 & (\pi^\dagger)^s \\ \pi^s & 0 \end{pmatrix} - g\mu_B \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.17)$$

ahol $\pi = p_x + ip_y$, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}$, $v = \sqrt{3}a\gamma_0/2\hbar \approx 10^6$ m/s az egy rétegen belüli legközelebbi szomszédok közötti γ_0 átugrási amplitudóból származó sebesség, és $\gamma_1 \approx 0.39$ eV a szomszédos rétegek dimer rácspontjai (azaz a pontosan egymás alatt/felett lévő rácspontok) közötti átugrási amplitudó; lásd a 2.1. ábrán.

Kétrétegű grafén esetében $\mathcal{H}_\xi^{(2)}$ Schrieffer-Wolf transzformációval származtatható [134–136] a grafit Slonczewski-Weiss-McClure szoros kötésű elektron-modelljének [164–166] két rétegre történő megszorításából [(2.9) egyenlet], ha azt a hatszöges első Brillouin-zóna nem ekvivalens $\mathbf{K}$, $-\mathbf{K}$ sarkaitól mért $\mathbf{q} - \xi\mathbf{K}$ momentum-különbségben első rendig sorba fejtiük. A völgy szabadsági fokban a Hamilton-operátor blokk-diagonális; a $\mathbf{K}$ völgyben $[\psi_{A1}, \psi_{B2}]$ alrács-amplitudókból összeállított spinorokon, a $-\mathbf{K}$ völgyben $[\psi_{B2}, \psi_{A1}]$ amplitudókból összeállított spinorokon hat, ahol $A2$ és $B1$ dimer rácspontok, ellenben az $A1$ és $B2$ rácspontok (nem-dimer rácspontok) a másik réteg hatszögeinek középpontja alatt/felett helyezkednek el. Elhanyagoltuk a rétegek közötti másodsomszédok közötti átugrási amplitudókat, $\gamma_3 = \gamma_{A1,B2}$ -t és $\gamma_4 = \gamma_{A1,A2} = \gamma_{B1,B2}$ -t, csakúgy, mint a dimer ($A2, B1$) és nem-dimer rácspontok ($B2, A1$) közötti Δ' potenciális energia különbséget (2.1. ábra).



2.9. ábra. Az ABC pakolású (rombos, királis) háromrétegű grafén szerkezete, az alrácsok feltüntetésével.

A rombos (királis, ABC pakolású) háromrétegű rácsszerkezetét a 2.9. ábra mutatja. Ha az n . réteg alrácsait An -nel és Bn -nel jelöljük, ahol ($B1, A2$) és ($B2, A3$) dimer párok az ABC pakolású háromrétegű grafénban ($s = 3$), $\mathcal{H}_\xi^{(3)}$ a $\mathbf{K}$ völgyben $[\psi_{A1}, \psi_{B3}]$ alrács-amplitudókból összeállított spinorokon, a $-\mathbf{K}$ völgyben $[\psi_{B3}, \psi_{A1}]$ amplitudókból összeállított spinorokon hat [137]. A másodsomszéd-rétegek közötti $\gamma_2 \equiv \gamma_{A1,B3}$ amplitudót elhagytuk. Az ABCA pakolású négyrétegű grafén ($s = 4$) esetében hasonló közelítésekkel élünk.

A $\mathcal{H}_\xi^{(s)}$ Hamilton-operátoroknak negatív és pozitív energiájú Landau-szintjei is vannak

$$\epsilon_n^{(s)} = \text{sgn}(n)\varepsilon_s \sqrt{\prod_{i=0}^{s-1} (|n| - i)} \text{-nél}, \quad \text{ahol } \varepsilon_s \equiv \frac{(2\hbar v^2 eB)^{s/2}}{\gamma_1^{s-1}}, \quad (2.18)$$

és van s szintjük zérus energiánál, $0 \leq n < s$. A pályák

$$\Psi_{|n| \geq s, q\xi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_{|n|q}(\mathbf{r}) \\ \text{sgn}(n)\zeta_{|n|-s,q}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \Psi_{0 \leq n < s, q\xi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \zeta_{nq}(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

ahol $\zeta_{nq}(\mathbf{r})$ függvényeket (2.11) egyenlet definiálja.

Elhagyva a spin- és völgyindexeket az olvashatóság kedvéért, a Coulomb-kölcsönhatás hosszú távú része

$$\mathcal{V} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \sum_{p_1 p_2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} F_{n_1 n_4}^{(s)}(\mathbf{k}) F_{n_2 n_3}^{(s)}(-\mathbf{k}) \frac{2\pi}{k} \times \\ \times \hat{c}_{n_1 p_1}^\dagger \hat{c}_{n_2 p_2}^\dagger \hat{c}_{n_3, p_2 - k_y} \hat{c}_{n_4, p_1 + k_y} e^{ik_x \ell^2 (p_2 - p_1 - k_y)}, \quad (2.20)$$

ahol $\hat{c}_{np}$ megsemmisít egy n és p kvantumszámokkal rendelkező elektront, és az ún. formatényező

$$F_{nn'}^{(s)}(\mathbf{k}) = \begin{cases} F_{nn'}(\mathbf{k}) & \text{ha } 0 \leq n, n' < s, \\ \frac{F_{|n||n'|}(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} & \text{ha } 0 \leq n < s \text{ vagy } 0 \leq n' < s, \\ \frac{F_{|n||n'|}(\mathbf{k}) + \text{sgn}(nn') F_{|n|-s, |n'|-s}(\mathbf{k})}{2} & \text{ha } |n|, |n'| \geq s; \end{cases} \quad (2.21)$$

egyéb esetekben nem értelmezett. Felhasználtuk az alábbi függvényt:

$$F_{n'n}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{n!}{(n')!}} \left(\ell \frac{k_y - ik_x}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} L_n^{n'-n} \left(\frac{k^2 \ell^2}{2} \right) e^{-k^2 \ell^2 / 4}, \quad (2.22)$$

ha $n' \geq n$, egyébként $F_{nn'}(\mathbf{k}) = F_{n'n}^*(-\mathbf{k})$. Elhanyagoltuk a rétegen belüli és a rétegek közötti Coulomb-kölcsönhatás különbségét, mivel a $d = 0.335$ nm rétegtávolság sokkal kisebb, mint ℓ . Az elektron-elektron kölcsönhatásnak van egy rövidtávú része is, amely a Bravais-rács szimmetriáját tükrözi. Ez a rész határozza meg egyes KHF állapotok spin- és völgy-szerkezetét [191], de számunkra itt nem releváns. Jellemezzük a kölcsönhatás relatív erősségét a

$$\beta^{(s)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\ell\epsilon_s} \propto B^{(1-s)/2} \quad (2.23)$$

hányadossal.

A $\mathcal{H}_\xi^{(s)}$ minimális modell céljainak megfelel, ha a zérus energiájú Landau-szint felhasadása az elhanyagolt átugrási amplitudók (pl. a háromszöges torzulást okozó γ_3) miatt kicsi és az alacsony energiájú pályák torzulása a Lifsic-átalakulás nyeregpontjának közelsége [134–137] miatt enyhe alacsony energián, és a $\pm\gamma_1$ energiától induló sávok hatására magas energián [31]. Ez utóbbi követelmény $\beta^{(2)} \lesssim 17/(\epsilon_r \sqrt{B} [\text{T}]) \approx 9.2$, $\beta^{(3)} \lesssim 188/(\epsilon_r B [\text{T}]) \approx 38$, és $\beta^{(4)} \lesssim 2073/(\epsilon_r B^{3/2} [\text{T}]) \approx 41$, ahol a numerikus becsléshez $\epsilon_r \approx 4$ feltevással éltünk; a $\pm\gamma_1$ -től távol eső Landau-szintek száma $n \lesssim 120/B[\text{T}]$ bármely s esetén (lásd [18] online függelékét). Ismert [192], hogy a kétsáv-modell alulbecsüli a Landau-szintek energiáit; az ebből fakadó kvantitatív eltéréseket alább megvitatjuk.

A $\mathcal{V}$ Coulomb-kölcsönhatás szokásos átlagtérelméleti közelítését hajtjuk végre. A direkt (Hartree, Coulomb) tagot kiejti a homogén háttér, amint az homogén állapotokban általános. A $\mathcal{V}^F$ kicserélődési (Fock) tagot a következőképpen írhatjuk:

$$\frac{\mathcal{V}^F}{N_\phi} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \sum_{nn'mm'} \sum_{\xi\xi'\sigma\sigma'} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} F_{nm}^{(s)}(\mathbf{k}) F_{m'n'}^{(s)}(-\mathbf{k}) \frac{2\pi}{k} \times \\ \times \left[\left\langle \hat{c}_{mp\xi\sigma}^\dagger \hat{c}_{m'p\xi'\sigma'} \right\rangle \hat{c}_{n,p-k_y,\xi'\sigma'}^\dagger \hat{c}_{n',p-k_y,\xi\sigma} - \frac{1}{2} \left\langle \hat{c}_{mp\xi\sigma}^\dagger \hat{c}_{m'p\xi'\sigma'} \right\rangle \left\langle \hat{c}_{np-k_y,\xi'\sigma'}^\dagger \hat{c}_{n',p-k_y,\xi\sigma} \right\rangle \right]. \quad (2.24)$$

ahol p tetszőleges, de rögzített, és N_ϕ a minta által lefedett fluxuskvantumok száma. A szög-integrál csak akkor nem tűnik el, ha $|n| - |m| = |n'| - |m'|$.

$\nu = -2s$ betöltésnél a zérus energiájú Landau-szint üres; az egyrészecskés gap egész KHE-t okoz. Forgásinvariáns állapotok esetén a $\mathcal{V}^F$ kicserélődési kölcsönhatás csak azokat az m, m' Landau-szinteket keveri, amelyekre $|m| = |m'|$ [193] ([18] online függeléke). Keressük az alapállapotot az alábbi paraméteres alakban:

$$\Psi_0^{(s)} = \prod_{m \leq -s} \prod_{q, \xi, \sigma} \left(\cos \left(\frac{\theta_{m\xi\sigma}}{2} \right) e^{i\phi_{m\xi\sigma}/2} \hat{c}_{mq\xi\sigma}^\dagger + \sin \left(\frac{\theta_{m\xi\sigma}}{2} \right) e^{-i\phi_{m\xi\sigma}/2} \hat{c}_{-m,q\xi\sigma}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (2.25)$$

Az alapállapot energiája (ξ, σ indexek elhagyásával az egyszerűség kedvéért)

$$\begin{aligned} \frac{E_0^{(s)}}{N_\phi} = & -\varepsilon_s \sum_{m=s}^{\infty} \sqrt{\prod_{i=0}^{s-1} (m-i) \cos \theta_m} - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{n=s}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} [X_{nm} w^+(\theta_m, \phi_m) w^+(\theta_n, \phi_n) + X_{n-s, m-s} w^-(\theta_m, \phi_m) w^-(\theta_n, \phi_n) + \\ & + \frac{1}{2} X_{nm}^{(s)} (\cos \theta_m \cos \theta_n - \sin \theta_m \sin \phi_m \sin \theta_n \sin \phi_n)] , \end{aligned} \quad (2.26)$$

ahol definíció szerint

$$w^\pm(\theta, \phi) = \frac{1 \pm \sin \theta \cos \phi}{2}, \quad (2.27)$$

$$X_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} F_{n_1 n_2}(\mathbf{k}) F_{n_3 n_4}^*(\mathbf{k}) \frac{2\pi}{k}, \quad (2.28)$$

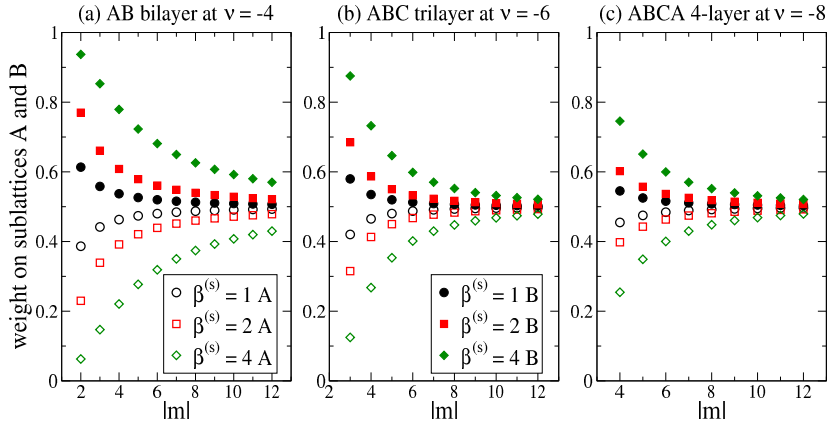
$$X_{nm} = X_{nmnm}, \quad \text{és} \quad X_{nm}^{(s)} = X_{nm, n-s, m-s}. \quad (2.29)$$

A (2.26) egyenlet első tagjának aránya a többihez $\beta^{(s)}$ -től függ. Itt $w^\pm(\theta_m, \phi_m)$ a rögzített $|m|$ melletti elektronállapot súlya azon az alrácson, amelyhez a felső (alsó) spinorkomponens tartozik. $E_0^{(s)}$ numerikus minimalizálásához levágjuk a Landau-szinteket $-M$ -nél. Feltesszük, hogy $\theta_{m>M, \xi\sigma} = 0$, és annak érdekében, hogy a kicserélési integrálok végtelen összegét lecseréljük véges sok tagra és egy divergens részre, kihasználjuk a $\sum_{n=0}^{\infty} |F_{n'n}(\mathbf{k})|^2 = 1$ azonosságot, ahol n' tetszőleges [153, 184]. A kicserélődési teret továbbra is az *összes* betöltött Landau-szint generálja; mi mindössze eltekintünk a $-M$ alatti szintek dinamikájától. Az 2.10. ábra mutatja az optimalizált paraméterekhez tartozó $w^\pm$ súlyokat $M = 12$ levágás esetén; magasabb levágással gyakorlatilag azonos eredményeket kaptam. A kölcsönhatás csak a legfelső Landau-szinteket érinti. Mivel az alsó spinorkomponenshez tartozó, kisebb n indexű ζ_{nq} pályát tartalmazó kicserélődési integrál nagyobb, a rögzített $|m|$ -hez tartozó altérben a betöltött állapot igyekszik nagyobb súlyt helyezni az alsó komponensre. Ezt a tendenciát az $(m, -m)$ keveredéssel járó nagyobb kinetikus energia ellensúlyozza. Bár a végtelen sáv szélességű kontinuum modellben a töltéstranszfer infinitezimális, rácsmodellben véges, ezért a direkt (Hartree, Coulomb) kölcsönhatás szintén az $(m, -m)$ keveredés ellen hat.

A teljesen betöltött zérus energiájú Landau-szint $\nu = 2s$ -nél a

$$\Psi_s^{(s)} = \prod_q \prod_{n=0}^{s-1} \hat{c}_{nq}^\dagger \Psi_0^{(s)} \quad (2.30)$$

Ansatz-cal tárgyalható. A $\Psi_0^{(s)}$ és $\Psi_s^{(s)}$ optimalizált állapotok közötti kapcsolat a következő (lásd [18] online függelékét): ha $\{\theta_m, \phi_m\}$ optimalizálja $\Psi_0^{(s)}$ -t, akkor $\{\theta_m, \phi_m + \pi\}$ optimá-



2.10. ábra. Királis s -rétegű grafén $\nu = -2s$ egész kvantált Hall állapotában a $\pm m$ indexű pályák keveredése eltérő $w^\pm(\theta_m, \phi_m)$ töltéssűrűséget hoz létre az alrácsokon, amelyek a felső spinor-komponensnek (üres szimbólumok) és az alsónak (teli szimbólumok) felelnek meg. $\nu = 2s$ esetén a két alrács szerepet cserél.

zálja $\Psi_s^{(s)}$ -t. Az előnyben részesített alrácsok felcserélődnek. Ez egyszerűen a részecske-lyuk szimmetria megnyilvánulása.

Ha *kétrétegű grafén* esetében $\bar{\nu} = \nu + 4 = 1$ a zérus energiájú Landau-szint relatív betöltöttsége, elkerülhetetlen, hogy a spin, völgy és pálya szabadsági fokok szimmetriája egyaránt sérüljön KHF állapotban. Tegyük fel, hogy a spin és a völgy elforgatási szimmetria már sérült, amint azt a kicsi, de véges $\Delta_Z \approx 1.3B[\text{T}]$ K Zeeman-energia, és a zérus energiájú Landau-szinten a völgy és réteg ekvivalenciája miatt [134–136] a kapacitív energia minimalizálása valószínűsíti (lásd [18] online függelékét). Az eltolásinvariáns alapállapotot az alábbi alakban keressük:

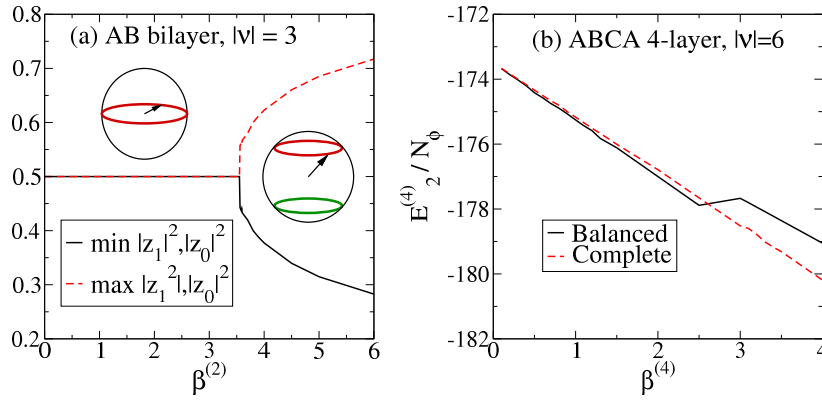
$$\Psi_1^{(2)} = \prod_q \left(z_0 \hat{c}_{0q}^\dagger + z_1 \hat{c}_{1q}^\dagger \right) \Psi_0^{(2)}, \quad (2.31)$$

amelynek az energiája

$$\begin{aligned} \frac{E_1^{(2)}}{N_\phi} &= \frac{E_0^{(2)}}{N_\phi} - \frac{X_{00}}{2} |z_0|^4 - \frac{X_{11}}{2} |z_1|^4 - (X_{01} + X_{0011}) |z_0|^2 |z_1|^2 - \\ &\quad - \sum_{m=2}^{\infty} (|z_0|^2 X_{0m} + |z_1|^2 X_{1m}) w^+(\theta_m, \phi_m). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Gyenge csatolású határesetben ($\beta^{(2)} \rightarrow 0$) a megoldás $|z_0|^2 = |z_1|^2 = \frac{1}{2}$, és z_0, z_1 relatív fázisa irreleváns; az állapot pályakoherens (az esetleges rétegkoherencián felül), és önmagának részecske-lyuk konjugáltja. A betöltött Dirac-tenger kicserélődési tere másképpen hat az $n = 0, 1$ pályákra, a QED Lamb-eltolódásához hasonlóan [153]. Ez pontosan ellentételezi azt az előnyt, amit az jelentene, ha minden elektron az $n = 0$ pályát foglalná el, ami minimalizálná a kicserélődési kölcsönhatás zérus energiájú Landau-szinten belüli részét [152]. Tehát itt a fentebb idézett Hund-szabály [152, 185–190] nem érvényes.

Rögzített $\beta^{(2)}$ mellett $E_1^{(2)}$ energiát numerikusan minimalizáljuk $-M$ Landau-szint levágással, megtartva a $m < -M$ szinteket, de elhanyagolva a kölcsönhatás miatti módosulásukat. Figyelemre méltó, hogy a zérus energiájú Landau-szint fenti struktúrája megőrződik a kölcsönhatás véges értéke mellett is egészen $\beta_c^{(2)} \approx 3.56$ kritikus értékig, lásd a 2.11(a) ábrát. Ebben



2.11. ábra. Az alapállapotú sokaság bifurkációja (Ising-típusú fázisátalakulás). (a) Kétrétegű grafénben $\bar{\nu} = 1$ betöltésnél az orbitálisan koherens alapállapot két részecske-lyuk szimmetriával összekapcsolt példányban fordul elő, ha a kölcsönhatás kellően erős, $\beta^{(2)} > \beta_c^{(2)} \approx 3.56$. A sematikus gömbök mutatják a pálya-izospin által leírt kört (köröket). (b) ABCA négyrétegben $\bar{\nu} = 2$ betöltésnél az alapállapot nem tartozik a „kiegyensúlyozott” altérhez, ha $\beta^{(4)} > \beta_c^{(4)} \approx 2.6$, tehát két részecske-lyuk szimmetriával összekapcsolt példányban kell előfordulnia.

az állapotban $\theta_m = 0$. Fizikailag, ha a $n = 0, 1$ pályákon egyenlő súly van, nincs preferált alrác (mivel az elektron mindkét alrácson $\frac{1}{2}\zeta_{nq}$, $n \geq 0$ betöltött pályákkal van kicserélődési viszonyban), és a $|m| \geq 2$ szintpárokhoz tartozó altéren belüli optimalizálás nem csatolódik a többi paraméterhez. Ha viszont $\beta^{(2)} > \beta_c^{(2)}$, az a kicserélődési energia-nyereség, ami az alrácok egyenlőtlen betöltéséből származik, kompenzálja a kinetikus energia ezzel járó veszteségét. Az ilyen állapotok kénytelenek párokban előfordulni, mivel $z_0 \leftrightarrow z_1$ és $\phi_m \leftrightarrow \phi_m + \pi$ egzakt szimmetriája az (2.32) egyenletnek. Az alapállapotú sokaság szimmetriája $U(1)$ -ről $Z_2 \times U(1)$ -re nő $\beta^{(2)} = \beta_c^{(2)}$ értéknél. Az zérus energiájú Landau-szint pálya-struktúrájának együtthatói tekinthetők egyfajta izospinnek

$$z_0 \equiv \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) e^{i\Phi/2} \quad \text{és} \quad z_1 \equiv \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) e^{-i\Phi/2} \quad (2.33)$$

megfeleltetéssel. Ha $\beta^{(2)} < \beta_c^{(2)}$ az izospin a Bloch-gömb egyenlítőjére mutat, míg ha $\beta^{(2)} > \beta_c^{(2)}$, két párhuzamos kör valamely pontjára a felső, ill. az alsó félgömbön (2.11(a) ábra). $\beta_c^{(2)} = 3.56$ megfelel $B_c = 23 \text{ T}/\epsilon_r^2$ -nek. Ha a szubsztrát és a többi szén-sáv árnyékoló hatását az $\epsilon_r \approx 4$ becsléssel vesszük figyelembe, ez nagyjából $B_c \approx 1.43 \text{ T}$.

Mivel $\mathcal{V}^F$ nem csatolja a különböző völgy- és spinkomponenseket, a (2.32) hullámfüggvény triviálisan általánosítható a $z_{0\xi\sigma}$, $z_{1\xi\sigma}$ komponens-függő paraméterhalmaz segítségével. Azok az állapotok, amelyek több részlegesen betöltött komponenszt tartalmaznak, egész $\bar{\nu}$ betöltésnél nem előnyösek. Ezért $\nu = -2, 0, 2$ betöltéseknél csak teljesen betöltött és teljesen üres komponensek vannak, egyetértésben a Hund-szabállyal [152, 185–190]. $\nu = \pm 3, \pm 1$ betöltési számnál egyetlen részlegesen betöltött komponens van, azzal a pályaszerkezettel, amit fentebb a spin elhanyagolásával megadtunk (2.11(a) ábra), $(\nu + 3)/2$ komponens teljesen betöltött, a maradék üres.

Az Ising-szabadsági fok megjelenéséhez szükséges volt, hogy egy megfelelő kvantált Hall ferromágnes a zérus energiájú Landau-szinten megszüntette az egyes spinorkomponenseknek megfelelő alrácok inekvivalenciáját. Mivel ehhez a pálya-szektor feles betöltésére volt szükség,

hasonló jelenséget várhatunk $\bar{\nu} = \nu + 8 = 2$ relatív betöltésnél ABCA-pakolású négyrétegben. Továbbra is feltesszük, hogy a spin- és völgykomponensek valahogyan rendeződtek, és az alapállapotot az alábbi formában keressük:

$$\Psi_2^{(4)} = \prod_q \left(\sum_{i < j} w_{ij} \hat{c}_{iq}^\dagger \hat{c}_{jq}^\dagger \right) \Psi_0^{(4)}, \quad (2.34)$$

ahol w_{ij} antiszimmetrikus, és $\sum_{i < j} |w_{ij}| = 1$. Az alapállapot energiája

$$\begin{aligned} \frac{E_2^{(4)}}{N_\phi} &= \frac{E_0^{(4)}}{N_\phi} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 X_{ii} C_{ii}^2 - \sum_{i < j} (X_{ij} C_{ii} C_{jj} + X_{iijj} |C_{ij}|^2) - 2X_{0121} \Re(C_{21} C_{01}) - \\ &- 2X_{0213} \Re(C_{01} C_{32} + C_{31} C_{02}) - 2X_{1223} \Re(C_{32} C_{12}) - \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{i=0}^3 X_{im} C_{ii} w^+(\theta_m, \phi_m), \end{aligned} \quad (2.35)$$

ahol a $C_{ij} = \langle \hat{c}_{iq}^\dagger \hat{c}_{jq} \rangle$ (pl. $C_{01} = z_0^* z_1$, $C_{4,-4} = \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) e^{i\phi_4}$, stb). Legyen $w_{ij} = |w_{ij}| e^{i\phi_{ij}}$, ahol ϕ_{ij} valós. $E_2^{(4)}$ invariáns, ha $\phi_{01} \rightarrow \phi_{01} + 2\delta$, $\phi_{02} \rightarrow \phi_{02} + \delta$, $\phi_{13} \rightarrow \phi_{13} - \delta$, és $\phi_{23} \rightarrow \phi_{23} - 2\delta$. Ezért az alapállapot sokaság U(1) szimmetrikus. Ha a spint és a völgyet is figyelembe vesszük, ez az állapot egy komponensben valósul meg $\nu = \pm 6, \pm 2$ -nél; a többi komponens vagy teljesen üres, vagy teljesen betöltött.

A $|m| \geq 4$ indexű pályák azon állapotait, amelyek mellett nincs kicserélődési tér-különbség az alrácsok között, „kiegyensúlyozottnak” mondjuk. Ezek teljesítik a $C_{ii} = \frac{1}{2}$ feltételt, ami ekvivalens azzal, hogy $|w_{01}| = |w_{23}|$, $|w_{02}| = |w_{13}|$, és $|w_{03}| = |w_{12}|$. Ekkor $\theta_m = 0$, és csak hat független paramétert kell optimalizálnunk.

A $\beta^{(4)} \rightarrow 0$ gyenge csatolású limeszben az alapállapot kiegyensúlyozott, és numerikusan $w_{01} = w_{23} = 0.311$, $w_{02} = 0.504e^{0.035i}$, $w_{03} = 0.387e^{0.012i}$, $w_{12} = 0.387e^{-0.014i}$ és $w_{13} = 0.504e^{0.04i}$. Véges $\beta^{(4)} \gtrsim 2.6$ esetén, „kiegyensúlyozott” altérre megszorított variációs állapot magasabb energiát ad, mint a teljes keresés, lásd a 2.11(b) ábrán. Ez Z_2 szimmetria megjelenésére utal, mivel a minimumoknak részecske-lyuk konjugált párokban kell előfordulniuk: $\{w_{ij}, \theta_m, \phi_m\}$ és $\{w_{01} \leftrightarrow w_{23}, w_{02} \leftrightarrow -w_{13}, w_{03} \leftrightarrow w_{12}, \theta_m, \phi_m + \pi\}$. $\beta_c^{(4)} \approx 2.6$ megfelel $B_c = 86 \text{ T}/\epsilon_r^{2/3}$ -nek; $\epsilon_r \approx 4$ felhasználásával $B_c \approx 34 \text{ T}$. Mivel a kétsáv-modell túlbecsüli a Landau-szintek energiáját [192], a $\pm m$ pályák keveredése kevésbé költséges, ami $\beta_c^{(4)}$ -t csökkentheti, ezért B_c a kísérletileg elérhető tartományon kívülre eshet.

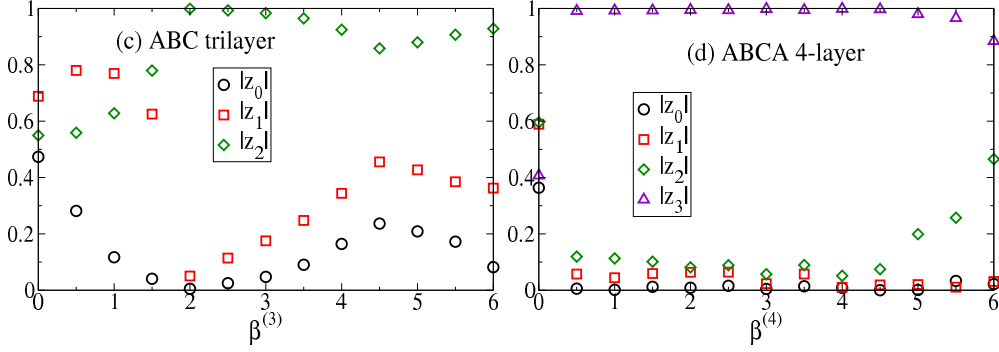
Ha egy KHF állapot nem képes a zérus energiájú Landau-szint egyik komponenséhez tartozó pálya-szektor pontosan félig betölteni, kiegyensúlyozott állapot nem létezhet. A részecske-lyuk szimmetria ekkor a ν és $-\nu$ KHF állapotok közötti kapcsolatban nyilvánul meg. Konkrétan keressük az ABC-pakolású háromrétegű grafén alapállapotát $\bar{\nu} = \nu + 6 = 1, 2$ betöltésnél és az ABCA-pakolású négyréteg alapállapotát $\bar{\nu} = \nu + 8 = 1, 3$ -nél a

$$\Psi_1^{(s)} = \prod_q \left(\sum_{i=0}^{s-1} z_i \hat{c}_{iq}^\dagger \right) \Psi_0^{(s)}, \quad (2.36)$$

$$\Psi_2^{(s)} = \prod_q \left(\sum_{i=0}^{s-1} z_i \hat{c}_{iq} \right) \left(\prod_{i=0}^{s-1} \hat{c}_{iq}^\dagger \right) \Psi_0^{(s)}, \quad (2.37)$$

formában, ahol $\sum_i |z_i|^2 = 1$. Elemi számolással belátható ([18] online függeléke), hogy a z_i -k fázisai az alapállapot energiában a háromréteg esetében egyetlen $-2X_{0121} \Re(z_0^* z_1^2 z_2^*)$ tagban,

négyréteg esetében pedig a $-2X_{0121}\Re(z_0^*z_1^2z_2^*) - 4X_{0213}\Re(z_0^*z_1z_2z_3^*) - 2X_{1223}\Re(z_1^*z_2^2z_3^*)$ tagokban jelennek csak meg. Az optimalizálás egy, ill. három egyenletet jelent a fázisok között. Ezért az alapállapotnak $U(1)$ szimmetriája van ebben az esetben is. Továbbá, ha $\{z_i, \theta_m, \phi_m\}$ minimalizálja az alapállapot energiát $\bar{\nu} = 1$ -nél, akkor $\{z_i, \theta_m, \phi_m + \pi\}$ ugyanezt teszi $\bar{\nu} = s-1$ -nél; a két állapotot az adott spin/völgy altéren belül részecske-lyuk szimmetria köti össze. A paraméterek abszolút értékét a 2.12. ábra mutatja.



2.12. ábra. A pályák $|z_i|$ amplitudói [(2.36) egyenlet] kvantált Hall ferromágneses állapotban $\bar{\nu} = 1, s-1$ betöltésnél (a) ABC háromrétegű grafénben és (b) ABCA négyrétegű grafénben.

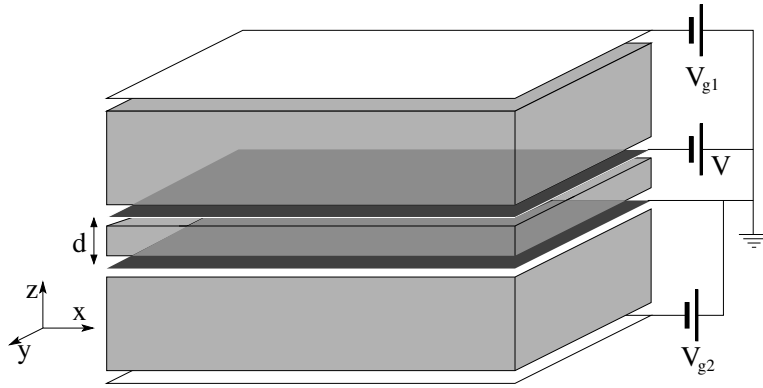
Spin és völgy figyelembe vételével az alapállapot $\nu = -s, 0, s$ betöléseknél követi a Hund-szabályt [152, 185–190], $\nu = -2s+1, -s+1, 1$ és $s+1$ betöléseknél van egy részlegesen betöltött komponense $\Psi_1^{(s)}$ állapotban, és $\nu = -s-1, -1, s-1$ és $2s-1$ betöléseknél pedig egy részlegesen betöltött komponense $\Psi_2^{(s)}$ állapotban. A részecske-lyuk szimmetria minden esetben fennáll.

Kiteintésként megjegyezzük, hogy a Bernal pakolású [194] multiréteg sáv szerkezete effektív egy- és kétrétegekre vezethető vissza, az utóbbiban $\gamma_1 = 2\cos(\pi/2 - m\pi/(2(s-1)))$ effektív paraméterrel, ahol $m = 1, 3, \dots, (s-1)$, ha s páros és $m = 0, 2, \dots, (s-1)$, ha s páratlan [135, 195–200]. Ezért az effektív kétrétegek bifurkációi komplikált alapállapot szerkezeteket hozhatnak létre ezekben a rendszerekben. Ezen átmeneket elemzése túlmutat az átlagtér-elméleten, ami további vizsgálatokat igényelne.

2.4. Töltéssűrűség-hullámok szigetelővel elválasztott közeli grafén síkokban merőleges mágneses térben

Két párhuzamos kétdimenziós elektronrendszerben, melyeket csak a kölcsönhatás csatol egymáshoz, számos érdekes elektron-korrelációs effektus léphet fel: a rétegek közötti Coulomb drag [201–203], az excitonos szupravezetés [204–209], vagy páros nevezőjű tört kvantált Hall állapotok [210–212]. Különösen érdekesek ebből a szempontból a van der Waals-csatolású grafén-hatszöges bór nitrid-grafén (G/hBN/G) heterostruktúrák [213, 214], mivel a rétegek közötti korrelációs effektusok korábban elérhetetlen paramétertartományokban állnak elő, köszönhetően mind a vezető- mind a szigetelőrétegek extrém vékonyságának.

E kísérletileg megvalósítható rendszerek megjelenésétől motiválva, töltéssűrűség-hullám (CDW) állapotokat modellezünk két függetlenül kontaktált párhuzamos grafén rétegben [213–215] (jelölésük 1 és 2), amelyekben a $\rho_{1,2}$ töltéshordozó-sűrűségek közel vannak az $|n| = 1, 2, \dots$ Landau-szintek egész betöltöttségéhez tartozó értékekhez erős merőleges $B_\perp$ mágneses térben (2.13. ábra).



2.13. ábra. A mérési elrendezés vázlata.

Hagyományos félvezetőkben [84–86, 216–232] vagy egyrétegű grafénben [233–235] megvalósított kétdimenziós elektrongázban, ha az elektronok részlegesen töltenek meg egy magasabb Landau-szintet, az elmélet töltéssűrűség-hullámok kialakulását jelzik előre: hatszöges buborék- és csíkozott fázisét. Magasabb Landau-szinteken az ilyen szimmetriasértő elektronállapotok kialakulását a Landau hullámfüggvények térbeli szerkezete segíti elő, mivel $|n| \geq 1$ esetén a pályáknak könnyen egymásba illeszthető sűrűség-minimumai és -maximumai vannak.

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy a kétrétegű elektronrendszerek Wigner kristályaihoz [236–245] hasonlóan, a G/hBN/G heterostrukturákban a rétegek közötti kölcsönhatás többféle CDW állapotot hozhat létre, ha a rétegek közötti d távolság összemérhető az $R_c^{(n)} \sim \sqrt{2|n| + \delta_{n0}}\ell$ ciklotron-sugárral. A korábbi kétrétegű Wigner kristály-számolásokhoz hasonlóan összehasonlítjuk a különböző nagyszimmetriájú Bravais-rácsszerkezetű CDW állapotok – rombos, hatszöges, téglalap és négyzet – energiáját, figyelembe véve az egyes réteget töltéssűrűség-szerkezetét, és megkeressük a legalacsonyabb energiájú fázist.

Eredmények

A 2.14. ábra mutatja két párhuzamos grafén réteg $T = 0$ átlagtérelméleti fázisdiagramját kis parciális betöltési szám, $|\bar{\nu}_i| \leq 0.5$ esetében, ahol ez utóbbit $\bar{\nu}_i = \nu_i - 6$ ($\nu_i = 2\pi\ell^2\rho_i$) módon definiáljuk; a releváns töltéshordozók elektronok az $n = 2$ szinten vagy lyukak a $n = 1$ Landau-szinten az egyes rétegekben. A fázisdiagramon előfordulnak a csíkozott (*stripe*) állapot stabilitási régiói, akárcsak egyrétegű grafénben [233–235], elektron-lyuk párok négyzetrácsa, valamint kétrétegű CDW-k hatszöges és négyzetrácsos szerkezetben. Azonosítani tudunk továbbá paramétertartományokat, ahol az elektron-korreláció járuléka a kétrétegű rendszer teljes kompresszibilitásához, azaz a kvantum-korrekció a klasszikus geometriai kapacitásához, negatív (2.16. ábra). A számítás során a kétrétegű grafénrendszer alábbi fontos aspektusait vettük figyelembe: (i) magasabb Landau-szinteken az elektronállapotok burkoló hullámfüggvénye a két alrácson különböző, ami megjelenik a formatényezőn keresztül a Coulomb-kölcsönhatás mátrixelemeiben, és (ii) az elektron-elektron kölcsönhatást leárnyékolja a két réteg vezetési és vegyértéksávjában lévő π -elektronok Fermi-tengere, ami ellentételezi az elektron-korrelációs effektusoknak a kisebb rétegtávolság és az alacsonyabb dielektromos állandó alapján naívan várható nagyobb erősségét a félvezető heterostrukturákhoz viszonyítva.

Módszerek: az elektron-elektron kölcsönhatás leányékolása

A vegyérték- és vezetési sávban levő elektronok Fermi tengerének polarizációja leányékolja a rétegen belüli és a rétegek közötti nyers kölcsönhatást²

$$V_{11}(\mathbf{q}) = V_{22}(\mathbf{q}) = \frac{2E_0\pi}{q}, \quad V_{12}(\mathbf{q}) = V_{21}(\mathbf{q}) = \frac{2E_0\pi}{q} e^{-dq\sqrt{\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp}}}, \quad E_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}}},$$

a véletlen fázis-közelítésben (RPA) a következőképpen [246]:

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{q}) = \left[1 - \mathbf{V}(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \mathbf{V}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} V_{11}(\mathbf{q}) & V_{12}(\mathbf{q}) \\ V_{21}(\mathbf{q}) & V_{22}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

ahol $\Pi_i \equiv \Pi_i(\mathbf{q}, \omega = 0)$ a Dirac-elektronok statikus polarizációja az i . grafén rétegben,

$$\Pi_i(\mathbf{q}, \omega = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\ell v_F} \sum_{\sigma\tau} \sum_{n>n_{i\sigma\tau}} \sum_{\tilde{n}\leq n_{i\sigma\tau}} \frac{|F_{n\tilde{n}}^{(1)}(\mathbf{q})|^2}{\text{sgn}(n)\sqrt{|n|} - \text{sgn}(\tilde{n})\sqrt{|\tilde{n}|}},$$

aho $n_{i\sigma\tau}$ a legmagasabb teljesen betöltött Landau-szint indexe σ spinnel, τ völgyben, i . rétegben, $v \approx 10^6$ m/s, és $F_{n\tilde{n}}^{(1)}(\mathbf{q})$ -t a (2.21) egyenlet definiálja. $\Pi_i(\mathbf{q}, \omega = 0)$ kiszámolásához bevezetünk egy $n_{\max} = 5400$ T/B Landau-szint levágást, ami a grafén sáv szélességének felel meg. Ha $q\ell > 1$, $\tilde{\mathbf{V}}(q)$ -ra az RPA jóslat közel megegyezik a mágneses tér nélküli függvényvel [247], $q\ell < 1$ esetén viszont a fő járulék $\Pi(\mathbf{q}, 0)$ -hoz a Landau-szintek közötti dipól-mátrixelemekből jön [248].

A kohéziós energia

A CDW fázisok kohéziós energiáját az egy részecskére jutó energia és a homogén elektronfolyadék Hartree-Fock közelítésben számolt energiája különbségeként definiáljuk [85, 86]. Feltesszük, hogy a részlegesen betöltött Landau-szinten az elektronok közötti kicserélődési kölcsönhatás spontán sérti a spin- és völgydegenerációt. Teljesen spinpolarizált elektronokra vonatkozóan a töltéssűrűség-hullámot a pályák középpontjának (*guiding center*, $q\ell^2$ a (2.11) egyenletben) sűrűsége jellemzi [84–86, 216]:

$$\Delta_i(\mathbf{q}) = \langle \hat{\rho}_i(\mathbf{q}) \rangle, \quad (2.39)$$

$$\hat{\rho}_i(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{N_{\phi}} \sum_p e^{-iq_x p \ell^2} \hat{a}_{i,p+q_y/2}^{\dagger} \hat{a}_{i,p-q_y/2}, \quad (2.40)$$

ahol N_{ϕ} a mintán áthaladó fluxuskvantumok száma, és $\hat{a}_{i,p}^{\dagger}$ polarizált elektront kelt p y -irányú impulzussal a részlegesen betöltött szinten (az $\mathbf{A} = -Bx\hat{\mathbf{y}}$ Landau-mértéket használjuk). A rendparaméterre a korábbi munkák [84–86, 216–224, 233–235] Ansatzának általánosításával élünk:

$$\Delta_i^S(q_m) = e^{\pm \frac{i}{2} \delta_{12} \cdot \mathbf{q}_m} \frac{2}{aq_m} \sin\left(\frac{\bar{v}_i a q_m}{2}\right), \quad (2.41)$$

$$\Delta_i^B(\mathbf{q}_{m_1, m_2}) = e^{\pm \frac{i}{2} \delta_{12} \cdot \mathbf{q}_{m_1, m_2}} \frac{2\pi R_i}{A q_{m_1, m_2}} J_1(R_i q_{m_1, m_2}),$$

ahol a csíkozott fázisban (S) a periódus a és $q_m = 2m\pi/a$; a buborék fázisban (B) a Bravais rácsvektorok $\mathbf{a}_{1,2}$ és $\mathbf{q}_{m_1, m_2} = 2\pi(m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2) \times \hat{\mathbf{z}}/A$. Itt $A = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$ az elemi cella

²HBN-ben $\epsilon_{\parallel} = 5.05$, $\epsilon_{\perp} = 6.85$, így $E_0/\ell = 111\sqrt{B}$ [T] K, ezért $E_0/\ell \sim 300$ K $B \sim 10$ T-nál.

területe, $R_i = \sqrt{A|\bar{\nu}_i|/\pi}$, + és - rendre az $i=1$ and 2 rétegeknek felel meg, δ_{12} a CDW rácsok egymáshoz képesti eltolása a két rétegben, és $\Delta_i(-\mathbf{q}) = \Delta_i^*(\mathbf{q})$.

A CDW állapot kohéziós energiája a két párhuzamos grafén rétegben [85, 86] gondolatmenetének általánosításával:

$$E_{\text{coh}} = \frac{1}{4\pi\ell^2(|\bar{\nu}_1| + |\bar{\nu}_2|)} \sum_{m_1, m_2} \left[\sum_{i=1,2} |\Delta_i(\mathbf{q}_{m_1, m_2})|^2 \tilde{u}_{HF i}(\mathbf{q}_{m_1, m_2}) + \Delta_1^*(\mathbf{q}_{m_1, m_2}) \Delta_2(\mathbf{q}_{m_1, m_2}) \tilde{u}_H^{\text{inter}}(\mathbf{q}_{m_1, m_2}) \right], \quad (2.42)$$

ahol $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, és a rétegen belüli Hartree-Fock, Hartree, és kicserélődési potenciálok, valamint a rétegek közötti Hartree potenciál, ebben a sorrendben:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{HF i}(\mathbf{q}) &= \tilde{u}_{Hi}(\mathbf{q}) - 2\pi\ell^2 u_{Fi}(q\ell^2), \\ \tilde{u}_{Hi}(\mathbf{q}) &= \tilde{V}_{ii}(q) |F_{n_i, n_i}^{(1)}(\mathbf{q})|^2, \\ u_{Fi}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \tilde{u}_{Hi}(\mathbf{q}), \\ \tilde{u}_H^{\text{inter}}(\mathbf{q}) &= \tilde{V}_{12}(q) F_{n_1, n_1}^{(1)}(\mathbf{q}) F_{n_2, n_2}^{(1)}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

A fázisdiagram

A CDW állapotok fázisdiagramját a kohéziós energia minimalizálásával kaptuk a következő paraméterek függvényében: a csíkozott fázisban az a periódus, téglalaprácsos CDW esetében a két a_1 és a_2 periódus, és rombos CDW esetében egy periódus és az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ elemi rácsvektorok közötti szög; a négyzetrács és a hatszögrács speciális esetként adódik. Minden fázisban variáljuk a δ_{12} eltolást. Három fázis fordul elő legalacsonyabb energiával: (a) az egydimenziós csíkozott (stripe), (b) a négyzetrácsos CDW, és (c) a fázisdiagram legnagyobb részében a hatszöges fázis. A fázishatárokat $T = 0$ hőmérsékleten a 2.14. ábra mutatja. A tényleges töltéssűrűség-profilokra, amik a *guiding center*-sűrűség és a Landau-pályák konvolúciójából adódnak, a 2.15(a)-(c) ábrák mutatnak példát; hasonló jellegű ábrákat kapunk a négyzetrácsos és hatszöges fázisokban is.

A 2.14. ábra fázisdiagramján látható, hogy ha az elektron- vagy lyuksűrűség jelentős mindkét rétegben, a csíkozott fázis előnyös, melyet a rétegek közötti Coulomb csatolás összeilleszt (egyetlen rétegben is a csíkozott fázis előnyös ilyenkor [85, 86, 233–235]). A két réteg sűrűségének mérsékelt eltérése nem rombolja le ezt a fázist. Ha az egyik réteg dőpólatlan, pl. $\bar{\nu}_2 = 0$, a másikban a csíkos fázis stabil, ha $|\bar{\nu}_1| \gtrsim 0.4$, de $\bar{\nu}_2$ bármilyen kis értéke a hatszöges fázisba viszi át a rendszert, mivel a Wigner-kristály-szerű rendeződés energetikai előnye jelentős a 2. rétegben.

$\nu_1 = \nu_2 = 6$ körül van egy kicsi intervallum, ahol a négyzetrácsos állapot stabil. Ez a szerkezet azért előnyösebb a hatszögesnél, mert két egymásba illesztett hatszögrács a két közeli rétegben méhsejt rácsot eredményez, aminek ritka helykitöltése hátrányos az összeillesztett négyzetrácsokhoz képest, ez utóbbi javára billentve a mérleget [236–241].

A paramétertér legnagyobb részében a hatszöges CDW fázis stabil, melynek a rétegen belüli korrelációja előnyösebb. Amint azonban a 2.15(d) ábra mutatja, a kohéziós energia a kétrétegű rendszerben kisebb nagyságú (kevésbé negatív), ami a Coulomb kölcsönhatás erősebb leárnýekolásának tulajdonítható, amiben mindkét réteg részt vesz.

A kritikus hőmérséklet becslése

Ehhez Landau-Ginzburg-típusú átlagtérelméletet állítunk fel. A Hartree-Fock Hamilton-operátor:

$$\mathcal{H}^{\text{HF}} = \frac{1}{4\pi\ell^2} \sum_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{m_1, m_2}} \sum_{i=1,2} \left(\tilde{u}_{HF i}(\mathbf{q}) \frac{\hat{\rho}_i(\mathbf{q})\Delta_i^*(\mathbf{q})}{\tilde{F}_{n_i n_i}(\mathbf{q})} + \text{h.c.} + \right. \\ \left. \tilde{u}_H^{\text{inter}}(\mathbf{q}) \frac{\hat{\rho}_i(\mathbf{q})\Delta_{3-i}^*(\mathbf{q})}{\tilde{F}_{n_i n_i}(\mathbf{q})} + \text{h.c.} - N_\phi |\Delta_i(\mathbf{q})|^2 - N_\phi \Delta_i(\mathbf{q})\Delta_{3-i}^*(\mathbf{q}) \right). \quad (2.43)$$

Tekintsük a szabadenergia δF különbségét a CDW állapot és a homogén folyadékállapot között, a rendparaméter szerinti sorfejtés második rendjéig:

$$\begin{aligned} \delta F &\approx -\frac{N_\phi}{2\pi} (U_{11}|\Delta_1|^2 + U_{22}|\Delta_2|^2 + 2U_{12}\Re\Delta_1^*\Delta_2), \\ U_{11} &= \tilde{u}_{HF1}(\mathbf{q}) + \frac{\bar{\nu}_1(1-\bar{\nu}_1)\tilde{u}_{HF1}^2(\mathbf{q}) + \bar{\nu}_2(1-\bar{\nu}_2)(\tilde{u}_H^{\text{inter}}(\mathbf{q}))^2}{2\pi k_B T}, \\ U_{22} &= \tilde{u}_{HF1}(\mathbf{q}) + \frac{\bar{\nu}_1(1-\bar{\nu}_1)(\tilde{u}_H^{\text{inter}}(\mathbf{q}))^2 + \bar{\nu}_2(1-\bar{\nu}_2)\tilde{u}_{HF2}^2(\mathbf{q})}{2\pi k_B T}, \\ U_{12} &= \tilde{u}_H^{\text{inter}}(\mathbf{q}) \left(1 + \frac{\bar{\nu}_1(1-\bar{\nu}_1)\tilde{u}_{HF1}(\mathbf{q}) + \bar{\nu}_2(1-\bar{\nu}_2)\tilde{u}_{HF2}(\mathbf{q})}{2\pi k_B T} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

A csíkozott és a négyzetrácsos fázisban a szimmetria kizárja a rendparaméterben köbös tagok fellépését, ezért a CDW átmenet másodrendű. Ekkor a fenti kifejezésből megkapható a T_c kritikus hőmérséklet: ahol a másodrendű δF előjelet vált. Ez az instabilitás természetesen mindig a legrövidebb reciprok-rácsvektoroknál következik be. A csíkozott és a négyzetrácsos fázisban ez a módszer felülbecsüli a kritikus hőmérsékletet, mivel a CDW olvadását defektusok megjelenése uralja, és ideálisan tiszta rendszerben Kosterlitz-Thouless típusú átalakulást várunk. A hatszöges CDW fázisban viszont a szimmetria megengedi köbös tagok előfordulását a Ginzburg-Landau elméletben. Ekkor elsőrendű fázisátalakulást várunk, ezért az átalakulási hőmérséklet fenti becslése felső becslésnek tekinthető. A 2.14. ábra alsó részén T_c -t mutatjuk $B = 10$ T mágneses tér és 12 hatszöges bór nitrid rétegből álló gát ($d/\ell = 0.49$) esetében. A hatszöges CDW számított T_c hőmérséklete érdekes módon nem monoton függvénye a betöltési számnak. A kétrétegű hatszöges CDW további érdekessége a sérült inverziós szimmetria miatti kétszeres degeneráció, ami kétféle domén és megfelelő doménfalak létezését teszi lehetővé a CDW „kristályban”. A doménfalakat a rendezetlenség rögzítheti.

Az elektronrendszer kompresszibilitása

CDW állapotok kialakulásának egyik kísérleti következménye, hogy az elektron-elektron korreláció negatív járulékot ad a rétegek elektron-kompresszibilitásához, hasonlóan a kapu által leárnyékolt egyrétegek esetéhez [249–256]. Ez a kompresszibilitás

$$\chi_{ij} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \rho_j} = (1 + \delta_{ij}) \frac{\partial E_{\text{coh}}}{\partial \rho_i} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 E_{\text{coh}}}{\partial \rho_j \partial \rho_i}, \quad (2.45)$$

mérhető az 2.16. ábrán mutatott eszköz aktuális differenciális kapacitásának, és a klasszikus geometriai $(\hat{C}^{-1})_{ij}$ kapacitásának különbségén keresztül:

$$\frac{\partial V_j}{\partial \rho_j} = (\hat{C}^{-1})_{ij} + \frac{\chi_{ij}}{e^2}, \quad (2.46)$$

A kétrétegű rendszer kémiai potenciáljához többféle járulék adódik:

$$\mu_i = \text{const.} + E_{\text{coh}} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial E_{\text{coh}}}{\partial \rho_i}, \quad (2.47)$$

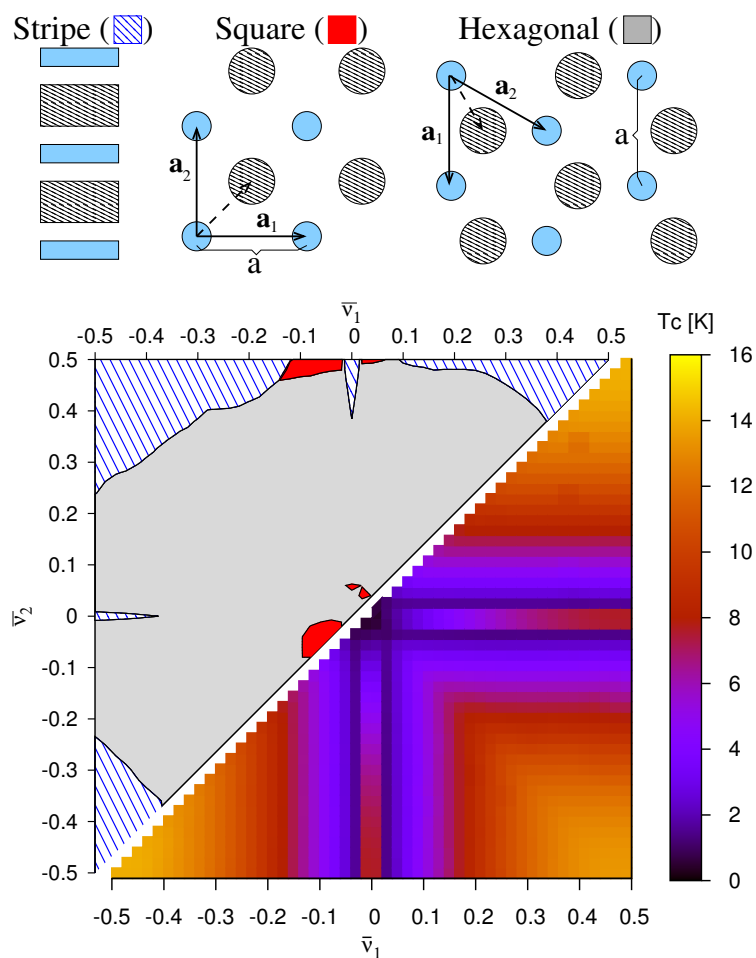
aminek része a kinetikus energia, a teljesen betöltött mélyebb Landau-szintekkel közötti kicserélődési kölcsönhatás, a részlegesen betöltött n_1 és n_2 Landau-szintek kölcsönhatása a betöltött szintek tengerével, és a részlegesen betöltött n_i szintek $(N_1 + N_2)E_{\text{coh}}$ kohéziós energiája. A 2.16. ábra mutatja az elektronok χ_{ij} kompresszibilitásának járulékát a CDW állapotok kapacitásához 2.14. ábrához használt paramétereknél.

További érdekes kísérleti következmény az elektronok reentráns egész KHE viselkedése, amit a hatszöges CDW doméneknek a rendezetlenség miatti rögzülése okozhat.

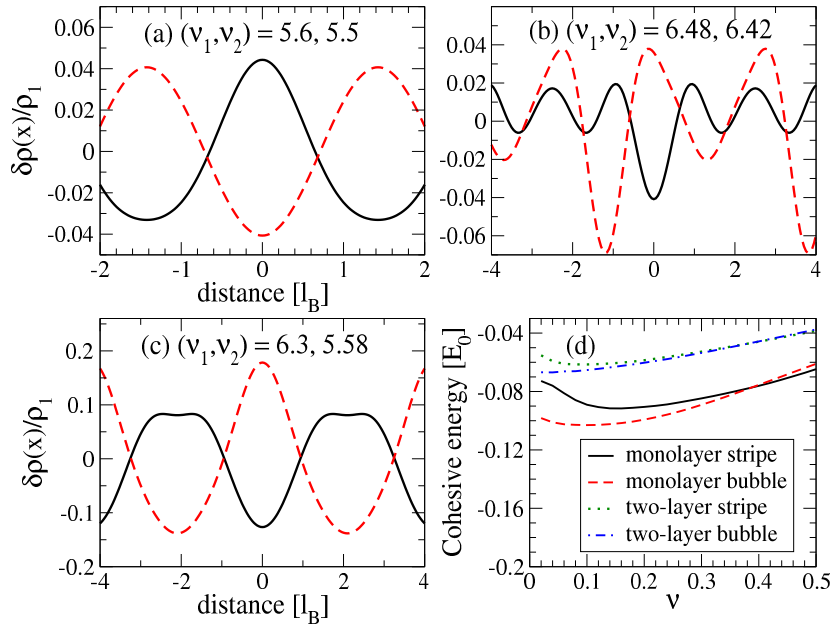
Kapcsolat más rendszerekkel

Eddig az elektron-elektron rendszerekre és a velük ekvivalens lyuk-lyuk rendszerekre koncentráltunk. Ha az egyik réteg elektron- a másik lyuk-dópolt, a (2.42) egyenlet második tagja előjelet vált. Akkor a csikozott, négyzet- és téglalaprácsos CDW-k kohéziós energiája könnyen származtatható az eddigi számolásból, de a rombos és hatszöges állapotok energiája nemtriviális; ezért az elektron-lyuk kettősrétegek tanulmányozása további munkát igényel. További kérdés a grafén síkok közötti alagutazással kapcsolatos. Mechanikai kihajtogatással és transzferrel létrehozott G/hBN/G heterostruktúrákban a grafén rétegek rácsvektorai nincsenek egymáshoz igazítva. Ezért a két grafén első Brillouin zónái egymáshoz képes el vannak forgatva, a Dirac-pontok távolsága $Q \gg \ell^{-1}$, ezért a rétegek közötti alagutazás csak nagy $\sim vQ$ energián lenne rezonáns [257–259], csak itt módosítaná a diszperziót, ami az alacsony energiájú Landau-szintek kialakulását nem befolyásolja. Emiatt még a legvékonyabb rétegtávolság esetén is (egyetlen hatszöges bór nitrid réteg a grafén síkok között) elhanyagolható a rétegek közötti alagutazás a kétréteg CDW állapotainak elemzésekor.

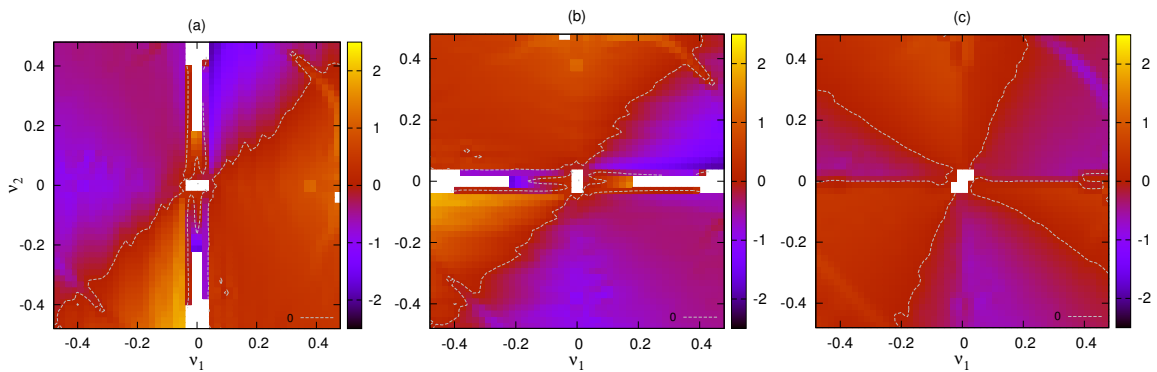
További betöltési szám tartományok $T = 0$ fázisdiagramjait mutatják a 2.17-2.19. ábrák. $(\nu_1, \nu_2) \approx (6, 6)$ esetében látható (2.17. ábra), hogy a négyzetes CDW kis relatív betöltési számoknál túlél, sőt erősebb lesz a rétegtávolság növelésével; az excitonos csikozott fázis gyengül, és végül eltűnik; a csikozott fázis érzékenyebb lesz a töltésegyensúly hiányára nagyobb rétegtávolság esetén. Hasonló megfigyelések érvényesek $(\nu_1, \nu_2) \approx (10, 10)$ esetében (2.18. ábra). Ha a két réteg betöltési száma lényegesen eltér, $(\nu_1, \nu_2) \approx (6, 10)$, a fázisdiagram rendkívül összetett lesz (2.18. ábra). Nem világos, hogy a sok tartomány melyike marad érvényben az átlagtérelméleten túl is.



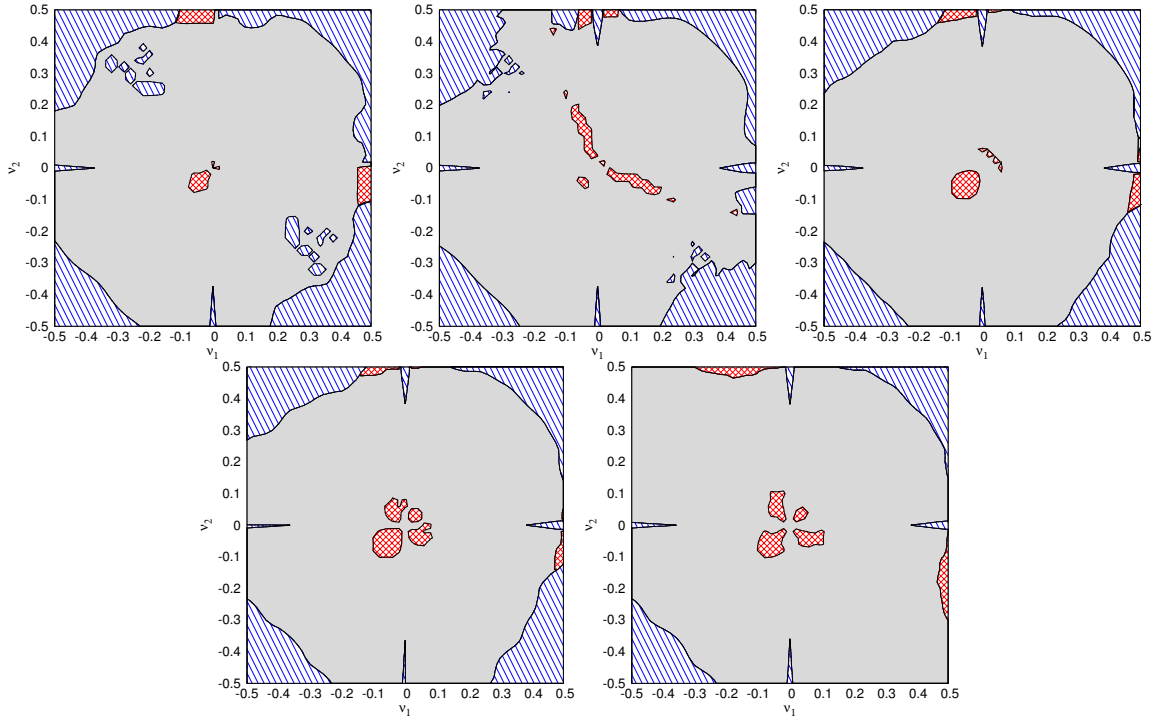
2.14. ábra. Töltéssűrűség-hullám fázisok két grafénsíkban 4 nm elválasztó (12 hatszöges bór nitrid réteg) esetén, $\nu_{1,2} = 6$ betöltési számok környékén $B = 10$ T mágneses térben. A bal alsó panel a csíkozott, négyzetes és hatszöges CDW fázis megjelenését mutatja $\bar{\nu}_i = \nu_i - 6$ függvényében, a jobb alsó az átlegtérelméletben számított T_c rendeződési hőmérsékletet kelvinben.



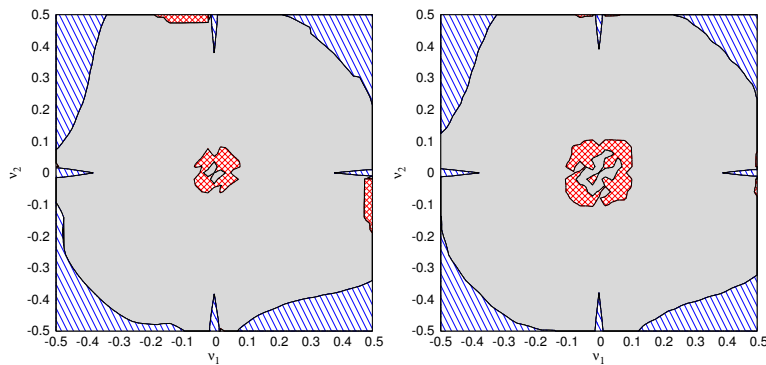
2.15. ábra. (a)–(c) A töltéssűrűség oszcilláló része $\rho_1 = (2\pi\ell^2)^{-1}$ egységben a csíkozott fázisban. (d) Egy- és kétrétegű töltéssűrűség-hullám állapotok kohéziós energiájának összehasonlítása $\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2$ esetben.



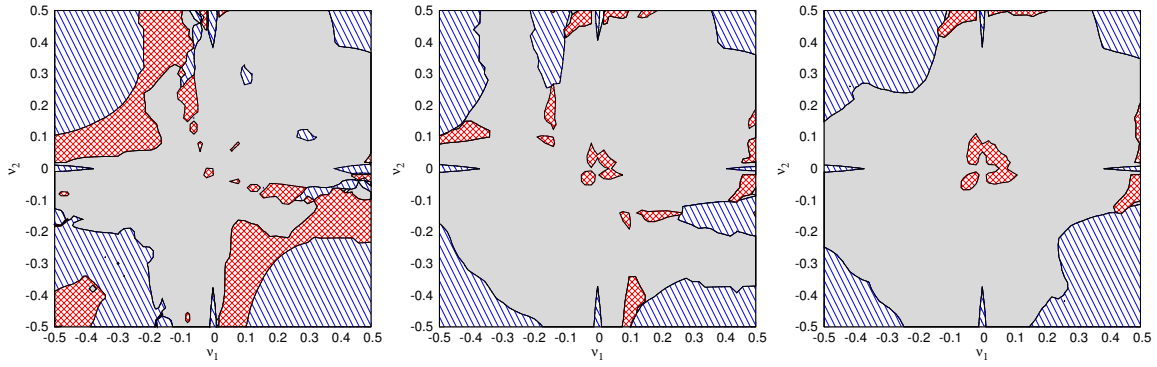
2.16. ábra. Elektronok kompressibilitása a két grafén rétegben, $E_0\ell$ egységben. (a) $\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1}$, (b) $\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}$, és (c) $\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2} = \frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}$.



2.17. ábra. Töltéssűrűség-hullámok fázisdiagramja hatszöges bór nitriddel elválasztott párhuzamos grafén síkokban. A betöltési számok a rétegekben $(\nu_1, \nu_2) = (6 + \bar{\nu}_1, 6 + \bar{\nu}_2)$. Szürke: hatszöges/rombos fázis, kék csíkozás: csíkozott fázis, piros satírozás: négyzetes/téglalap fázis. Az elválasztó rendre 0 (nemfizikai határeset), 3, 6, 9 és 12 hatszöges bór nitrid réteg.



2.18. ábra. Töltéssűrűség-hullámok fázisdiagramja hatszöges bór nitriddel elválasztott párhuzamos grafén síkokban. A betöltési számok a rétegekben $(\nu_1, \nu_2) = (10 + \bar{\nu}_1, 10 + \bar{\nu}_2)$. Szürke: hatszöges/rombos fázis, kék csíkozás: csíkozott fázis, piros satírozás: négyzetes/téglalap fázis. Az elválasztó rendre 6 és 12 hatszöges bór nitrid réteg.



2.19. ábra. Töltéssűrűség-hullámok fázisdiagramja hatszöges bór nitriddel elválasztott párhuzamos grafén síkokban. A betöltési számok a rétegekben $(\nu_1, \nu_2) = (6 + \bar{\nu}_1, 10 + \bar{\nu}_2)$. Szürke: hatszöges/rombos fázis, kék csíkozás: csíkozott fázis, piros satírozás: négyzetes/téglalap fázis. Az elválasztó rendre 0 (nemfizikai határeset), 6 és 12 hatszöges bór nitrid réteg.

3. fejezet

Többkomponensű tört kvantált Hall rendszerek

3.1. Bevezetés

Bár a tört kvantált Hall effektus erős külső mágneses teret igényel, amely a Zeeman-energián keresztül megtöri a spinek $SU(2)$ szimmetriáját, a Zeeman-energia tipikusan kicsi a Coulomb-kölcsönhatás $E_C = e^2/(4\pi\epsilon\ell)$ energiaskálájához képest, és bizonyos technikákkal tovább csökkenthető [260, 261]. Ezért előfordulhat, hogy rögzített betöltési szám mellett különböző spin-polarizációjú korrelált állapotok versengenek. A spin figyelembe vételével a kompozit fermion alapállapotok pálya-része

$$\Psi_{m/(2pm\pm 1)}^{KF(m_\uparrow, m_\downarrow)}(\{z_i^\uparrow\}, \{z_i^\downarrow\}) = \mathcal{P}_{LLL} \Phi_{m_\uparrow}^{(*)}(\{z_i^\uparrow\}) \Phi_{m_\downarrow}^{(*)}(\{z_i^\downarrow\}) J^{2p}, \quad (3.1)$$

ahol $m = m_\uparrow + m_\downarrow$, $\nu = m/(2pm \pm 1)$, és a komplex konjugáció a $\nu = m/(2pm - 1)$ esetre vonatkozik. A J^{2p} tényező mindkét spinvetületű elektronok koordinátáit tartalmazza.

Számos kísérletben figyeltek meg átmeneteket különböző spinű állapotok között [68–75, 262]. Az utóbbi években völgy szabadsági fokkal rendelkező rendszerekben is figyeltek meg TKH effektust, így grafénben [179, 263–267], AlAs kvantumgödrökben [97, 98], és szilícium hidrogénnel terminált (111) felületén [8]. Ezek a rendszerek elvben lehetővé teszik kettőnél több komponensű THK effektusok létezését. Grafén $SU(4)$ szimmetrikus THK állapotait elsőként tanulmányoztuk [268]. Ebben a fejezetben a korai munka kiterjesztéseiről számolok be.

A Fock-feltétel

Egy $SU(\mathcal{N})$ szimmetrikus Hamilton-operátor sajátértékei általában $SU(\mathcal{N})$ multiplettek; ennek elemei a Casimir-operátoroknak és az $SU(\mathcal{N})$ Lie-algebra ábeli részalgebrája generátorainak sajátértékei. Célunk az elektronkorrelációt helyesen leíró variációs hullámfüggvények konstrukciója. Fock ciklikus feltétele azt mondja meg, mit kell a pályát leíró hullámfüggvényrésznek tudnia ahhoz, hogy a megfelelő spinorok csatolásával a teljes hullámfüggvény teljesítse a Pauli-elvet, azaz antiszimmetrikus legyen a pálya és a spinváltozók együttes permutációjára nézve. Minden multiplettben előfordul egy ún. maximális súlyú állapot [269], amelyre Fock ciklikus feltétele vonatkozik [138]. (Ez $SU(2)$ esetben egyszerűen a legnagyobb/legkisebb spinvetülettel rendelkező tagja valamely spin-multiplettnak.) Először a Fock-feltételt teljesítő egész kvantált Hall állapotokat konstruálunk, majd megmutatjuk, hogy ezeknek „kompozit fermionizációja” megőrzi a szimmetriát.

Az $SU(\mathcal{N})$ multiplettek jelölésére $[m_1, \dots, m_{n-1}]$ Young-diagramokat használunk: legyen $m_1 \geq m_2 \geq \dots m_{n-1} \geq 0$ egész, ahol m_i a Young-diagram i . sorának hossza. (Ha az utolsó néhány m_i nulla, nem írjuk ki.) A Young-diagramok a fundamentális ábrázolás (egyetlen doboz) direkt szorzataiból származnak a sorok szimmetrizálásával és az oszlopok antiszimmetrizálásával [138].

Legyen $\{\alpha^t\}$ bázis az $\mathcal{N}$ -dimenziós fundamentális ábrázolásban, és M_t a α^t állapotban lévő részecskék száma. Legyen

$$\Phi'(\{\mathbf{r}_j\}) = \mathcal{A} \left(\Phi(\{\mathbf{r}_j\}) \prod_{t=1}^{\mathcal{N}} \prod_{i=\min_t}^{\max_t} \alpha_i^t \right), \quad (3.2)$$

ahol $\min_1 = 1, \max_1 = M_1, \min_2 = M_1 + 1, \max_2 = M_1 + M_2, \dots$, és $\mathcal{A}$ az antiszimmetrizáció művelete. Tegyük fel, hogy $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$ antiszimmetrikus a változóinak minden $\{\min_t, \dots, \max_t\}$ részhalmazában. $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$ legmagasabb súlyú állapot (a pozitív gyökök valamilyen megválasztására) akkor és csak akkor, ha $\Phi'(\{\mathbf{r}_j\})$ -t megsemmisíti bármely u ($\min_u \leq l \leq \max_u$) típusú l elektron antiszimmetrizálása valamilyen $t < u$ típusú elektronokra, azaz

$$\left(1 - \sum_{k=\min_t}^{\max_t} (k, l) \right) \Phi(\{\mathbf{r}_j\}) = 0, \quad (3.3)$$

ahol (k, l) permutáció a k and l indexekre nézve.

Következésképpen, valamely

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_{\mathcal{N}} \quad (3.4)$$

pálya-hullámfüggvény, ahol Φ_s -k Slater determinánsok, melyekben bármely (n, m) állapot Φ_s -ben Φ_{s-1} -ben szintén betöltött (megfordítva, ha bármely (n, m) állapot, amely nem betöltött Φ_s -ben, nem betöltött Φ_{s+1} -ben sem), legitim legmagasabb súlyú állapot egy $SU(\mathcal{N})$ multiplettben. Ilyen minden egész kvantált Hall állapot (Φ_s -ben a legalacsonyabb l_s Landau-szint betöltött; l_s -ek monoton csökkenő sorrendben vannak), a Fermi-tenger állapotok (azaz gömbfüggvényekből felépített zárt héjú állapotok a Haldane gömbön), és ezek feletti egy kvázirészecske, kvázilyuk, és kvázirészecske-kvázilyuk állapotok, feltéve, hogy nem hozunk létre lyukat s spinállapotban olyan Landau-szinten, amely betöltött Φ_{s+1} -ben, és megfordítva, nem hozunk létre részecskét s spinállapotban olyan Landau-szinten, amely üres Φ_{s-1} -ben.

Mivel J^{2p} szimmetrikus polinóm, ha egy Φ állapot teljesíti a (3.3) Fock-feltételt, akkor ezekből a (1.6) Jastrow-tényező hozzáadásával kapott Ψ állapot szintén, ezért legitim variációs hullámfüggvény, és ezen a $\mathcal{P}_{\text{LLL}}$ vetítés sem változtat. Így helyes $SU(\mathcal{N})$ kompozit fermion állapotokat kapunk az elektronok Slater-determinánsaiból:

$$\Psi^{\text{KF}} = \mathcal{P}_{\text{LLL}} \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_{\mathcal{N}} J^{2p}. \quad (3.5)$$

Effektív kölcsönhatás a grafén $n \neq 0$ Landau-szintjeiek leírására

A szokásos kontinuum-közelítésben a grafén alacsonyenergiás állapotait a tömegtelen Dirac-egyenlet írja le [270–272]:

$$\mathcal{H}^{\text{gr.}} = v_F \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})^T \end{pmatrix} + \Delta_V P_z + \Delta_Z \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{S}, \quad (3.6)$$

amely négykomponensű spinorok terén hat. $\mathbf{S}$ a spint jelöli, $\mathbf{P}$ a völgy pseudospint, $v_F \approx 10^6$ m/s a Fermi-sebesség, $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$, és Δ_V az alrácsok on-site energia különbsége (ha van

ilyen). Az egyrészecskes spektrum

$$E_{nps} = \text{sgn}(n) \sqrt{\frac{2\hbar v_F^2 e B |n|}{c}} + \Delta_V p + \Delta_Z s, \quad (3.7)$$

ahol $s, p \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ S_z ill. P_z sajátértéke, és n a Landau-szint indexe. A $\Delta_Z \rightarrow 0$, $\Delta_V \rightarrow 0$ határesetben mindegyik Landau-szint négyszeresen degenerált, ami $SU(4)$ szimmetriát generál.

Az elektronok közötti kölcsönhatást V_m pszeudopotenciálokkal [45] jellemezzük: V_m a kölcsönhatási energia két elektron között m relatív impulzusmomentumú állapotban. Grafén n . Landau-szintjén elhelyezkedő kölcsönható elektronok problémája leképezhető leképezhető az $n = 0$ Landau-szintre olyan effektív kölcsönhatás alkalmazásával, amelynek pszeudopotenciálja a síkon [273–275]:

$$V_m^{(n)\text{gr.}} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{k} F_{nn}^{(1)}(k) e^{-k^2} L_m(k^2), \quad (3.8)$$

ahol a $F_{nn}^{(1)}(k)$ formatényezőt lásd a (2.21) egyenletben. Monte Carlo számoláshoz szükségünk van a kölcsönhatás valós térbeli alakjára. Az $n = 0$ Landau-szinten ez egyszerűen $V(r) = 1/r$; a gömbön r az összekötő húr mentén mért távolság [106]. Mivel a $\frac{2\pi}{k} F_{nn}^{(1)}(k)$ effektív kölcsönhatás inverz Fourier-transzformációja $n \neq 0$ esetben nehézségekbe ütközik, a magasabb Landau-szinteken a kölcsönhatást paraméteres formában keressük [276, 277]:

$$V^{\text{eff}}(r) = \frac{B_1}{r} + \frac{B_3}{\sqrt{r^6 + 1}} + \frac{B_5}{\sqrt{r^{10} + 10}} + \sum_{k=0}^{k=6} C_{2k} r^{2k} \exp(-r^2) \quad (3.9)$$

ahol r a távolság az ℓ mágneses hossz egységeiben.¹ Az illesztett B_i és C_i együtthatókat a 3.1. táblázat adja meg. B_1 -t, B_3 -t és B_5 -t a Coulomb-kölcsönhatás hosszútávú része meghatározza; a C_i -ket úgy kapjuk meg, hogy az effektív kölcsönhatás az első hét pszeudopotenciálját azonossá tesszük a grafén $n = 1$ Landau-szintjének

$$V_m^{(1)\text{gr.}} = \left(m^2 - \frac{15m}{8} + \frac{153}{256} \right) \frac{\Gamma(m - \frac{3}{2})}{2\Gamma(m + 1)} \quad (3.10)$$

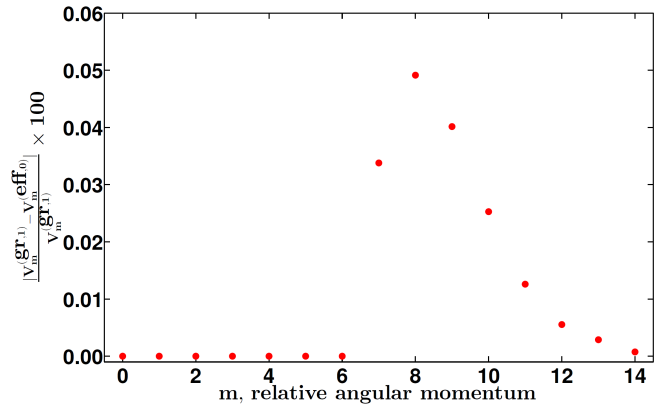
pszeudopotenciáljával. Úgy találtuk, hogy hétnél több pszeudopotenciál illesztése valós térben erősen oszcilláló potenciálhoz vezet, ami Monte Carlo-ban nagy hibákat eredményez; hétnél kevesebb illesztése viszont nagy hibát okoz a nem illesztett pszeudopotenciálokban. A 3.1 táblázat melletti ábra az effektív kölcsönhatásból adódó és a keresett (3.10) pszeudopotenciálokat hasonlítja össze. Látható, hogy a hiba kisebb, mint 0.06% az m relatív impulzusmomentum minden értékére. Megjegyezzük, hogy az illesztés a *síkon* történt. Mi a (3.9) effektív kölcsönhatást a gömbön használjuk a húrtávolsággal (1.4.1 szakasz), ami kis rendszerek esetében okoz némi szisztematikus hibát, de ez a termodinamikai határesetben eltűnik.

3.2. Tört kvantált Hall effektus grafénben: elmélet és kísérlet kvantitatív összehasonlítása

Grafénben számos TKH állapotot figyeltek meg [179, 263–267, 278], ami az elmélet és a kísérlet minden korábbinál pontosabb kvantitatív összehasonlítását teszi lehetővé, mivel a minta

¹Korábban egy kevésbé pontos formát használtunk [20, 268]; az alább közölt eredmények megbízhatóbbak.

Együttható	Érték
B_1	1.0
B_3	0.5
B_5	0.5625
C_0	42.55210599
C_2	-284.7958520
C_4	376.9514252
C_6	-179.3196140
C_8	36.58286249
C_{10}	-3.232277646
C_{12}	0.1004240132



3.1. táblázat. Balra: az (3.9) egyenletben szereplő effektív kölcsönhatás együtthatói, amelyekkel a grafén $|n| = 1$ Landau-szintjét szimuláljuk a legalacsonyabb Landau-szinten vett bázisban. Jobbra: a Coulomb-kölcsönhatásnak a grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén vett egzakt pszeudopotenciáljainak és a (3.9) effektív kölcsönhatás pszeudopotenciáljainak összehasonlítása a síkon.

merőleges kiterjedéséből adódó korrekciók itt nem lépnek fel. További könnyebbség, a konvencionális kétdimenziós elektrongáztól eltérően a grafén $n = 0$ Landau-szintjén a Landau-szintek keveredése nem okoz effektív háromtest-kölcsönhatást [279] (ami a részecske-lyuk szimmetriát sértené), csak a párkölcsönhatás korrekcióját.

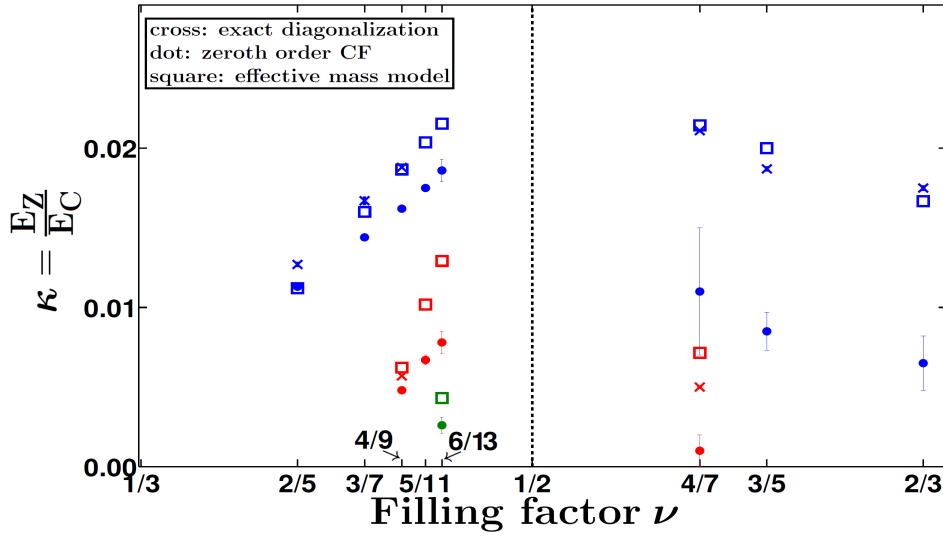
Az első kísérletek két kontaktussal ellátott felfüggesztett mintában [267] $\nu = 1/3$ betöltésnél detektáltak TKH effektust. Később Dean *et al.* és Ghahari *et al.* [179, 280] standard négyterminálos Hall elrendezést vizsgáltak bór nitrid szubsztráton; TKH állapotokat figyeltek meg a központi ($n = 0$) szinten $|\nu| = 2/3, 4/3$ betöltéseknél, és $|\nu| = 2 + 1/3, 2 + 2/3, 2 + 4/3, 2 + 5/3, 2 + 7/3$ betöltéseknél a $|n| = 1$ Landau-szinten. Láttak továbbá TKHE-t $|\nu| = 1/3$ -nál, de $|\nu| = 2 - 1/3$ betöltésnél a $n = 0$ Landau-szinten nem. Majd Feldman *et al.* [264] figyelt meg inkompresszibilis állapotokat felfüggesztett mintákban a $\nu = p/(2p \pm 1)$ sorozatban minden $p \leq 4$ -re a $|\nu| \leq 1$ tartományban, de a $1 < |\nu| < 2$ tartományban csak a $\nu = 2 - 2/3, 2 - 2/5, 2 - 4/7$ és $2 - 4/9$ törteknél. A $0 < |\nu| < 1$ és $1 < |\nu| < 2$ intervallumok különbsége és a $2 - 1/3$ tört hiánya magyarázatra szorul.

A különböző spinpolarizáltságú THK állapotok közötti átmenetek a TKHE elméletének legpontosabb próbáját adják, több okból is. Először is, a mérés termodinamikai jellegű (ellentétben a gerjesztési energiák és a semleges módusok mérésével), ezért valószínűleg kevésbé érzékeny a minta rendezetlenségére. Másodszor, az átmenetekhez kritikus Zeeman-energia közvetlenül tájékoztat bennünket az egyes állapotok közötti kis kölcsönhatási energia-különbségekről. A spinátmenetekhez számos megfigyelhető kísérleti jelenség tartozik. Ilyen átmeneteket a Zeeman-energia függvényében különféle kétdimenziós félvezető szerkezetekben figyeltek meg [68–75, 97, 98, 281–286]; legutóbb Feldman *et al.* [265] grafénben.

Célunk a spinpolarizációs fázisdiagram lehető legpontosabb meghatározása ideális kétdimenziós rendszerek (grafén, kellően vékony GaAs kvantumgödrök vagy heterointerfészek) $n = 0$ Landau-szintjén. Kiterjedt egzakt diagonalizációs tesztek végeztünk egyes THK állapotokon, hogy megállapítsuk a kompozit fermion elmélet kvantitatív pontosságát [47, 50, 52, 53]. A Landau-szintek keveredésének hatását a pszeudopotenciálok módosításával modellezzük [279].

Jelölje $\nu^{(n)}$ a grafén n . Landau-szintjének részleges (relatív) betöltését:

$$\nu^{(n)} = \nu - 4n + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = 4n - 2 + \nu^{(n)}. \quad (3.11)$$



3.1. ábra. A spin-fázisdiagram TKH állapotokban. A kritikus Zeeman-energiát mutatjuk a $\nu = n/(2n \pm 1)$ betöltési számoknál a $\kappa = \Delta_Z^c/E_C$ értéken keresztül. Keresztek: egzakt diagonalizáció (nulla mintavastagság mellett), pöttyök: kompozit fermion állapotok JK vetítéssel, négyzetek: szabad kompozit fermion-modell (lásd a főszövegben). A kék, vörös és zöld színek rendre a $(n, 0) \rightarrow (n-1, 1)$, $(n-1, 1) \rightarrow (n-2, 2)$ és $(n-2, 2) \rightarrow (n-3, 3)$ átmeneteket jelölik. ($\nu = 4/7$ és $\nu = 4/9$ esetében csak két rendszerméretből extrapoláltunk.)

Megjegyezzük, hogy $\bar{\nu} = 4n + 2 - \nu^{(n)}$ betöltési számnál lyukakból van ugyanennyi az n . Landau-szinten. Ezért ν és $\bar{\nu}$ betöltéseknél hasonló fizikát várunk, legfeljebb a Landau-szintek keveredése okozhat korrekciókat.

Mivel az $n = 0$ Landau-szinten az alrács-amplitudókból felépülő spinor-szerkezet [(2.3) egyenlet] irreleváns, a KHE szempontjából az egyetlen különbség GaAs-hoz viszonyítva a völgy szabadsági fok jelenléte. Ez a spinnel kombinálva négyszeres degenerációt okozhat, ami persze felhasadhat [142, 287–289]. Az alábbiakban feltételezzük, hogy a felhasadás legfeljebb $SU(2)$ szimmetriát hagy meg, ami összhangban van azokkal a kísérletekkel, amelyekkel összehasonlítást végeztünk.

Spinnel rendelkező TKH állapotok fázisdiagramja

Ezen állapotok értelmezéséhez a kompozit fermion elmélet (3.1) egyenletben megadott kiterjesztése ad kulcsot. Rögzített m mellett az lehetséges alapállapotok és

$$\gamma = \frac{m_{\uparrow} - m_{\downarrow}}{m_{\uparrow} + m_{\downarrow}} \quad (3.12)$$

spinpolarizációjuk felsorolható. Pl. $\nu = 6/13, 6/11, 6/25$ és $6/23$ egyaránt $m = 6$ -re képeződik le; a lehetséges állapotok $(m_{\uparrow}, m_{\downarrow}) = (6, 0), (5, 1), (4, 2)$ és $(3, 3)$; polarizációjuk rendre $\gamma = 1, 2/3, 1/3$ és 0 . Spinátmenet akkor lehetséges, ha adott törtnél valamely kisebb polarizációjú állapot kölcsönhatási energiája alacsonyabb, mint egy nagyobb polarizációjú állapoté.

Gömbi geometriában (1.4.1 szakasz) a kompozit fermion konstrukció [(3.1) egyenlet] megmondja, adott N részecskeszám esetében milyen $2Q$ fluxusnál várható tört kvantált Hall állapot [50]:

$$2Q = \frac{N - m_{\uparrow}(m_{\uparrow} - 1) - m_{\downarrow}(m_{\downarrow} - 1)}{m_{\uparrow} + m_{\downarrow}} + 2p(N - 1) - 1. \quad (3.13)$$

ν	$(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})$ állapot	N	$2Q$	S	dimenzió
2/3	(2,0)	28	42	14	1521967986
2/3	(1,1)	14	20	0	280934870
2/5	(2,0)	18	41	9	3546374322
2/5	(1,1)	12	27	0	2211680688
3/5	(3,0)	24	41	12	3546374322
3/5	(2,1)	14	23	3	383215178
3/7	(3,0)	18	37	9	386905330
3/7	(2,1)	11	22	2.5	17969272
4/7	(4,0)	20	37	10	386905330
4/7	(3,1)	14	25	5	55975102
4/7	(2,2)	12	21	0	114153021
4/9	(4,0)	20	39	10	1438058853
4/9	(3,1)	14	27	5	186301264
4/9	(2,2)	12	23	0	336012314

3.2. táblázat. Az egzakt diagonalizációval vizsgált legnagyobb rendszerek Hilbert-terének dimenziója. Az $L = 0$ altér megfelelő S szektorának dimenziószámát adjuk a legnagyobb $(N, 2Q)$ értékekre mindegyik betöltési számnál. N a részecskeszám, $2Q$ a gömbön áthaladó fluxus.

Ezeknél a fluxusértékeknél egzakt diagonalizációt végzünk; homogén folyadék esetében $L = 0$ teljes impulzusmomentumot várunk a polarizációnak megfelelő teljes spin mellett. A minta merőleges vastagságát és rendezetlenségét elhanyagoljuk, figyelembe veszünk egy homogén pozitív háttértöltést, és a (1.14) sűrűségkorrekciót. Az egy részecskére jutó kölcsönhatási energiát a termodinamikai határesetre extrapoláljuk: $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N/N$. Az értekezésben csak a spin-fázisdiagramot mutatom be. A konkrét számokat lásd [21] függelékében.

Egzakt diagonalizáció

Az általunk Lánczos-algoritmussal diagonalizált rendszerek a technika jelenlegi szintjén a legnagyobbak (3.2. táblázat). $\nu = 4/7$ és $\nu = 4/9$ esetén az extrapoláció csak két ponton alapul, ezért bizonytalan; azért mutatjuk meg, mert a lineáris extrapoláció kiválóan működik a többi tört esetében. Az energiák birtokában a kritikus Zeeman-energia két egymást követő állapot, $(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})$ és $(m_{\uparrow} - 1, m_{\downarrow} + 1)$ energiakülönbségéből adódik:

$$\left(\delta_{(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})} - \delta_{(m_{\uparrow}-1, m_{\downarrow}+1)} \right) E_C - \frac{1}{m} \Delta_Z^c = 0 \quad (3.14)$$

ahol $\delta_{(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})}$ jelöli az egy részecskére jutó kölcsönhatási energia termodinamikai határesetét a fentebb leírt korrekciókkal az $(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})$ állapotban. Ennek alapján

$$\kappa = \frac{\Delta_Z^c}{E_C} = m \left(\delta_{(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})} - \delta_{(m_{\uparrow}-1, m_{\downarrow}+1)} \right). \quad (3.15)$$

A kapott kritikus energiákat kék keresztek jelölik a 3.1. ábrán.

A szabad kompozit fermion-modell

A kísérleteket gyakran valamilyen m_p^* polarizációs effektív tömeggel [64] rendelkező szabad kompozit fermionok segítségével értelmezik [69, 72, 265]. A kompozit fermionokhoz rendelt

ciklotron energia

$$\hbar\omega_c^* = \hbar \frac{eB^*}{m_p^*} = \hbar \frac{eB}{(2pm \pm 1)m_p^*} \equiv \frac{\alpha}{2pm \pm 1} E_C. \quad (3.16)$$

A kompozit fermion polarizációs tömeg az m_e szabad elektrontömeggel kifejezve

$$\frac{m_p^*}{m_e} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar\omega_c}{E_C}, \quad (3.17)$$

ahol $\omega_c = eB/m_e$ az elektronok ciklotron-frekvenciája vákuumban. A tömeg a mágneses térrel skáláz; GaAs-ban pl. $m_p^*/m_e = (0.026/\alpha)\sqrt{B[T]}$.

Ebből a modellből kvalitatíve következik, hogy a kölcsönhatási energiáknak növekedniük kell a γ spinpolarizációval. Ez a $\nu = m/(2m \pm 1)$ törteknél valóban fennáll. (Később megmutatjuk, hogy $m/(4m + 1)$ törteknél más a helyzet.) A (3.14) és (3.16) egyenletek alapján az $(m_\uparrow, m_\downarrow)$ és $(m_\uparrow - 1, m_\downarrow + 1)$ állapotok közötti kritikus Zeeman-energia

$$\frac{m_\uparrow - m_\downarrow - 1}{m} \hbar\omega_c^* - \frac{1}{m} \Delta_Z = 0, \quad (3.18)$$

ez alapján

$$\kappa = \alpha \frac{m_\uparrow - m_\downarrow - 1}{2pm \pm 1}. \quad (3.19)$$

A kritikus Zeeman-energiákra történő görbeillesztésből $\alpha_{m/(2m+1)} = 0.056$ és $\alpha_{m/(2m-1)} = 0.050$ értékeket kaptunk, azaz a m_p^* tömeg a fordított fluxuscsatolású állapotokban (1.5) kb. 10%-kal nagyobb, mint megegyező fluxuscsatolás esetén (1.4). Nem lehetséges mindkét oldalt egyetlen α -val illeszteni, ami arra utal, hogy a polarizációs tömeg enyhén függ a betöltési számtól. Mindazonáltal a szabad kompozit fermion modell kielégítően működik.

Mikroszkópikus elmélet

Az $m/(2pm \pm 1)$ betöltésnél előforduló $(m_\uparrow, m_\downarrow)$ állapot kompozit fermion hullámfüggvényét a (3.1) egyenlet adja meg. (Ebben a szakaszban $p = 1$.) A legalacsonyabb Landau-szintre történő $\mathcal{P}_{\text{LLL}}$ vetítésre három módszer létezik, amelyek kissé eltérő eredményt adnak. (i) A „közvetlen vetítés” során [63, 290], a Jastrow-tényezőt is tartalmazó teljes hullámfüggvényt kifejtjük Slater-determinánsok bázisán, és csak azokat a tagokat tartjuk meg, amelyek a legalacsonyabb Landau-szinten maradnak. Ez a módszer csak kevés részecske ($N \lesssim 10$) esetén működik. (ii) A „hard-core vetítés” során [63], a hullámfüggvényt az alábbi alakba írjuk

$$\Psi_{\frac{m}{2m \pm 1}}^{\text{hard-core}} = J \mathcal{P}_{\text{LLL}}[\Phi_{m_\uparrow} \Phi_{m_\downarrow}]^{(*)} J. \quad (3.20)$$

Az így kapott hullámfüggvény eltűnik, ha két ellentétes spinű elektron koordinátája egybeesik. Ez a módszer is Slater-determinánsok bázisán fejt ki, és csak kis rendszerekre alkalmazható. (Szigorú értelemben a hard-core vetítés a KF elmélet módosításának tekinthető.) (iii) A széles körben elterjedt Jain-Kamilla (JK) vetítés [50, 54, 55] nem igényeli a hullámfüggvény kifejtését valamely bázisban, ezért nagy rendszerekre is könnyen megvalósítható. A JK vetítés közelítő jellegű; a kapott állapotokat ebben az alfejezetben JK hullámfüggvényeknek nevezzük.

A 3.1. ábra mutatja a kompozit fermion elméletből JK vetítéssel kapott eredményeket is. Megegyező fluxuscsatolás esetén ($\nu = m/(2m + 1)$) a JK hullámfüggvények kb. 15 %-kal alulbecsülik a kritikus Zeeman-energiát [64]. Ezért az illesztett α ugyanilyen mértékben alacsonyabb, az effektív tömeg magasabb, mint amit az egzakt diagonalizáció ad. Fordított fluxuscsatolás esetén ($\nu = m/(2m - 1)$) a JK hullámfüggvények egy kettes-hármas szorzóval

ν	rendszer			a kölcsönhatási energia %-os hibája		
	N	2Q	állapot	JK	közvetlen	hard-core
2/3	8	11	(1,1)	0.75	-	0.04 (Ref. [63])
2/3	8	12	(2,0)	0.13	0.02 (Ref. [63])	-
2/5	8	16	(2,0)	0.01	0.01 (Ref. [49])	-
3/5	8	13	(2,1)	0.29	-	0.05 (Ref. [63])
3/5	9	16	(3,0)	0.03	0.01 (Ref. [63])	-

3.3. táblázat. A különböző vetítési módszerekkel kapott KF hullámfüggvények kölcsönhatási energiájának százalékos hibája kis rendszerekre, amelyekre az egzakt eredmény ismert. Az utolsó két oszlop a közvetlen vetítés és a hard-core vetítés eredményét adja meg a nem teljesen spinpolarizált állapotokra. (Teljesen spinpolarizált állapotokra a kétfajta vetítés lényegében azonos energiát ad [63].) N a részecskeszám, $2Q$ a gömbön áthaladó fluxus.

alulbecsülik a kritikus Zeeman-energiát, ami a közelítő JK vetítés hibáját mutatja ezekre az állapotokra vonatkozóan.

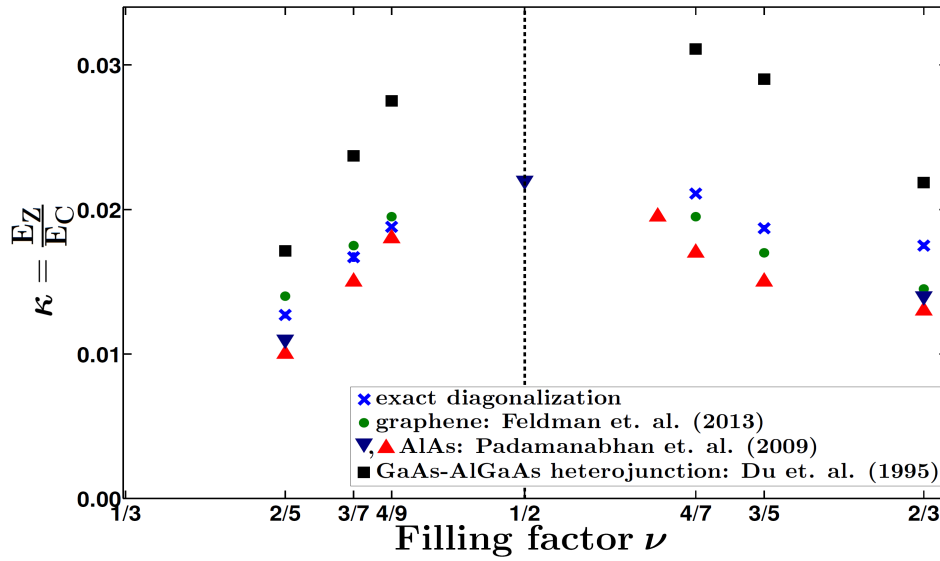
A mostani és a (3.3 táblázatban összefoglalt) korábbi eredmények [49, 63, 290] alapján az alábbi állításokat fogalmazhatjuk meg: (i) A hard-core vetítés nagyon pontos energiákat ad teljes és részleges spinpolarizáció, $m/(2m+1)$ és $m/(2m-1)$ betöltések esetén egyaránt. (ii) A JK és a közvetlen vetítés teljesen polarizált állapotokra pontos $m/(2m+1)$ és $m/(2m-1)$ törteknél, valamint nem teljesen polarizált állapotokra $\nu = m/(2m+1)$ betöltésnél. (iii) A JK és a közvetlen vetítés kevésbé pontos a nem teljesen polarizált állapotokra $\nu = m/(2m-1)$ -nél. Mindkét vetítés hátránya, hogy nem küszöböli ki azokat a konfigurációkat, amelyekben két ellentétes spinű elektron koordinátája egybeesik, ezért a nem teljesen spinpolarizált TKH állapotok energiáját felül-, a kritikus Zeeman-energiát alulbecslik. Nem világos, hogy e két vetítés miért működik jobban $\nu = m/(2m+1)$ betöltésnél, mint $\nu = m/(2m-1)$ -nél.

A JK vetítés pontossága javítható a „kompozit fermion diagonalizációnak” módszerével (1.4.4 szakasz).

Összehasonlítás a grafénen végzett kísérletekkel

Az 3.2. ábra összehasonlítja κ -nak egzakt diagonalizációból és Feldman *et al.* [265] grafénen végzett méréseiből kapott kritikus értékeit. κ értéke ϵg szorzattól függ, ahol ϵ a dielektromos állandó és g a giromágneses faktor; grafénre az $\epsilon = 3.0$, $g = 2.0$ értékeket használtuk az ábrához. A kísérlet és az elmélet egyezése nyilvánvaló. Fontos azonban, hogy a Landau-szintek keveredését eddig elhanyagoltuk (lásd alább).

A teljesség kedvéért az 3.2. ábra mutatja a kritikus Zeeman-energiát más rendszerekben, Padmanabhan *et al.* [98] (AlAs kvantumgödör) és Du *et al.* [69] (GaAs-AlGaAs heterointerfész) alapján. κ kritikus értéke és ezeknek függése a betöltési számtól minden esetben nagyjából konzisztens az elmélettel. A grafénben és félvezető heterointerfészekben mért kritikus κ eltérése kissé meglepő, mivel ez utóbbi esetben is nagyon kicsi a mérőleges kiterjedés. Ez esetleg abból adódhat, hogy amíg Feldman *et al.* [265] κ -t a sűrűség hangolásával, Du *et al.* [69] a mágneses tér megdöntésével változtatta. Az erős párhuzamos tér ez utóbbi esetben további korrekciókat okozhat, amit itt nem vettünk figyelembe.



3.2. ábra. Az elméleti fázisdiagram és a grafénen ([265], zöld pötty), GaAs-ban ([69], fekete négyzet), és AlAs-rendszerekben ([98], piros és kék háromszög) végzett kísérletek összehasonlítása. Az elméleti értékek (kék kereszt) egzakt diagonalizációból származnak a merőleges vastagság és a Landau-szintek keveredésének lehanyagolásával. ($\nu = 4/7$ és $\nu = 4/9$ esetében csak két pontból extrapoláltunk.) AlAs esetében két sűrűsége vannak adatok: $5.5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (kék háromszögek) és $5.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (piros háromszögek).

A Landau-szintek keveredésének hatása grafénben

A Landau-szintek keveredésének² erőssége jellemezhető a kölcsönhatási energia és a kinetikus energia hányadosával [291]. Tömeggel rendelkező elektronok (pl. GaAs-ban) $\lambda = E_C/\hbar\omega_c$, ahol $\omega_c = eB/m^*$ a ciklotron-frekvencia, m^* az elektron effektív tömege a sávban. GaAs-ban $\epsilon \approx 12.5$ és $m^* \approx 0.067 m_e$, ez alapján $\lambda \approx 2.52/\sqrt{B[\text{T}]}$, ami a mágneses tértől függ, és a $\lambda = 0.5 - 1.3$ tartományba esik a kísérletekben releváns $B = 4 - 25 \text{ T}$ értékekre. Grafénben ez

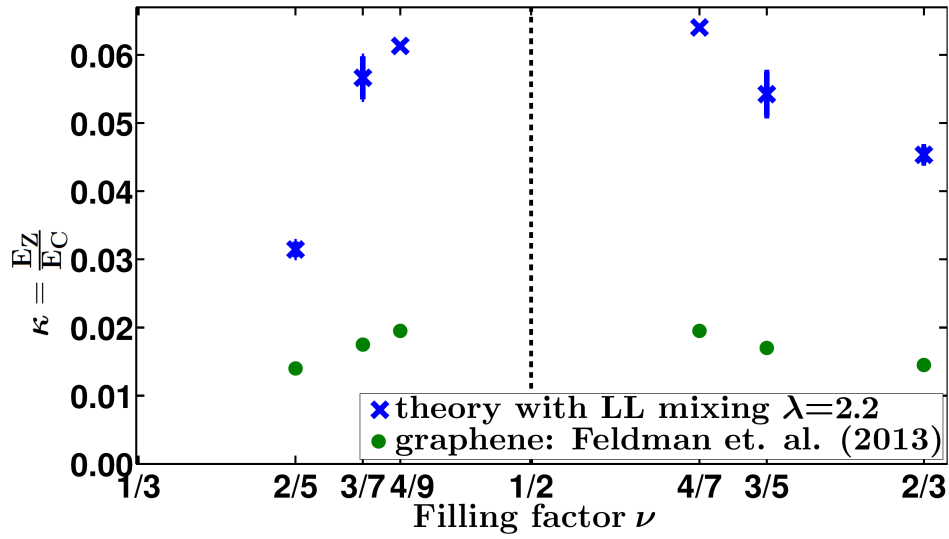
$$\lambda = \frac{E_C}{\hbar v_F/\ell} = \frac{e^2}{4\pi\hbar\epsilon v_F}, \quad (3.21)$$

amit a grafén „finomszerkezeti állandójának” is neveznek. Ez független a mágneses tértől. Felfüggesztett grafénre $\lambda \approx 2.2$, SiO_2 substráton $\lambda \approx 0.9$, hatszöges bór nitriden $\lambda = 0.5 - 0.8$ [291, 292].

A Landau-szintek keveredéséből adódó korrekciót a következőképpen becsüljük meg. Továbbra is a legalacsonyabb Landau-szinten dolgozhatunk, ha a kölcsönhatáshoz egy $\mathcal{V}_{\text{corr}}$ két-, három-, és többrészeske tagokat is tartalmazó korrekciót adunk. Grafén $n = 0$ Landau-szintjén nincsenek háromrészeskes korrekciós tagok [291]. Az első néhány pseudopotenciál korrekciója λ -ban vett perturbációszámítás első rendjéig ismert [279, 291, 293]. Az alapállapot energiájának korrekcióját $\mathcal{V}_{\text{corr}}$ -nak a perturbálatlan állapotban vett várható értékével becsüljük. Ez az eljárás λ kis értékeire lehet érvényes. A számítás lépései: (i) a kétrészeskes amplitúdók számolása az egzakt diagonalizációból kapott állapotokra, (ii) ezeknek konvolúciója a pseudopotenciálok korrekciójával. A technikai részleteket lásd [21] cikk függelékében.

A 3.3. ábrán láthatjuk a korrigált κ összehasonlítását a kísérleti értékekkel $g\epsilon = 6$ feltéte-

²Lásd a 1. lábjegyzetet a 15. oldalon.



3.3. ábra. Az elméleti fázisdiagram (kék kereszt) és Feldman et al. [265] grafénen ([265], zöld pötty) végzett méréseinek összehasonlítása a Landau-szintek keveredésnek figyelembe vételével, feltételezve, hogy ez utóbbi λ -ban lineáris marad. A méréseket adatait $g\epsilon = 6.0$ feltevéssel értelmeztük; az elméleti értékek $\lambda = 2.2$ esetre vonatkoznak (függesztett grafén). ($\nu = 4/7$ és $\nu = 4/9$ esetében csak két pontból extrapoláltunk.)

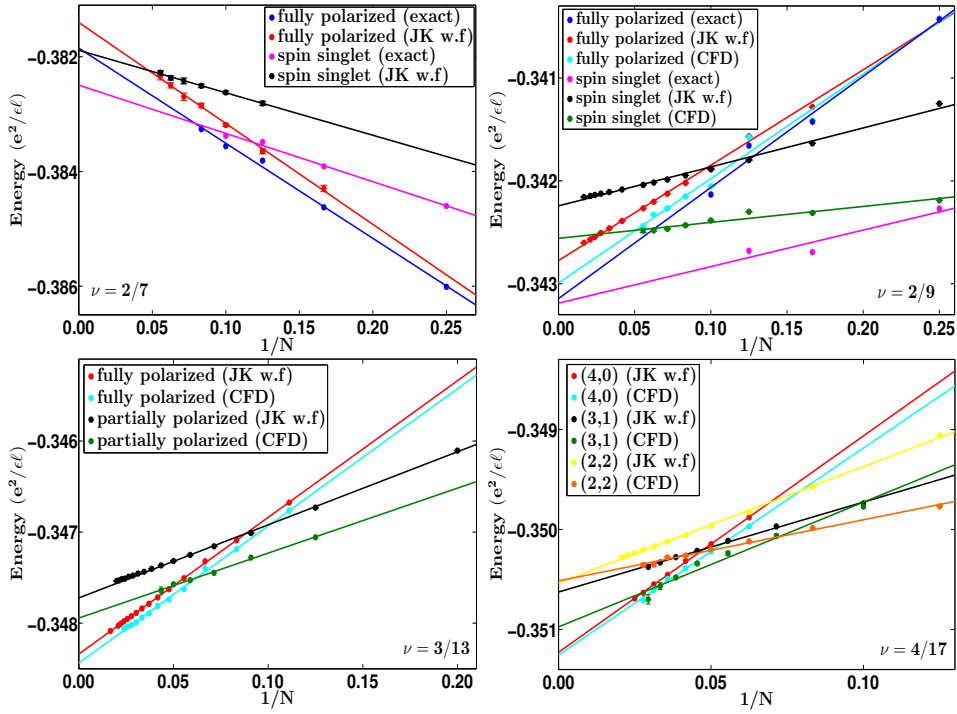
lezés mellett. Az elméleti és kísérleti adatok egyezése jobb lenne $g\epsilon = 16$ feltevéssel, de ez nem tűnik plauzibilisnak. Az elmélet tehát lényegesen túlbecsli a Landau-szintek keveredésének hatását. Ennek több oka is lehet. Először is, a kölcsönhatás korrekcióját λ -ban első rendig vettük figyelembe, és $\lambda = 2.2$ kívül eshet a lineáris tartományon. Feltettük továbbá, hogy a hullámfüggvények nem módosulnak lényegesen a Landau-szintek keveredése miatt, ami csak kis λ esetén lehet helyes. Végül a pseudopotenciálok korrekcióit csak egy bizonyos relatív impulzusmomentumig vettük figyelembe. A fenti összehasonlítás jól mutatja a Landau-szintek keveredése elméleti leírásának nehézségeit.

Kompozit fermionok négy örvénnyel

Kompozit fermion hullámfüggvényeket alkalmazva az alapállapot teljesen spinpolarizált $\nu = m/(4m + 1)$ -nél még nulla Zeeman-energia esetén is [65], tehát nincsenek spinpolarizációs fázisátmenetek. A szabad KF modell nem alkalmazható, amit kompozit fermionok Bloch-ferromágnesességével magyaráztak [65], azaz, hogy a KF-ek közötti kicserélődési kölcsönhatás nagyobb, mint KF-ok ciklotron energiája.

Mivel a JK vetítés erősebben túlbecsüli a nem teljesen spin-polarizált állapotok energiáját, mint a teljesen spinpolarizáltakét, felvetődik a kérdés, hogy [65] eredménye nem a közelítő JK vetítés mellékhatása-e. Továbbá, a $\nu = m/(4m - 1)$ TKH állapotok spin-fizikájára vonatkozóan nincs még adat.

E kérdéseket egzakt diagonalizációval és KF diagonalizációval vizsgáltuk. A $\nu = 2/9, 3/13$ és $4/17$ TKH állapotokban az egzakt diagonalizáció nem konklúzív, de mind a JK hullámfüggvény, mind a KF diagonalizáció a teljesen spinpolarizált alapállapotot jósol (3.4. ábra). Megvizsgáltuk továbbá a $\nu = m/(4m - 1)$ első értelmes állapotát, $\nu = 2/7$ -t. Itt mind a JK hullámfüggvények, mint az egzakt diagonalizáció spin-szinglett állapotot jósol (3.4(a) ábra), a kritikus Zeeman-tér $\kappa_{2/7} = 0.0013(3)$ (egzakt diagonalizáció).



3.4. ábra. Az alapállapot energiájának extrapolációja a termodinamikai határesetre (a) $\nu = 2/7$, (b) $\nu = 2/9$, (c) $\nu = 3/13$ és (d) $\nu = 4/17$ töltéskor. A mutatott energiák egzakt diagonalizációból („exact”), JK hullámfüggvényekből („JK w.f.”) és KF diagonalizációból („CFD”) származnak.

A $2p$ KF állapotokban $p > 1$ esetén a JK vetítés másképp is elvégezhető:

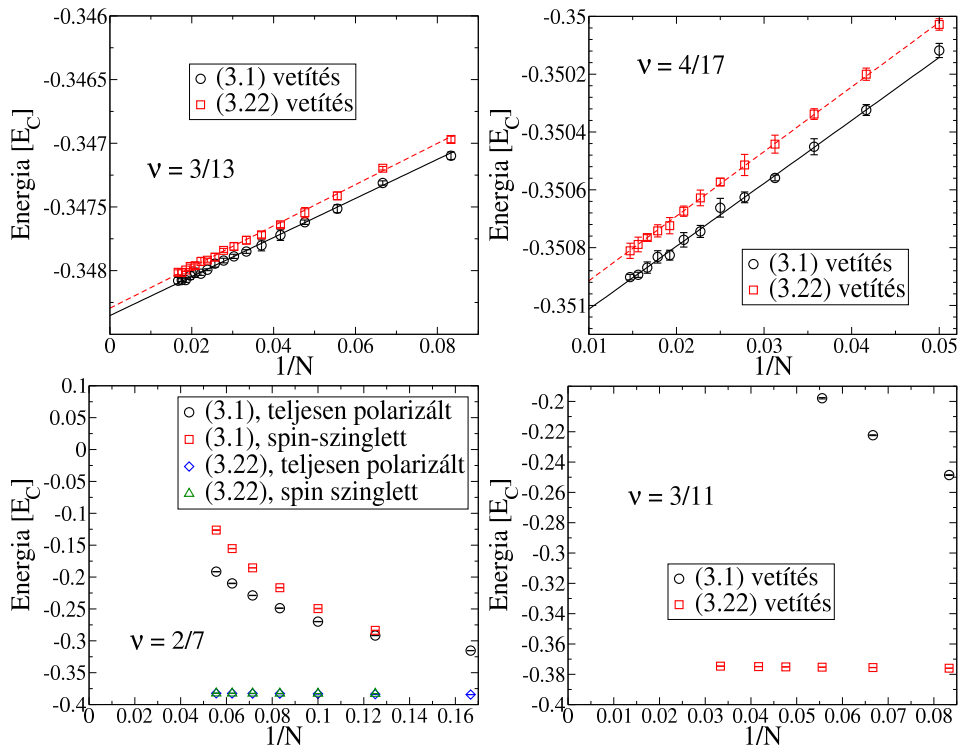
$$\Psi_{\frac{m}{2pm \pm 1}}^{\text{KF}} = J^{2p-2} \mathcal{P}_{\text{LLL}}[\Phi_{m_{\uparrow}} \Phi_{m_{\downarrow}}]^{(*)} J^2. \quad (3.22)$$

Mivel látszólag ezek a hullámfüggvények erősebb rövid távú korrelációt építenek be, azt várhatnánk, hogy alacsonyabb lesz az energiájuk, mint a (3.1) egyenlettel definiált megfelelőiknek. (Ha csak két KF Landau-szintet töltünk fel, megegyező fluxuscsatolás esetén a (3.22) és (3.1) hullámfüggvények azonosak.) Az energiák kiértékelésével azt találjuk, hogy ez igaz $\nu = m/(2pm - 1)$ töltéskor (3.5(a,b) ábra), de nem teljesül a $\nu = m/(2pm + 1)$ TKH állapotoknál (3.5(c,d) ábra). Ezért a fentiekben $p > 1$ esetén $\nu = m/(2pm + 1)$ töltéskor a (3.1) állapotok energiáját, $\nu = m/(2pm - 1)$ töltéskor (3.22) állapotok energiáját tekintettük érvényesnek.

3.3. Kompozit fermionok spontán polarizációja grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén

Amet *et al.* [266] spinátmenetekre utaló jeleket talált grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén. Standard $\nu^{(1)} = m/(2m \pm 1)$ betöltéseknél döntött térben a transzport-tulajdonságok változását észlelték meglehetősen nagy, $B \approx 45$ T terekben. A döntött teres kísérleteket általában a Zeeman-energia hangolásaként értelmezzük, ezért a megfigyelések arra utaltak, hogy ezen a Landau-szinten a spin szabadsági fok releváns marad ilyen nagy tereknél is.

Korábban Shibata és Nomura [125] DMRG módszerrel tanulmányozta a grafén $|n| = 1$ Landau-szintjének TKH állapotait a tóruszon és a gömbön 12 részecskéig, és $\nu^{(1)} = 2/3$ -nél



3.5. ábra. (a,b) A legalacsonyabb Landau-szint teljesen spin-polarizált $\nu = 3/13$ és $4/17$ állapotainak energiája (3.1) egyenlet szerinti vetítéssel és (3.22) szerinti módosított vetítéssel. (c,d) Ugyanez a $\nu = m/(2pm - 1)$ sorozatokba tartozó $\nu = 2/7$ és $3/11$ állapotokban. A módosított vetítés csak a $\nu = m/(2pm - 1)$ állapotoknál előnyös.

és $2/5$ -nél az alapállapotot teljesen spinpolarizáltak találták zérus Zeeman-energia esetén is. Azonban látni fogjuk, hogy jóval nagyobb rendszerekre van szükség annak eldöntésére, milyen az alapállapot polarizáltsága termodinamikai határesetben³. Mivel az $|n| = 1$ szinten megfigyelt törtek a szokásos $m/(2pm \pm 1)$ sorozatba tartoznak, a kompozit fermion elmélet természetes kiindulópont, de *a priori* nem világos annak pontossága, a kompozit fermionok közötti kölcsönhatás elhanyagolhatósága.

Alább kis rendszerek egzakt diagonalizációjának és variációs számítások összehasonlításával megmutatjuk, hogy a TKH alapállapotokat grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén jól leírja a KF elmélet. A két módszer kombinációjával megmutatjuk, hogy a TKH állapotok teljesen spinpolarizáltak, azaz amellet tesszük le voksunkat, hogy Amet *et al.* [266] döntött mágneses térben végzett mérései nem kapcsolatosak spinátmenetekkel. Ezt megerősítjük a TKH állapotok kollektív módusaira vonatkozó számolásokkal; eredményeink kvalitatív különbséget mutatnak ki a legalacsonyabb Landau-szinthez képest, ahol a megfelelő diszperziók mind elméletileg [290, 294], mind kísérletekből [129, 295, 296] ismertek.

Számításaink során mind a minta rendezetlenségét, mind merőleges vastagságát elhanyagoljuk. Az utóbbi grafénben nyilvánvalóan jogos; az előbbinek hatása a termodinamikai mennyiségekre várhatóan kisebb, mint az egyrészecskés gerjesztésekre. Gömbi geometriát alkalmazunk (1.4.1 szakasz), amelyben a teljes pályamomentum L és a teljes spin S jó kvantumszám. Grafénben mindegyik Landau-szint négy példányban fordul elő (két spin, két völgy), melyeknek energia-felhasadása számos tényező következménye lehet [142, 287–289]. A legtöbb kísérlet, beleértve Amet *et al.* [266] méréseit, leírható egyetlen $SU(2)$ szabadsági fokkal. Ezért ebben az alfejezetben erre az esetre korlátozódunk; spinről beszélünk, de állításaink akkor is elmondhatók, ha a völgy szabadsági fok marad releváns.

Az alapállapot spin-polarizációja

A kétörvényes $m/(2m \pm 1)$ sorozatban megvizsgáltuk a $2/5$, $3/7$, $4/9$, $2/3$, $3/5$, $4/7$ törteket, a négyörvényes $m/(4m \pm 1)$ sorozatban a $2/9$, $3/13$, $2/7$, $3/11$ törteket, a hatörvényes $m/(6m \pm 1)$ sorozatban a $2/13$, $2/11$, $3/17$ törteket. A $m/(2m \pm 1)$ sorozatban minden állapotot spinpolarizáltak találtunk, nem teljesen spinpolarizált állapotok csak a négy- vagy hatörvényes kompozit fermionok esetében fordulhatnak elő.

Egzakt diagonalizáció

A gömbön a Coulomb kölcsönhatás a $\langle m_1, m_2 | V | m_3, m_4 \rangle$ kétrészecskés mátrixelemeken keresztül jelenik meg, ami a V_μ pszeudopotenciálból a (1.22) egyenlet alapján számolható. Grafénben az elektronpályák spinorok, a 2D tömegtelen Dirac-egyenlet megoldásai. Az $n = 0$ szinttől eltekintve a spinorkomponensek a szokásos $n - 1$ és n indexű Landau-állapotok:

$$||n, m\rangle\rangle = \begin{pmatrix} |n-1, m\rangle \\ |n, m\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

A síkon a (2.3) egyenlet adja meg a konkrét függvényalakot. A Landau-indexek különbsége azonban a két spinorkomponensben gondot okoz a gömbön. Ha Q a monopólus erőssége, a két komponens l pályamomentuma különböző, ezért az m mágneses kvantumszám megengedett

³Egy régebbi cikkünkben [268] kompozit fermion elmélettel alkalmazásával a gömbön azt találtuk, az alapállapot polarizálatlan, ha a Zeeman-energia nulla. Ekkor azonban az $|n| = 1$ grafén Landau-szint kölcsönhatását $n = 0$ bázisban szimuláló effektív kölcsönhatásnak olyan alakját használtuk, amely később pontatlannak bizonyult. Most a később kifejlesztett, pontosabb (3.9) közelítő alakot használunk [34], és több törtet vizsgálunk meg.

értékei is különböznek. Egyfajta megoldás, hogy a síkon analitikusan kiszámolt V_μ pszeudopotenciálokat (3.8, 3.10) visszük át a gömbre [268, 273–275, 297] $\mu \leq 2l$ megszorítással. Kellően nagy rendszerekre ez megbízható megoldást ad, de a véges méret korrekciók jelentősek lehetnek. Ebben az alfejezetben alternatív megoldást alkalmazunk, amely Jellal [298] által a tömegtelen Dirac problémának a gömbön érvényes megoldásán alapul. A spinor hullámfüggvényeket azonos l impulzusmomentum, tehát különböző Q monopóluserősség melletti pályákból építjük fel. Így a grafén-spinorok mátrixelemeit a szokásos kétdimenziós elektrongáz skaláris mátrixelemeivel fejezzük ki, amiket a gömbön számolunk ki, ezért minden távolságban pontosak [273, 299]:

$$\begin{aligned}
4 \langle \langle m_1, m_2 | |V| | m_3, m_4 \rangle \rangle = & \langle n-0, m_1; n-0, m_2 | V | n-0, m_3; n-0, m_4 \rangle + \\
& + \langle n-1, m_1; n-0, m_2 | V | n-1, m_3; n-0, m_4 \rangle + \\
& + \langle n-0, m_1; n-1, m_2 | V | n-0, m_3; n-1, m_4 \rangle + \\
& + \langle n-1, m_1; n-1, m_2 | V | n-1, m_3; n-1, m_4 \rangle. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

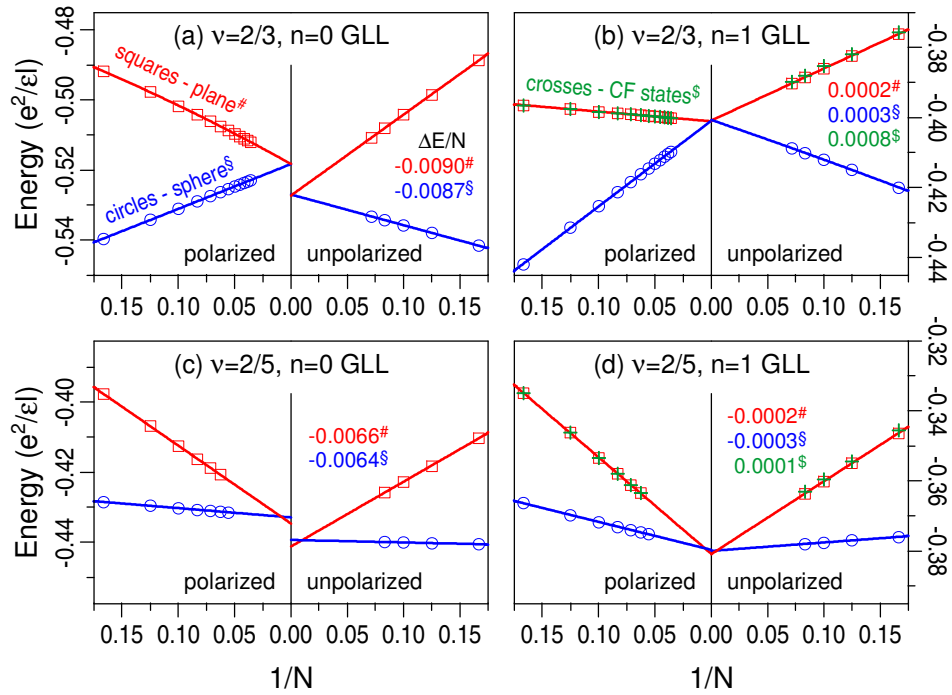
A jobb oldalon szereplő mátrixelemek gömbi integrálok Y_{Qlm} monopólharmonikusok között; mivel l ugyanaz a két spinorkomponensben, $Q = l - n$ ill. $Q' = l - n + 1$. A mátrixelemeket először $e^2/4\pi\epsilon R$ egységekben kapjuk meg, ahol R a gömb sugara, majd átszámoljuk $E_C = e^2/4\pi\epsilon\ell$ egységekbe, ahol a mágneses hossz $\ell = R/\sqrt{Q}$ a $2Q$ fluxustól függ. Az utóbbi célra a két fluxus átlagát használjuk, azaz $\ell^{\text{av}} = R/\sqrt{Q^{\text{av}}}$, $Q^{\text{av}} = (l + (l-1))/2 = l - 1/2$; az energiaegység $e^2/4\pi\epsilon\ell^{\text{av}}$ lesz. Ugyanígy a pozitív háttér figyelembe vételekor levont $Ne^2/(8\pi\epsilon R)$ energiában $R = \ell^{\text{av}}\sqrt{Q^{\text{av}}}$. Végül a sűrűségkorrekció során az egy részecskére jutó energiát $\sqrt{2\nu Q^{\text{av}}/N}$ számmal szorozzuk. Ez az eljárás nagy μ esetén is korrekt V_μ pszeudopotenciált ad, az egy részecskére számolt alapállapot energiák közel lineárisak lesznek $1/N$ -ben, és termodinamikai határesetben ugyanazt az energiát kapjuk, mint a síkbeli pszeudopotenciálok használatával.

Egy alapállapot homogén és összenyomhatatlan, ha $L = 0$ és van felette egy véges gap. Az eredményeket a 3.6 és 3.7 ábrák mutatják, mind a csonkolt planáris (3.10), mind a gömbi (3.24) pszeudopotenciálokra. A kettő termodinamikai limesze megegyezik. Csak a kölcsönhatási energiát mutatjuk, a Zeeman-járulékot nem. Korábbi számolásokkal összhangban [63, 64] az $n = 0$ szinten a spin szinglett állapot energiája alacsonyabb. $\nu^{(1)} = 2/3$ és $\nu^{(1)} = 2/5$ betöltéseknél azonban a teljesen polarizált és a szinglett állapotok kölcsönhatási energiája majdnem megegyezik. Ezért nagyobb rendszerek vizsgálata döntheti csak el, melyik az alapállapot. Alább a KF elméleten alapuló számításokkal megmutatjuk, hogy a teljesen spinpolarizált állapot energiája valamivel kisebb ezekben a TKH állapotokban is. A $\nu^{(1)} = 3/5$ és $3/7$ állapotok elemzése hasonló eredményt ad: az egzakt diagonalizációval vizsgálható kis rendszerekben a teljesen és részlegesen polarizált állapotok energiája szinte megegyezik, de a KF elmélettel elérhető nagyobb rendszerek a teljesen spinpolarizált állapotot jósolják alapállapotnak.

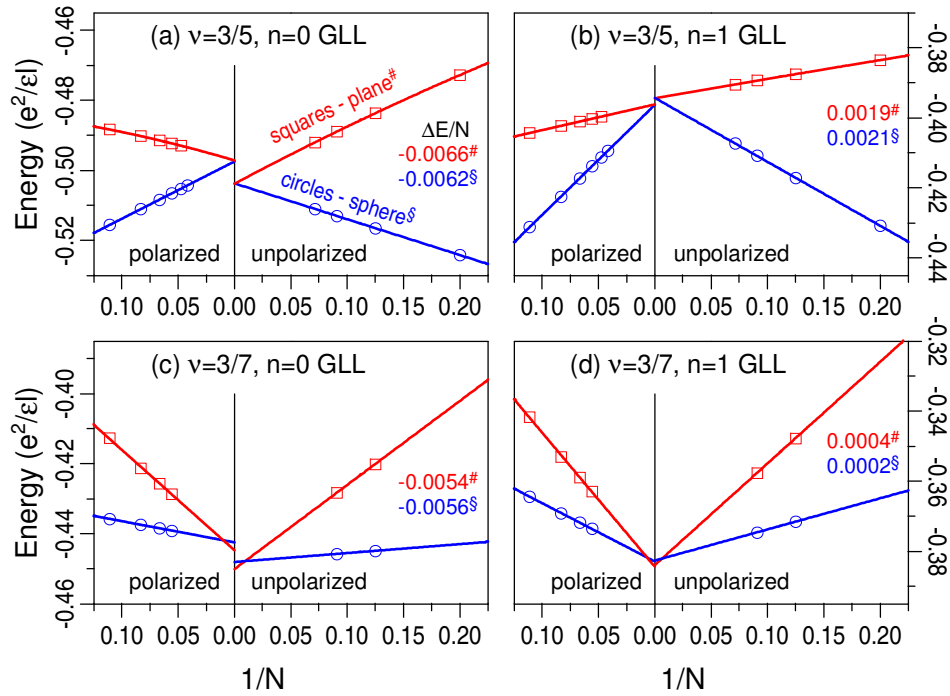
A 3.4. táblázatban mutatjuk a $n = 0$ és $|n| = 1$ grafén Landau-szintek alapállapotainak átfedését egymással különböző spinpolarizációra különböző betöltési számoknál. A teljesen spinpolarizált állapotok szinte megegyeznek a két szinten. A részlegesen vagy nem polarizált állapotok esetében az átfedés valamivel kisebb. Kiszámoltuk továbbá a $|n| = 1$ szint effektív Coulomb kölcsönhatásának várható értékét a $n = 0$ szint alapállapotában. Ezek a zöld keresztetek a 3.6. ábrán, amik szinte egybeesnek a piros négyzetekkel. Mivel a $n = 0$ Landau-szint alapállapotát a KF elmélet pontosan írja le, ez az összehasonlítás igazolja a KF elmélet alkalmazását grafén $|n| = 1$ szintjén; a konvencionális kétdimenziós elektrongáz esetében ez jóval problematikusabb [300].

$(m_{\uparrow}, m_{\downarrow})$	ν	$N_{\uparrow}$	$N_{\downarrow}$	$2Q$	dimenzió	átfedés
(2,0)	2/5	16	0	36	155484150	0.999898
(1,1)	2/5	6	6	27	2211680688	0.931381
(2,0)	2/3	26	0	39	259140928	0.999815
(1,1)	2/3	7	7	20	280934870	0.788248
(3,0)	3/7	18	0	37	386905330	0.999928
(2,1)	3/7	8	3	22	17969272	0.913355
(3,0)	3/5	21	0	36	155484150	0.999898
(2,1)	3/5	12	2	23	383215178	0.848060

3.4. táblázat. Az azonos $\nu^{(n)}$ relatív betöltési számhoz tartozó egzakt alapállapotok átfedése egymással a grafén $n = 0$ és $|n| = 1$ Landau-szintjén a gömbi geometria pszeudopotenciájainak használatával az általunk számolt legnagyobb rendszerekben. Feltüntetjük a Hilbert-tér dimenzióját is.



3.6. ábra. A teljesen spinpolarizált és spin-szinglett alapállapotok energiájának extrapolációja a termodinamikai határesetre $\nu^{(1)} = 2/3$ (b) és $2/5$ (d) betöltési számoknál. Az (a) és (c) paneleken a $n = 0$ szint analóg eredményeit látjuk $2/3$ -nál és $2/5$ -nél. Piros négyzetek: síkbeli pszeudopotenciálok, kék körök: gömbi pszeudopotenciálok. Az utóbbi esetben a háttér levonása és a sűrűségkorrekció a 61. oldalon leírt módon történt. A zöld keresztek $|n| = 1$ grafén Landau-szint Coulomb-kölcsönhatásának várható értékét mutatják a $n = 0$ grafén Landau-szint alapállapotaiban. Az energiaegység E_C mindenütt.



3.7. ábra. Mint a 3.6. ábra, de $\nu^{(1)} = 3/5$ és $\nu^{(1)} = 3/7$ betöltéseknél.

Kompozit fermion hullámfüggvények

A spinnel rendelkező kompozit fermion-állapotokat a (3.1) egyenlet definiálja, közelítő JK vetítést alkalmazunk [50, 54, 55]. A hullámfüggvények energiáját Monte Carlo módszerrel értékeljük ki a gömbön, a (3.9) egyenletben bevezetett $V^{\text{eff}}(r)$ valós térbeli kölcsönhatás felhasználásával. Ezek szerepelnek „KF h.f.” néven a 3.5-3.7. táblázatokban. Továbbá, $\nu = 2/5$ és $3/7$ betöltésnél kompozit fermion diagonalizációt hajtottunk végre (1.4.4 szakasz). Az ilyen módon kapott eredményeket „KFD” jelöli a 3.5 és 3.6 táblázatokban.

A pozitív háttér levonása a 1.4.1 szakaszban leírt módon történik. Ez különbözik az egzakt diagonalizáció során alkalmazottól (61. o.). Variációs hullámfüggvényekkel jóval nagyobb rendszerekig el tudunk menni, ezért az energia számítása során a nem extenzív $\mathcal{O}(1)$ különbségek nem jelentősek, termodinamikai határesetben pedig ugyanúgy el kell tűnniük, mint a síkon és gömbön számított pseudopotenciálok miatti különbségeknek. Azonos rendszerméret esetében azonban az egzakt diagonalizációval és variációsán kapott energiák nem összehasonlíthatók.

A kompozit fermion hullámfüggvényekből számított alapállapot energiát a 3.5-3.7. táblázatok mutatják különböző spinpolarizációk esetére, a termodinamikai határesetre lineáris extrapolációt alkalmazva. A 3.8. ábra mind a lineáris, mind a kvadrátikus extrapolációt mutatja néhány esetben. A két módszer általában azonos eredményt ad, kivéve talán $\nu = 3/17$ esetben, ahol a kis számú pont miatt nem lehetséges konklúziót levonni. Az *energia-különbségeket* az extrapoláció módszere nem befolyásolja érdemben.

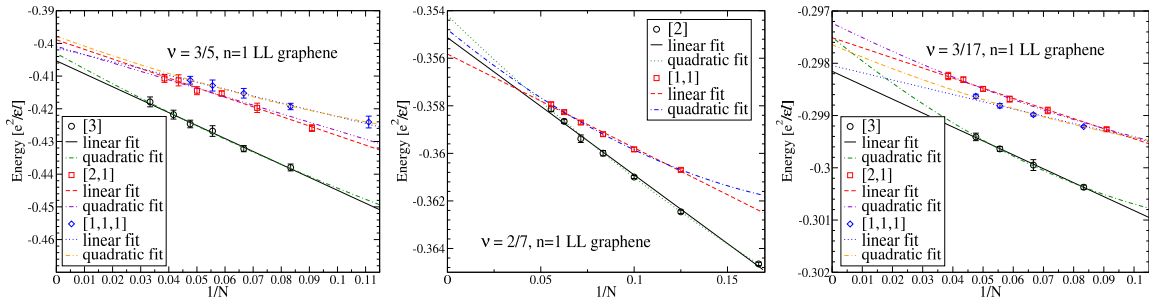
Eredményeink szerint a $\nu^{(1)} = m/(2m \pm 1)$ sorozatban a teljesen polarizált állapot energiája minden esetben alacsonyabb, mint a nem teljesen polarizáltaké. A 3.9. ábra a $2/5$ -nél előforduló teljesen polarizált ill. szinglett állapotok energia-különbségét mutatja $1/N$ függvényében. A termodinamikai határesetben ez $\sim 0.002E_C$ -hez tart. Amint megjegyeztük, a (3.1) hullámfüggvények pontosabbak teljesen polarizált állapotokra, mint a polarizálatlanokra. Alább KF diagonalizációval javítjuk az állapotokat, és megmutatjuk, hogy a KF alapállapotok

$\nu^{(1)}$	teljesen polarizált		spin-szinglett		Δ_Z^c	
	KF h.f.	KFD	KF h.f.	KFD	KF h.f.	KFD
2/3	-0.4122(4)		-0.4097(7)	-	-	-
2/5	-0.3821(1)	†	-0.3803(1)	†	-	-
2/7	-0.3551(1)		-0.3558(1)	-	0.0014(4)	-
2/9	-0.32542(4)	-	-0.32477(2)	-	-	-
2/11	-0.30176(1)		-0.30170(3)		-	-
2/13	-0.281714(9)	-	-0.28095(2)	-		-

3.5. táblázat. Coulomb kölcsönhatási energiák grafén $\nu^{(1)} = 2/(4p \pm 1)$ betöltésénél a termodinamikai határesetben teljesen spinpolarizált ill. szinglett állapotokban. Megadjuk a spinátmenethez tartozó kritikus Zeeman-energiákat is, ahol ez értelmes. Az energiaegység E_C . † az alapállapot energiája itt nem extrapolálható egyenesillesztéssel.

egyszerű összehasonlítása túlbecsüli az energiakülönbséget, de jól adja vissza a sorrendjüket.

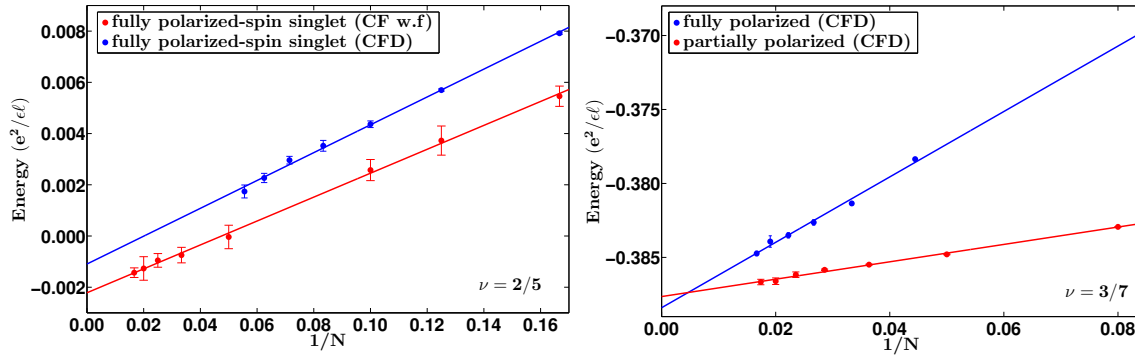
A négy ill. hat örvényes KF állapotok ($\nu^{(1)} = m/(4m \pm 1)$ és $m/(6m \pm 1)$ sorozatok) esetében szintén a teljesen spinpolarizált állapot energiája a legkisebb, kivéve $\nu^{(1)} = 2/7$ -nél, ahol a szinglett állapot energiája $0.0014(4)E_C$ értékkel kisebb. Ugyanez a TKH állapot kivételes a legalacsonyabb Landau-szinten is [24]. A nem túl fontos $\nu^{(1)} = 3/17$ törtnél nem tudunk konklúziót levonni.



3.8. ábra. Különböző spinpolarizáltságú kompozit fermion alapállapotok energiájának extrapolációja a termodinamikai határesetre grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén. (a) Tipikus eset: a KF elmélet teljes spinpolarizált TKH állapotot jósol $\nu^{(1)} = 3/5$ -nél. Hasonló eredményt kapunk 2/3, 2/5, 2/9, 2/11, 2/13, 3/7, 3/11, 3/13 törteknél. (b) A kivételes $\nu^{(1)} = 2/7$ esetben polarizálatlan az alapállapot. (c) $\nu^{(1)} = 3/17$ -nél nem konklúzív a számolás.

Kompozit fermion diagonalizáció

A 1.4.4 szakaszban leírt módon járunk el. Két állapotra, $\nu^{(1)} = 2/5$ -re és $3/7$ -re fókuszálunk. A 3.9(b) ábra mutatja a teljesen és részlegesen spinpolarizált állapotok energiájának extrapolációját a termodinamikai határesetre $3/7$ -nél KFD módszerrel; az eredményt a 3.6. táblázat tartalmazza. $\nu^{(1)} = 2/5$ -nél az alapállapot energiákra nem plauzibilis a lineáris extrapoláció $1/N$ függvényében, ezért a két lehetséges állapot energiájának *különbségét* extrapoláljuk a 3.9(a) ábrán. Mindkét esetben a teljesen polarizált állapot energiája alacsonyabb. $\nu^{(1)} = 2/5$ -nél az energiakülönbség $\sim 0.001E_C$, lényegesen kisebb, mint fentebb az alapállapot KF hullámfüggvények összehasonlításából.



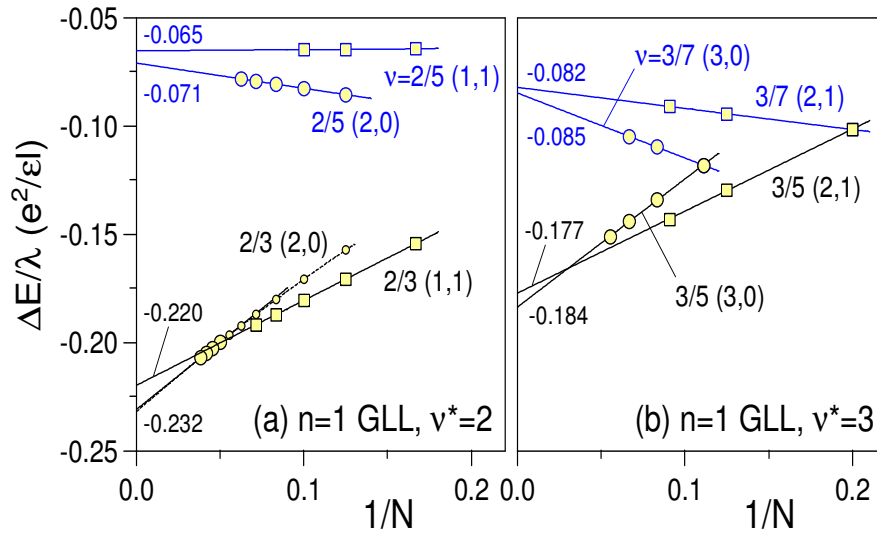
3.9. ábra. A különböző spinpolarizációjú TKH állapotok kompozit fermion diagonalizációval számított energiájának extrapolációja a termodinamikai határesetre grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén, a (3.9) effektív kölcsönhatás felhasználásával. (a) Az állapotok *energiakülönbsége* $\nu^{(1)} = 2/5$ -nél, (b) az állapotok *energiája* $\nu^{(1)} = 3/7$ -nél. Mindkét esetben teljesen polarizált alapállapotot kapunk.

$\nu^{(1)}$	teljesen polarizált		részben polarizált	
	KF h.f.	KFD	KF h.f.	KFD
3/5	-0.405(2)		-0.399(2)	-
3/7	-0.3845(4)	-0.3884(3)	-0.3819(3)	-0.3877(1)
3/11	-0.3489(3)		-0.3488(2)	-
3/13	-0.32919(5)		-0.32861(8)	-
3/17	-0.29803(9)		-0.29751(7)	-

3.6. táblázat. Hasonló a 3.5. táblázathoz a $\nu^{(1)} = 3/(6p \pm 1)$ törtek esetére.

$\nu^{(1)}$	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
4/9	-0.3864(4)	-0.3834(3)	-0.3835(2)	-0.3842(2)	-0.38507(7)

3.7. táblázat. Hasonló a 3.5. táblázathoz a $\nu^{(1)} = 4/(8p \pm 1)$ törtek esetére. A teljesség kedvéért megadjuk olyan állapotok energiáját is, amelyek csak SU(4) rendszerekben lehetségesek.



3.10. ábra. Az egzakt Coulomb alapállapotok korrekcióinak extrapolációja termodinamikai határesetre a (3.21) egyenletben definiált λ paraméter függvényében, a grafén $|n| = 1$ Landau-szintjének (a) $2/3$ és $2/5$, ill. (b) $3/5$ és $3/7$ betöltöttségénél.

Korrekciók a Landau-szintek keveredéséből

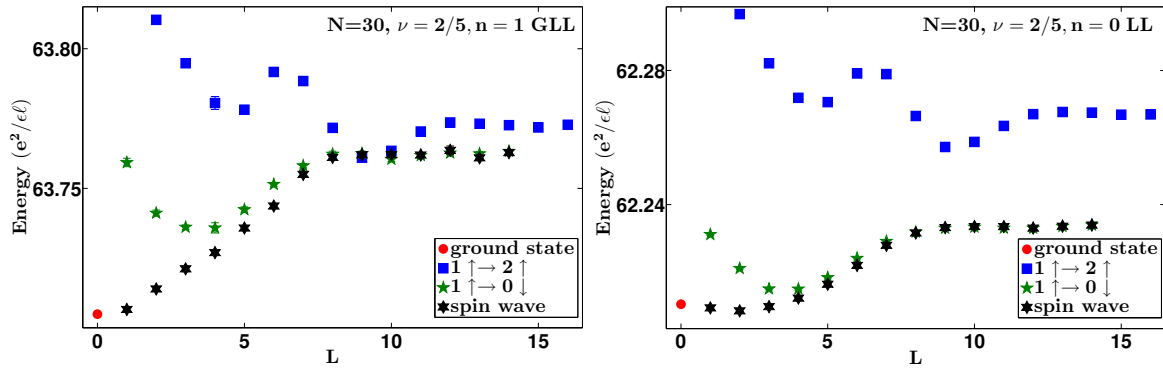
A Landau-szintek keveredésének erősségét⁴ a kölcsönhatási energia és a kinetikus energia λ hányadosával jellemezzük, ami grafénben független a mágneses tértől [(3.21) egyenlet]. Grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén a keveredés a kétrészecskés kölcsönhatás módosításán túl háromrészecskés effektív kölcsönhatást is eredményez a perturbációs számítás vezető rendjében [279]. A releváns pár- és triplét-amplitudókat az egzakt alapállapotokban számoltuk ki különböző N rendszerméretekre, majd a termodinamikai határesetre extrapoláltunk, végül a megfelelő két- és háromrészecskés pszeudopotenciálokkal [291] kombináltunk.

A 3.10. ábra mutatja a Landau-szintek keveredése okozta energiaeltolódást a $|n| = 1$ grafén szint állapotaiban. A szintek keveredése láthatóan a teljesen polarizált állapotokat részesíti előnyben. Megjegyezzük azonban, hogy a korrekciókat elsőrendű perturbációs számításra alapuló módszerrel vettük figyelembe [279], aminek alkalmazhatósága realisztikus λ -k esetére (56. o.) nem világos.

Gerjesztések

Háromfajta alacsonyenergiás kollektív módust tanulmányoztunk $\nu^{(1)} = m/(2m \pm 1)$ betöltési számnál, teljesen polarizált alapállapotot feltételezve: (i) *Spin-megőrző*: kompozit fermiont gerjesztünk a $(m-1) \uparrow$ szintről az $m \uparrow$ szintre. Ezek az excitonok adják a magnetoroton vagy magnetoplazmon módust. A legalacsonyabb Landau-szinten a diszperziójuk a KF elméletből ismert [301], és a rezonáns Raman mérésekkel összhangban van [294, 302, 303]. (ii) *Spin-fordító*: kompozit fermiont gerjesztünk a $(m-1) \uparrow$ szintről a $0 \downarrow$ szintre. Ismert, hogy $m \geq 2$ esetben ezeknek diszperziója csak egy minimális Zeeman-energia felett pozitív [295], ami összhangban van azzal az elméleti eredménnyel, hogy nulla Zeeman-energia mellett a legalacsonyabb Landau-szinten az alapállapotok nem teljesen spinpolarizáltak [24, 64]. (iii) Kiszámoljuk a spinhullám módust is. Ennek KF modellje olyan gerjesztés, amelyben csak a

⁴Lásd a 1. lábjegyzetet a 15. oldalon.



3.11. ábra. Spinhullám (fekete hatágú csillag), spin-megőrző (kék négyzet) és spin-fordító (zöld ötágú csillag) kollektív módusok $N = 30$ elektronra $\nu^{(n)} = 2/5$ betöltésnél (a) grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén, (b) a legalacsonyabb Landau-szinten.

spin változik, azaz $m \uparrow \rightarrow m \downarrow$.

A 3.11. ábra mutatja a kollektív módusok diszperzióját grafén $n = 1$ Landau-szintjének $\nu^{(1)} = 2/5$ betöltésénél a kompozit fermion elmélet alapján a (3.9) egyenlet effektív kölcsönhatásával, illetve összehasonlításképpen a legalacsonyabb Landau-szint megfelelő betöltésénél. Ellentétben a legalacsonyabb Landau-szinttel [295], a spinfordító módusnak a $|n| = 1$ grafén Landau-szinteken nem esik a roton-minimuma az alapállapot energiája közelébe. Érdekes, hogy a $|n| = 1$ szinten nagy momentum esetén a spinfordító és spinmegőrző módusok energiája nagyon közeli (3.11(a) ábra), míg a $n = 0$ szinten lényegesen különböznek (3.11(b) ábra).

A spinhullám módus diszperzióját egzakt diagonalizációból is kiszámoltuk, lásd a 3.12. ábrán. A spinhullámok az alapállapottal összekötött, kvadratikus diszperziójú módusként jelennek meg. Véges rendszerben természetesen csak diszkrét pontjaink vannak, de a különböző rendszerméretnél kapott spektrumokat egymáson elhelyezve folytonos görbe rajzolódik ki. Látszik, hogy a teljesen spinpolarizált állapot $m/(2m \pm 1)$ betöltésnél, ha $m \geq 2$, instabil a $n = 0$ Landau-szinten kellően kis Zeeman-energia esetén, míg a $|n| = 1$ szinten nem.

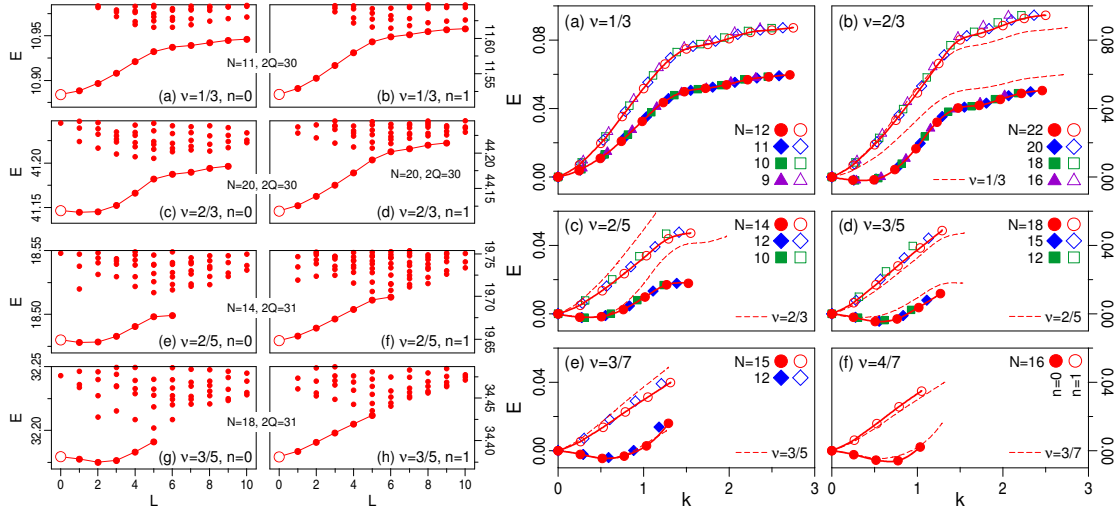
Összefoglalás

Három, egymást kiegészítő számolással (kis rendszerek egzakt diagonalizációja, kompozit-fermion állapotok kiértékelése, gerjesztési módusok számolása) ellenőriztük, hogy a TKH állapotok teljesen spinpolarizáltak grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén a Zeeman-energia értékétől és a Landau-szintek keveredéstől függetlenül. Amet *et al.* [266] mérési eredményei továbbra is magyarázatra várnak. Eredményeink szerint a TKH állapotok gyengülése döntött térrel elért nagy Zeeman-energia esetén nem értelmezhető spin-átmenet kezdeteként.

3.4. Többkomponensű tört kvantált Hall állapotok gerjesztései grafénben

A spin és völgy szabadsági fokok miatt grafénben egy-, két- és négykomponensű tört kvantált Hall effektus fordulhat elő különböző paraméter-tartományokban. Ebben az alfejezetben egyes TKH állapotok stabilitását vizsgáljuk meg az $SU(4)$ szimmetrikus határesetben.

Támaszkodunk a TKH effektussal GaAs rendszerekben szerzett tapasztalatainkra, ahol az effektus alapja kompozit fermionok kialakulása (1.2. szakasz). A 3.2 és 3.3 alfejezetekben



3.12. ábra. Balra: az egzakt spektrum összehasonlítása az $n = 0$ Landau-szinten (a,c,e,g) és grafén $|n| = 1$ szintjén (b,d,f,h) a $\nu^{(n)} = m/(2m \pm 1)$ sorozat néhány állapotában. A spinhullám módust kiemeljük. Jobbra: a spinhullám módusok összehasonlítása a két esetben különböző rendszerméreteknél. A tele szimbólumok az $n = 0$ Landau-szintre, az üresek az $|n| = 1$ szintre vonatkoznak.

láttuk, hogy grafénben is kompozit fermionok alakulnak ki mind a $n = 0$, mind a $|n| = 1$ Landau-szinteken; a TKH effektus $\nu^{(n)} = m/(2pm \pm 1)$ relatív betöltési számnál (3.11) alakul ki. Az $|n| = 1$ Landau-szinten az alapállapot teljesen polarizált (3.3. alfejezet). Az $n = 0$ Landau-szinten viszont szimmetriasértő terek hiányában legtöbb spin/völgy komponenszt kihasználó állapot az alapállapot [268]. A grafénen végzett mérések részben megfelelnek az elméleti várakozásoknak, hiányoznak azonban a $2 - 1/3$ és $2 - 2/5$ törtek, miközben a $2 - 2/3$ és $2 - 4/3$ TKH állapotok erősek. Szintén meglepő a TKH állapot $\nu = 1/3$ -nál ($\nu^{(0)} = 7/3$): azt váránk, $-2 + 1/3$ és $2 - 1/3$ ($\nu^{(0)} = 1/3$) erősebbek, mivel a $\nu = \pm 2$ viszonyítási állapothoz nem kell spontán szimmetriasértés.

Célunk az egyes állapotok stabilitásának meghatározása a gerjesztési módusok és a gapek kiszámolásával a KF elmélet keretein belül. Csak az SU(4) esetet mutatjuk be, mivel az SU(2) esetre vonatkozóan vannak az általunk 2012-ben publikáltnál korszerűbb számolások is [304].

A modell Hamilton-operátor

Ha az elektronok mozgása egyetlen Landau-szintre korlátozódik, a kinetikus energia konstans, és hosszúhullámú esetben elegendő olyan Hamilton-operátort vizsgálnunk, amely diagonális az alrács-komponensekben (ezeket nem is tüntetjük fel):

$$\mathcal{H} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \sum_{i < j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \sum_j \frac{\Delta_Z}{2} \hat{\sigma}_j^z + \sum_j \frac{\Delta_V}{2} \hat{\tau}_j^z. \quad (3.25)$$

Itt ϵ a közeg dielektromos állandója, $\hat{\sigma}_i$ és $\hat{\tau}_i$ Pauli-mátrixok, amelyek a spin és a Dirac-völgy indexeken hatnak, Δ_Z és Δ_V a Zeeman- és völgy felhasadások. Ha $\Delta_Z = \Delta_V = 0$, ennek a Hamilton-operátornak SU(4) szimmetriája van, és pl. $\hat{\sigma}_z \otimes \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \otimes \hat{\tau}_z$, $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\tau}_z$ definiálják a súlyokat az SU(4) multiplettekben [138]. A kompozit fermionoknak további kvantumszámuk lesznek a $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(4)}$ készletből, amik az SU(4) fundamentális reprezentációjában választott

bázist adják, és választhatók pl. mint $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\downarrow\uparrow$, és $\downarrow\downarrow$, ahol az első nyíl a völgyre, a második a spinre vonatkozik. Jelölje (m_1, m_2, m_3, m_4) azt az összenyomhatatlan állapotot, amelyben $m_1, \dots, m_4$ KF Landau-szint betöltött a $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(4)}$ bázisban. Az, hogy melyik lesz ezek közül az alapállapot, Δ_Z és Δ_V értékétől függ [268]. Mivel az $|n| = 1$ Landau-szinten az alapállapot teljesen polarizált (3.3 alfejezet), a többkomponensű pályaszerkezet csak az $n = 0$ Landau-szinten jelent újdonságot.

A spin és völgy szabadsági fokok közötti esetleges csatolást elhanyagoljuk, csakúgy, mint a Landau-szintek közötti keveredést. Szintén elhanyagoljuk a kölcsönhatás anizotrópiáját, amit a rácsszerkezet okoz, mivel ez az effektus kicsi, arányos az a rácshálósárával és az ℓ mágneses hossz arányával. Elhanyagoljuk továbbá a rendezetlenség hatását, ami a TKHE-ra vonatkozó elméleti számításokban általános, mivel nem tudjuk az elektron-elektron kölcsönhatást és a rendezetlenséget egyszerre kezelni. Elvben elképzelhető, hogy a rendezetlenség másképpen hat az egyes TKH állapotokra, ezért megváltoztatja egymáshoz viszonyított stabilitásukat. De erre utaló eredmény nincs. Ha szigorúak vagyunk, az alábbi eredmények a kis rendezetlenségű limeszben érvényesek.

Az SU(4) eset vizsgálata

Következőnek az SU(4) szimmetrikus esettel foglalkozunk, ami ekvivalens völgyek és kis mágneses tereknél releváns. Ha a kompozit fermionok közötti kölcsönhatás teljesen elhanyagolható lenne, a $m/(2pm \pm 1)$ alakú törtek csak $m = 4, 8, \dots$ értékekre lennének megfigyelhetők, de a KF-ek közötti maradék kölcsönhatás spontán szimmetriasértést okoz, megfigyelhetővé téve mindegyik ilyen törtet [268]. Megmutatjuk, hogy új Goldstone-módus válik lehetővé, amely a TKH effektusban korábban ismert spinhullámok [295] SU(4) általánosítása. E módusok miatt a $2/5$ és $3/7$ TKH állapotok gyengébbek, mint az SU(2) megfelelőik.

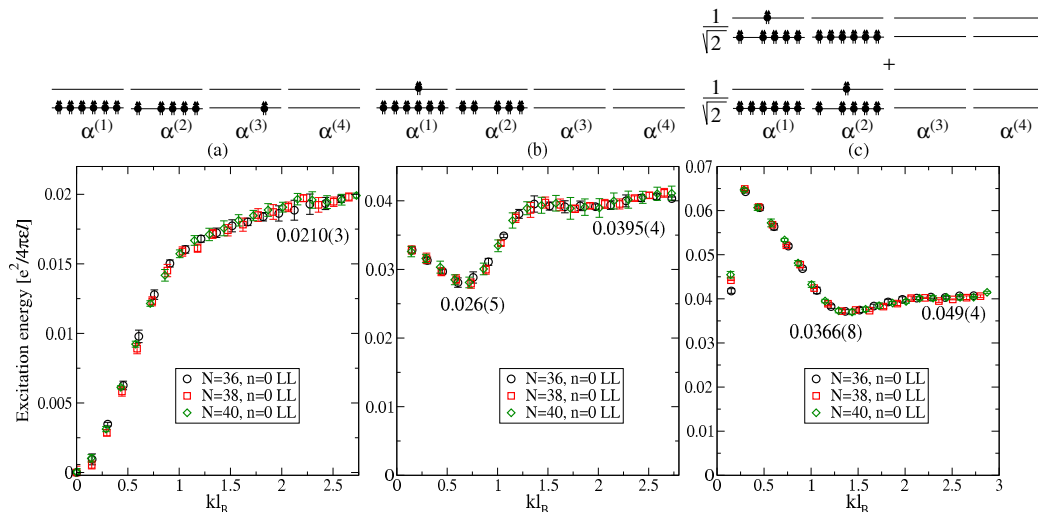
Amint a 3.1 szakaszban láttuk, SU(4) szimmetria esetén minden multiplettben van egy hullámfüggvény, amelynek pálya-része teljesíti a (3.3) Fock feltételt. Ezért SU(4) szimmetriájú alapállapotú KF hullámfüggvények konstruálhatók Slater-determinánsok szorzataiból, lásd a (3.5) egyenletet.

A KF részecske-lyuk állapotok $\Phi_1 \Phi_2 \dots$ Slater-determinánsok szorzatának lineárkombinációja, melyeket a (3.3) Fock feltételt követve megkereshetünk. A gerjesztett állapotok szerkezetét $2/5$, $3/7$ és $4/9$ törteknél a 3.13-3.15 ábrák felett tüntettük fel. Az L teljes pályamomentum sajátállapotai szokásos Clebsch-Gordan kifejtéssel következnek. KF exciton L pályamomentumához a $k = L/R$, $R = \sqrt{Q}$ képletekkel rendelünk hullámszám-vektor, így kapjuk meg a gerjesztések diszperzióját, ami a $k \rightarrow \infty$ határesetben szeparált KF részecske-lyuk energiájához, azaz a transzport gaphez tart. $\Delta_Z = 0 = \Delta_V$ esetben a multiplett degenerált, véges Δ_Z és Δ_V esetén a felhasadások egyszerűen kiszámolhatók.

Alapállapotban $\nu^{(0)} = 1/3$ -nél egyetlen KF Landau-szint van betöltve. Mivel már SU(2) esetében is lehetséges gerjesztés a betöltetlen $n = 0$ KF Landau-szintre, itt nem kapunk új jelenséget SU(4) esetben.

A polarizálatlan $\nu^{(0)} = 2/5$ állapotban két $n = 0$ KF Landau-szint van betöltve; ha $\Delta_Z > \Delta_V$, ezek a $\uparrow\uparrow$ és $\downarrow\uparrow$ komponensek. Ennek az állapotnak kétfajta gerjesztését mutatja a 3.13. ábra: (i) A sokszorosán degenerált SU(4) spinhullámban egy KF „oldalirányba” gerjesztődik egy üres KF Landau-szintre, lásd a 3.13(a) panelen. E módus Young-diagramja $[N/2, N/2-1, 1]$. (ii) Gerjesztések az SU(2) altéren belül: egy KF felgerjesztődik a második KF Landau-szintre, vagy a spin megőrzésével ($[N/2+1, N/2-1]$ Young-diagram), vagy megfordításával ($[N/2, N/2]$). A négyféle eset egy völgy triplettet (3.13(b) ábra) és egy völgy szinglettet (3.13(c) ábra) ad, melyek mindegyike gappal rendelkezik minden hullámszámnál. A triplettet felhasítja a Δ_V energia, és destabilizálja a TKH állapotot, ha eléri a völgy-roton gapet [295],

ami $\Delta_{2/5(b)}^{\text{roton}} = 0.026(5)E_C$. A (c) szinglett roton gapet a völgy vagy Zeeman-felhasadás nem befolyásolja. Az olyan gerjesztésekkel, amelyek egy egyébként üres komponens magasabb KF Landau-szintjébe visznek, nem foglalkozunk, mivel ezek többféle energiaköltséggel is járnak, ezért valószínűleg irrelevánsak.

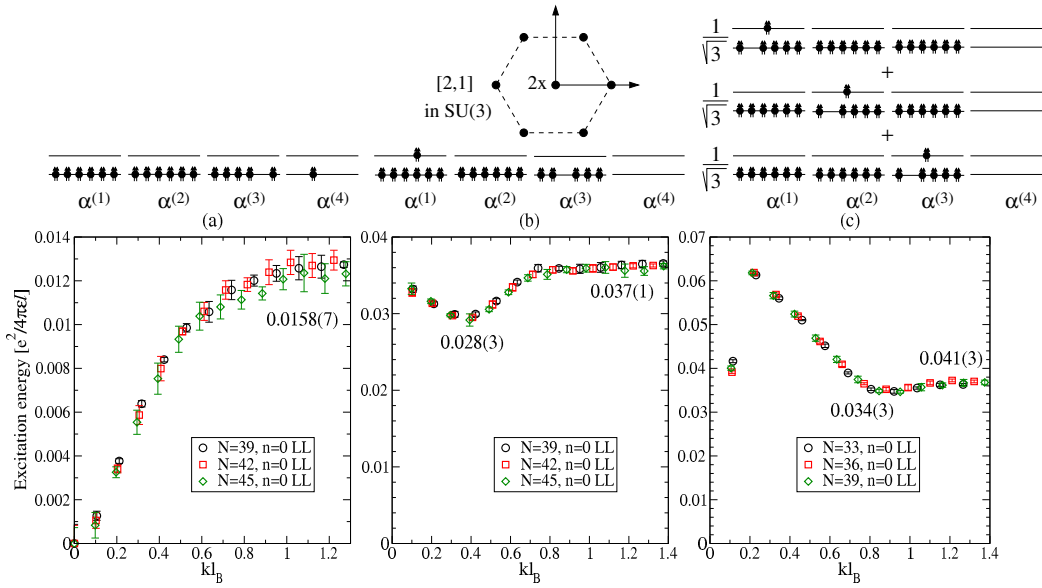


3.13. ábra. A $\nu^{(0)} = 2/5$ TKH állapot gerjesztései és gapje grafén $n = 0$ Landau-szintjén. A felső diagram mutatja a maximális súlyú állapot szerkezetét. A legkisebb gapet az (a) módus határozza meg, amelynek nincs megfelelője GaAs rendszerekben. A (b) és (c) módusok az SU(2) szektor szinglett és triplett gerjesztései. A feltüntetett roton és transzport gapek a termodinamikai határesetre vonatkoznak.

A 3.13. ábrán látható, hogy a szeparált részecske-lyuk párhoz tartozó gap, ami a transzport szempontjából releváns, az (a) KF exciton módushoz tartozik. Mivel a gap nagyjából fele a GaAs-ban előforduló spinpolarizált vagy spin-szinglett $\nu = 2/5$ TKH állapotok gapjének [295], SU(4) esetben lényegesen gyengébb ez az állapot.

A háromkomponensű $\nu^{(0)} = 3/7$ -nél vannak „oldalirányú” gerjesztések (3.14(a) ábra) és az alapállapothoz tartozó SU(3) szektoron belüli gerjesztések (3.14(b) és (c) ábrák). Ez utóbbinak kilenc esete van a kiinduló és a cél komponens szerint, ami egy $[2, 1]$ SU(3) oktetre (lásd a 3.14(b) panel felett) és egy SU(3) szinglettre redukálódik. Ezek a SU(3) multiplettek a $[N/3 + 1, 2, 1]$ és $[N/3]$ SU(4) multiplettekbe kerülnek; mindkettő gerjesztésnek gapje van. Az SU(4) spinhullám módusnak a 3.14(a) ábrán nincs gapje $k \rightarrow 0$ limeszben, és végig ennek a legalacsonyabb az energiája. E módus meglehetősen kicsi transzport gapje a $3/7$ TKH állapotot törekennyé teszi SU(4) esetben.

Ha Δ_Z és Δ_V szimmetriasértő terek végesek, felhasítják a multipletteket; ennek módját az SU(4) multiplettek SU(2) $\times$ SU(2) dekompozíciója [305] alapján következtethetjük ki mind az alapállapotra, mind a gerjesztésre vonatkozóan. Példaként tekintsük a $\nu^{(0)} = 2/5$ állapotot $\Delta_Z > \Delta_V$ mellett. A spin és a pseudospin (völgy) kvantumszámok $(S, P) = (N/2, 0)$ az alapállapotban és $(N/2 - 1, 1)$ vagy $(0, 1)$, $(N/2, 1)$ ill. $(N/2, 0)$ a gerjesztések (a)-(c) módusaiban. Ezért a négyszeresen degenerált (a) módus megemelkedik Δ_Z -vel és $-\Delta_V, 0, 0, \Delta_V$ módon felhasad; a (b) módus szintén eltolódik, de nem hasad fel; a (c) módus nem tolódik el és nem is hasad fel. Mindegyik módusnak és az alapállapotnak is lesznek kópiái magasabb energián Δ_Z eltolásokkal, ami végső soron a többi gerjesztés kontinuumával átfed; a magasabb kópiák szerkezete szintén a SU(4) multiplettek SU(2) $\times$ SU(2) dekompozíciójából [305] következik.



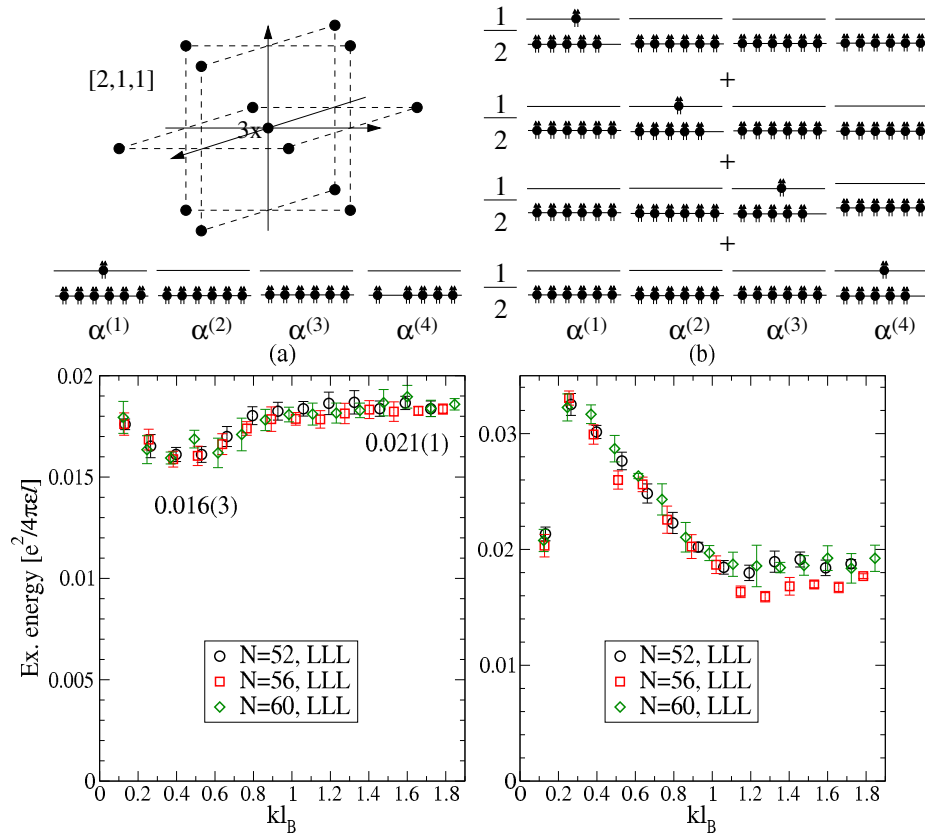
3.14. ábra. A $\nu^{(0)} = 3/7$ TKH állapot gerjesztései és gapje grafén $n = 0$ Landau-szintjén. Az (a) panel spinhullám módusa adja a legkisebb transzport gapot. A (b) és (c) módusnak SU(4) roton gapja van, ami a (b) módusban instabilitást okoz Δ_Z vagy Δ_V növelésével. A roton és transzport gapeket feltüntettük; $2\times$ a multiplicitásra utal.

Tanulmányoztuk továbbá a $\nu^{(0)} = 4/9$ TKH állapotot, amelynek nincs spinhullám módusa, van viszont 16 lehetséges gerjesztése a második KF Landau-szintre, ami egy SU(4) szinglettre és egy 15-szeresen degenerált $[2, 1, 1]$ Young-diagramú multipletre bomlik (3.15. ábra). Nagy k limeszben a gap az SU(4) szinglett gerjesztésből $0.021(1)E_C$. Δ_Z és Δ_V függvényében számos átmenet lehetséges olyan KF állapotokba, amelyekben a spin- és völgy kvantumszámok eltérnek [268]. A (b) módus roton és transzport gapját nem sikerült kellő pontossággal meghatározni a termodinamikai határesetben, de véges rendszerekben nem kisebb, mint az (a) módusé. Nem világos, hogy van-e roton minimum a (b) módusban. Az (a) módus rotonja destabilizálja az állapotot kellően nagy Zeeman-energia esetén.

Összefoglalva, az SU(4) határesetben $\nu^{(0)} = 2/5$ és $3/7$ betöltéseknél a TKH állapotok gapje lényegesen lecsökken egy új SU(4) spinhullám módus megjelenése miatt, ami megnehezíti a megfigyelésüket.

3.5. Kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotai többkomponensű rendszerekben

Amikor a tört kvantált Hall effektust kompozit fermionok egész kvantált Hall állapotaival magyarázzuk (1.2. szakasz), alkalmazunk egy fontos közelítést: a kölcsönhatást a kompozit fermionokba variációs módon beépített korrelációval vesszük figyelembe; a kompozit fermion szabadsági fokok közötti kölcsönhatást gyengének tekintjük, és átlagtérelméleti módon kezeljük. Az irodalomban előfordulnak kísérletek ennek a reziduális kölcsönhatásnak a kiszámítására [306]. Ebben az alfejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, képes-e ez a reziduális kölcsönhatás a *kompozit fermionok* között is erősen kölcsönható állapotokat létrehozni, azaz léteznek-e kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotai. Ennek kísérleti megnyilvánulása újabb TKH állapotok megjelenése a nemkölcsönható (átlagtérrel kölcsönható) kompozit fer-



3.15. ábra. Az $SU(4)$ szinglett $\nu^{(0)} = 4/9$ TKH állapot gerjesztései és gapje grafén $n = 0$ Landau-szintjén. A 15-szeresen degenerált (a) módus súlyainak szerkezetét fent feltüntetjük. Az (a) módus rotonja detabilizálja az állapotot, ha $\Delta_Z + \Delta_V \sim \Delta_{4/9}^{\text{sf-rot on}}$. A roton és transzport gapeket feltüntettük az (a) módusban. $3\times$ a multiplicitásra utal.

mionokkal értelmezett $\nu = m/(2pm \pm 1)$ törteken túl. Az új állapotok várhatóan gyengébbek, kisebb gapjuk miatt könnyebben elnyomja őket a rendezetlenség és a hőmérséklet. Korábban megfigyeltek ily módon származtatható állapotokat $\nu = 1/3$ környékén, pl. 4/11-nél és 5/13-nél [307], és elméleti vizsgálatok folytak mind a teljesen [308, 309], mind a részlegesen spinpolarizált állapotokkal kapcsolatban [66, 310, 311]. A megfigyelt állapotok spinpolarizációját nem mérték meg, bár Raman mérésekből nyerhető indirekt információ [312].

Itt elsősorban a spinnel rendelkező állapotok tulajdonságaira koncentrálunk [57, 63–65, 67, 313], mivel Liu *et al.* [75, 283] spinátmeneteket figyeltek meg 4/5, 5/7, 6/5, 9/7, 7/9, 8/11 és 10/13 betöltéseknél GaAs rendszerekben. Utólag Yeh *et al.* [74] régebbi méréseit is interpretálhatjuk hasonlóképpen.

A [24] cikkben terjedelmes felsorolását adtuk kompozit fermionok THK állapotainak többkomponensű rendszerekben, kiszámoltuk ezek energiáját, és a spinátmenetekhez tartozó kritikus Zeeman-energiákat. (A Zeeman-energia kifejezést most általánosan használjuk: többkomponensű rendszerben a komponensek egyikét előnyben részesítő energiajárulék.) Itt ezen adatoknak csak egy kis részét közöljük, ami a jelenség elvének megértéséhez és a releváns kísérletek értelmezéséhez szükséges.

Számos egyszerűsítéssel élünk. Feltételezzük, hogy a kölcsönhatás $SU(\mathcal{N})$ szimmetrikus; a Zeeman-energia egyszerű additív járulék. Elhanyagoljuk a minta merőleges vastagságát, rendezetlenségét, és a Landau-szintek keveredését. Első közelítésben (variációs) alapállapot hullámfüggvényeket építünk fel a többkomponensű kompozit fermion-kép [(3.1) és (3.5) egyenletek] rekurzív alkalmazásával; ezek energiáját Monte Carlo módszerrel számoljuk ki. Második közelítésben KF bázisfüggvények kis bázisán diagonalizálva keressük az alapállapot egy jobb közelítését (KF diagonalizáció). Ahol lehetséges, összehasonlítást teszünk kis rendszerek egzakt diagonalizációjával. Akkor is egzakt diagonalizációt végzünk, ha a KF hullámfüggvények kiértékelése technikailag nehéz, pl. a fordított fluxuscsatolás esetében [(1.5) egyenlet].

Azt találjuk, hogy 4/5, 5/7, 6/5, 9/7, 7/9, 8/11 és 10/13 TKH állapotokban a számolt és mért [74, 75, 283] kritikus Zeeman-energiák között többnyire elfogadható az egyezés. Fennmaradó paradoxon, hogy Liu *et al.* [75] két spinátmenetet találtak 5/7-nél és 9/7-nél, míg a legegyszerűbb konstrukció, amely egyetlen komponensben engedi a KF-ok közötti reziduális kölcsönhatás okozta TKH állapotot, csak egyet jósol. (Azon TKH állapotok, melyekben TKH állapot alakul ki több komponens kompozit fermionjai között várhatóan még gyengébbek [24].)

Legfontosabb eredményeinket a 3.17. és a 3.18. ábrák mutatják: az előbbi az elméleti fázisdiagram, az utóbbi összehasonlítás a releváns kísérletekkel.

Kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotai

Kétfajta jelölésmódot alkalmazunk:

$$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\mathcal{N}}), \quad (3.26)$$

ahol $\nu = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \nu_{\alpha}$, megadja ez egyes komponensek (spin, völgy, stb.) betöltöttségét; feltesszük, hogy $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_{\mathcal{N}}$. Ez persze nem specifikálja egyértelműen az állapotot. Ezért olyan jelölést vezetünk be, amelyből egyértelmű a hullámfüggvény felépítésének módja.

A legegyszerűbb eset a kompozit fermionok egész kvantált Hall állapota,

$$[m_1, m_2, m_3, \dots]_{\pm 2p} \leftrightarrow \left(\frac{m_1}{m} \nu, \frac{m_2}{m} \nu, \dots \right), \quad (3.27)$$

ahol $m \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha}$; a betöltési szám $\nu = m/(2pm \pm 1)$. Mivel $\mathcal{N}$ komponens esetében a részecske-lyuk szimmetria ν és $\mathcal{N} - \nu$ betöltési számokat köti össze, csak $\mathcal{N}/2$ alatti törteket

vizsgálunk. (3.27) intuitív olvasata, hogy a $[m_1, m_2, m_3, \dots]$ egész kvantált Hall állapot minden elektronjához $2p$ örvényt csatolunk ($m_1 \geq m_2 \geq \dots$). A $+$ ($-$) előjel jelentése, hogy a csatolt örvény iránya megegyezik (ellentétes) a külső mágneses térrel („megegyező fluxuscsatolás” és „fordított fluxuscsatolás”); a konstrukció a (1.4) és (1.5) egyenletek általánosításával

$$\Psi_{[m_1, m_2, m_3, \dots]_{2p}}^{\text{KF}} = \mathcal{P}_{\text{LLL}} \prod_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \Phi_{m_\alpha}^\alpha J^{2p}, \quad (3.28)$$

$$\Psi_{[m_1, m_2, m_3, \dots]_{-2p}}^{\text{KF}} = J^{2p-2} \mathcal{P}_{\text{LLL}} \left(\prod_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \Phi_{m_\alpha}^\alpha \right)^* J^2, \quad (3.29)$$

ahol J -t a (1.6) egyenlet adja meg. $\Phi_{m_\alpha}^\alpha$ Slater-determináns, amelyben m_α Landau-szint betöltött a α -dik komponensben. A vetítést Jain és Kamilla [54, 55] közelítő módszerével végezzük; tudjuk [(3.2) szakasz] hogy „fordított fluxuscsatolás” (3.29) esetében ez pontatlan, ezért egzakt diagonalizációt végzünk, ahol lehetséges. (Fordított fluxuscsatolás esetében a vetítést a 3.5. ábra tapasztalatai fényében (3.22) egyenlet szerint módosítottuk.)

Speciálisan $[1]_{2p} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2p+1}\right)$ a Laughlin hullámfüggvény [44]; $[1, 1, \dots]_{2p}$ Halperin többkomponensű hullámfüggvénye [314], $[n]_{\pm 2p} \leftrightarrow \left(\frac{n}{2p \pm 1}\right)$ a hagyományos egykomponensű kompozit fermion hullámfüggvény [(1.4) és (1.5) egyenletek]. Ha minden $n_j = 1$, a vetítés irreleváns, mivel a függvény holomorf, tehát a legalacsonyabb Landau-szinten van.

Például $\nu = 4/9$ -nél az alábbi konstrukciók lehetségesek:

$$\begin{aligned} [1, 1, 1, 1]_2 &\leftrightarrow \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right), & [2, 1, 1]_2 &\leftrightarrow \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right), \\ [3, 1]_2 &\leftrightarrow \left(\frac{3}{9}, \frac{1}{9}\right), & [2, 2]_2 &\leftrightarrow \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad \text{és} \quad [4]_2 &\leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right). \end{aligned}$$

Általánosítsunk a következőképpen:

$$[\{n_\alpha\}, \{m_\beta\}]_{\pm 2q}, \quad (3.30)$$

azaz adjunk hozzá $\{n_\alpha\}$ egész betöltésű komponenseket. Kompozit fermionok csak a részlegesen betöltött komponensekben szerepelnek.

További állapotokat kapunk $[\dots] \rightarrow [\dots]$ Landau-szinten belüli részecske-lyuk konjugációval. Például két komponens esetén $(\nu_\uparrow, \nu_\downarrow)$ részecske-lyuk konjugált képe $(\overline{\nu_\uparrow}, \overline{\nu_\downarrow}) \equiv (1 - \nu_\uparrow, 1 - \nu_\downarrow)$ szignatúrájú. Az állapot (3.12) képlettel definiált polarizációja a részecske-lyuk konjugáció hatására $\gamma \rightarrow -\frac{\gamma\nu}{2-\nu}$ módon változik, ha $\nu = \nu_\uparrow + \nu_\downarrow$.

Kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotainak formája

$$[\{n_\alpha\}, \{m_\beta\}]_{\pm 2q} \pm 2p. \quad (3.31)$$

Itt az elsődleges KF-ok Landau-szintjeinek némelyike további KF Landau-szintekre bomlik néhány komponensben. A betöltési szám megkapható a következőképpen:

$$\nu = \frac{n + \frac{m}{2qm \pm 1}}{2p \left(n + \frac{m}{2qm \pm 1} \right) \pm 1}, \quad (3.32)$$

ahol $n = \sum_\alpha n_\alpha$ és $m = \sum_\beta m_\beta$. N elektronra a hullámfüggvény

$$\Psi_{[\{n_\alpha\}, \{m_\beta\}]_{\pm 2q} \pm 2p} = \mathcal{P}_{\text{LLL}} \left(\prod_\alpha \Phi_{n_\alpha}^\alpha \Psi_{[\{m_\beta\}]_{\pm 2q}}^{\text{KF}} \right)^{(*)} J^{2p}. \quad (3.33)$$

ν	State	Schematic
1	$[1]$	
1/3	$[1]_2$	$\left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \text{5 red dots} \end{array} \right] \equiv \left[\text{5 green dots} \right]_2$
2/5	$[1, 1]_2$	$\left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \text{5 red dots} \end{array} \right]$
8/5	$\overline{[1, 1]}_2$	$\overline{\left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \text{5 red dots} \end{array} \right]}$
4/5	$[1 + [1]_2]_{-2}$	$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \text{5 red dots} \end{array} \right] \\ \text{5 green dots} \end{array} \right]_{-2}$
4/5	$[1, [1]_2]_{-2}$	$\left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \text{5 red dots} \end{array} \right] \end{array} \right]_{-2}$
4/5	$\overline{[1, 1]}_{-2}$	$\overline{\left[\begin{array}{c} \text{5 green dots} \\ \text{5 green dots} \end{array} \right]_{-2}}_{-2}$
4/5	$\overline{[1]}_4$	$\overline{\left[\begin{array}{c} \text{5 red dots} \end{array} \right]}$

3.16. ábra. Példa az (3.31) egyenletben definiált állapotokra. A zöld pöttyök elektronok, a pirosak $2p$ nyíllal kompozit fermionok $2p$ örvénnyel. A felülvonás részecske-lyuk konjugációt jelöl az adott Landau-szinten belül; $[\dots]_{2p}$ és $[\dots]_{-2p}$ kompozit fermion-képzést jelöl meg egyező és fordított fluxuscsatolással. Megjegyezzük, hogy $\nu = 4/5$ -nél két állapot, $[1, [1]_2]_{-2}$ és $\overline{[1]}_4$, látszólagos különbözőségük ellenére azonosak, a magyarázatot lásd a 76. oldalon.

(A $\Psi_{[\{m_\beta\}]_{\pm 2q}}^{\text{KF}}$ részformula Jastrow-faktora csak a β komponensek elektronjait tartalmazza.) Az általánosság megszorítása nélkül $n_1 \geq n_2 \geq \dots$ és $m_1 \geq m_2 \geq \dots$. A $[[\{m_\beta\}]_{\pm 2q}]_{\pm 2p}$ állapotok megegyeznek az $[\{m_\beta\}]_{\pm 2q \pm 2p}$ állapotokkal. A konstrukciót az 3.16. ábra illusztrálja.

A Fock-feltétel teljesülése

A fentebb megkonstruált hullámfüggvények mindegyike teljesíti a (3.3) Fock-feltételt, azaz spinorok hozzákapsolásával [(3.2) egyenlet] valamely $\text{SU}(\mathcal{N})$ multipliettbe tartoznak. Először is, a (3.27) egyenletben szereplő egész kvantált Hall állapotok teljesítik, mivel minden pálya, amely a α komponensben betöltött, be van töltve a $\beta < \alpha$ komponensekben is. Ezt a tulajdonságot a kompozit fermion-képzés nem változtatja meg, mert a J^{2p} Jastrow-tényező szimmetrikus bármely két koordináta felcserélésére. Az (3.30) egyenletben szereplő állapotokban minden az m -szektorban betöltött egyrészecske-pálya be van töltve az n -szektorban is. Az ismételt kompozit fermion-képzés, amely a (3.31) egyenlethez vezet, ezt nem változtatja meg. (Olyan állapotokkal, mint pl. $[[m_1, m_2]_{\pm 2p}, [m_3, m_4]_{\pm 2q}]$ nem foglalkozunk, mert itt baj lenne a Fock-feltétellel, nincsenek jóldefiniált $\text{SU}(4)$ kvantumszámaik.)

Megjegyezzük, hogy az $[1, 1, \dots, [1, 1, \dots]_{2p}]_{2q}$ állapotok Halperin-állapotok [314], és a Fock-feltételt teljesítik. A (3.33) konstrukcióval generálható állapotok némelyike már előfordult az irodalomban [66, 308–310, 315–317].

Módszerek

Gömbi geometriát alkalmazunk (1.4.1 szakasz), (1.14) sűrűség-korrekcióval. A termodinamikai határesetben érvényes energiákat lineáris extrapolációval kapjuk $1/N$ függvényében. Egyes esetekben kénytelenek voltunk mindössze két pontra illeszteni egyenest; ezek az eredmények természetesen óvatosan kezelendők. Ezt minden esetben jelöljük.

Az állapotok konstrukciója minden esetben megadja, milyen részecskeszámhoz milyen fluxus tartozik: $2Q = N/\nu + \delta$, ahol a δ offszet egész, és N csak úgy választható, hogy $2Q$ szintén egész legyen. Kis rendszerekben egybeesések lehetségesek. Pl. a 9 részecskés teljesen polarizált rendszer $2Q = 12$ fluxusnál értelmezhető $5/7$ vagy $7/9$ TKH állapotként is. Az ilyen egybeesések a rendszerméret növelésével eltűnnek; amikor a termodinamikai határesetre extrapolálunk, az egybeesések tartományán túlmegyünk.

Mivel a fordított fluxuscsatolást tartalmazó állapotok előállítása nehézkes, és az elterjedt vetítési algoritmus [56, 57] pontatlan, kompozit fermion diagonalizációhoz (1.4.4 szakasz) folyamodunk azon N és $2Q$ pároknál, amelyeket a KF-ok TKH állapota konstrukció előír. Ez akkor előnyös, ha a konstrukció fordított fluxuscsatolást tartalmaz, de az adott N , $2Q$ rendszer értelmezhető megegyező fluxuscsatolású kompozit fermion folyadékként. Tekintsünk egy példát: a kísérletileg releváns $\nu = 5/3$ betöltésnél lehetséges kétkomponensű állapot $[1, [2]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{3}{13}, \frac{2}{13})$. Konstruáljuk meg a második komponens $[2]_{-2}$ állapotát $N_2 = 8$ részecskéből. Ahhoz, hogy pontosan két fermion-szint legyen betöltve a gömbön, $|2q^{**}| = 2$ effektív monopólus-erősség kell, ami a fordított fluxuscsatolás miatt $2q^{**} = -2$. A kompozit fermionizáció ezt $2q^* = 2q^{**} + 2(N_2 - 1) = 12$ fluxusra képezi le. Egy szint betöltéséhez az első komponensben $N_2 = 2q^* + 1 = 13$ fermion kell. Végül a második kompozit fermionizáció $2Q = 2q^* + 2(N_1 + N_2 - 1) = 52$ fluxust ad, ez lesz a tényleges fizikai fluxus a $[1, [2]_{-2}]_2$ állapot $N_1 + N_2 = 21$ részecskés reprezentációjában. A kompozit fermion diagonalizáció ebben az esetben a kölcsönhatás diagonalizálását jelenti egy olyan KF bázison, amelynél $2q^* = 12$ fluxus mellett 13 ill. 8 kompozit fermion van a két spinkomponensben, rögzített összspin-vetület mellett. A magasabb KF Landau-szinten lévő KF-ok száma rögzített, a legkisebb bázis esetében nulla. Így $-0.43096(1)E_C$ korrelációs energiát kapunk.

Egzakt diagonalizációt a (3.33) konstrukció által diktált N és $2Q$ pároknál végeztünk. Homogén folyadék állapotban $L = 0$ pályamomentumot, és a konstrukció diktálta spint várunk.

Azokban az esetekben, ahol több módszer (egzakt diagonalizáció, (3.33) szerinti variációs hullámfüggvény, kompozit fermion diagonalizáció) is alkalmazható, az energiák részletes összehasonlítását [24] függeléke adja meg.

Példa: a $\nu = 4/5$ tört kvantált Hall állapotok

Egykomponensű, teljesen polarizált $\nu = 4/5$ tört kvantált Hall állapot

$$[1 + [1]_2]_{-2} \leftrightarrow (4/5),$$

ami $\nu^* = 4/3$ -nek felel meg, ahol a legalacsonyabb KF Landau-szintet teljesen megtöltjük, a másodikon egy $1/3$ -os állapotot alakítunk ki. Felírhatunk egy másik állapotot is $4/5$ -nél:

$$\overline{[1]}_4 \leftrightarrow (4/5),$$

ami a $1/5$ -ös Laughlin-állapot lyukakból. A két állapot azonban nem különbözik egymástól; ugyanannál a $2Q = 5N/4$ fluxusnál fordulnak elő a gömbön, és egyformán négyörvényes KF korrelációkat épít be a konstrukció. Hasonló a helyzet $\nu = 2/3$ -hez, ahol a $\overline{[1]}_2$ és $[2]_{-2}$ állapotok ekvivalenciája explicit számolással belátható [63]. Az $[2]_{-2}$ felírás haszna, hogy a $SU(2)$ spin esetre rögtön adódik egy variáns, $[1, 1]_{-2}$. Ugyanez az eset $4/5$ -nél is. Alább a $\equiv$ reláció a fenti értelemben vett ekvivalenciát jelöli.

Kétkomponensű, részlegesen polarizált $\nu = 4/5$ tört kvantált Hall állapot

$$[1, [1]_2]_{-2} \leftrightarrow (3/5, 1/5),$$

ν	ν^*	1 komponens	2 komponens	3 komponens	4-5 komponens
$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{3}$	$[1 + 1/3^{WYQ}]_2 \leftrightarrow (\frac{4}{11})$	$[1, [1]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{3}{11}, \frac{1}{11}),$ $[[1, 1]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{2}{11}, \frac{2}{11})$	-	-
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$	$[1 + [1]_2]_{-2} \equiv [1]_4 \leftrightarrow (\frac{4}{5})$	$[1, [1]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}),$ $[[1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$	-	-
$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{3}$	$[1 + 2/3^{WYQ}]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{13})$	$[1, [2]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{3}{13}, \frac{2}{13}),$	$[1, [1, 1]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{3}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13})$	-
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{3}$	$[1 + [2]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{7})$	$[1, [2]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{3}{7}, \frac{2}{7}),$	$[1, [1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$	-
$\frac{7}{19}$	$\frac{7}{5}$	$[1 + [2]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{19})$	$[1, [2]_2]_2 \equiv [[3]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{19}, \frac{2}{19}),$ $[[1, 2]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{4}{19}, \frac{3}{19})$	$[1, [1, 1]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19})$	-
$\frac{8}{21}$	$\frac{8}{5}$	$[1 + [3]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{8}{21})$	$[1, [3]_{-2}]_2 \equiv [[2]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{21}, \frac{3}{21}),$ $[[1, 1]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{4}{21}, \frac{4}{21})$	$[1, [2, 1]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{21}, \frac{2}{21}, \frac{1}{21})$	$[1, [1, 1, 1]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{21}, \frac{1}{21}, \frac{1}{21}, \frac{1}{21})$
$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{5}$	$[1 + [3]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{8}{11})$	$[1, [3]_{-2}]_{-2} \equiv [[2]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{11}, \frac{3}{11}),$ $[[1, 1]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{4}{11}, \frac{4}{11})$	$[1, [2, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11})$	$[1, [1, 1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11})$
$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{5}$	$[1 + [2]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{9})$	$[1, [2]_2]_{-2} \equiv [[3]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{9}, \frac{2}{9}),$ $[[1, 2]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{4}{9}, \frac{3}{9})$	$[1, [1, 1]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$	-
$\frac{10}{27}$	$\frac{10}{7}$	$[1 + [3]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{10}{27})$	$[1, [3]_2]_2 \equiv [[4]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{27}, \frac{3}{27}),$ $[[2, 2]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{5}{27}, \frac{5}{27})$	$[1, [2, 1]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{27}, \frac{2}{27}, \frac{1}{27})$	$[1, [1, 1, 1]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27})$
$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{7}$	$[1 + [3]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{10}{13})$	$[1, [3]_2]_{-2} \equiv [[4]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{13}, \frac{3}{13}),$ $[[2, 2]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{5}{13}, \frac{5}{13})$	$[1, [2, 1]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13})$	$[1, [1, 1, 1]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13})$
$\frac{11}{29}$	$\frac{11}{7}$	$[1 + [4]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{11}{29})$	$[1, [4]_{-2}]_2 \equiv [[3]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{29}, \frac{4}{29}),$ $[[1, 2]_2]_2 \leftrightarrow (\frac{6}{29}, \frac{5}{29})$	$[1, [3, 1]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{29}, \frac{3}{29}, \frac{1}{29}),$ $[1, [2, 2]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{29}, \frac{2}{29}, \frac{2}{29})$	$[1, [2, 1, 1]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{29}, \frac{2}{29}, \frac{1}{29}, \frac{1}{29}),$ $[1, [1, 1, 1, 1]_{-2}]_2 \leftrightarrow (\frac{7}{29}, \frac{1}{29}, \frac{1}{29}, \frac{1}{29}, \frac{1}{29})$
$\frac{11}{15}$	$\frac{11}{7}$	$[1 + [4]_{-2}]_{-2} \equiv [4]_{-4} \leftrightarrow (\frac{11}{15})$	$[1, [4]_{-2}]_{-2} \equiv [[3]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{15}, \frac{4}{15}),$ $[[1, 2]_2]_{-2} \leftrightarrow (\frac{6}{15}, \frac{5}{15})$	$[1, [3, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{15}, \frac{3}{15}, \frac{1}{15}),$ $[1, [2, 2]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$	$[1, [2, 1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}),$ $[1, [1, 1, 1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (\frac{7}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15})$

3.8. táblázat. Kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotaként származtatható összenyomhatatlan állapotok és azoknak súlya az egyes komponensekben. ν az elektronok, ν^* a kompozit fermionok betöltési száma.

ν	$[1 + [1]_2]_{-2} \equiv [1]_4 \leftrightarrow (4/5)$		$[1, [1]_2]_{-2} \leftrightarrow (3/5, 1/5)$		$[[1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (2/5, 2/5)$	
	egzakt	KF	egzakt	KF	egzakt	KF
4/5	-0.5504(7)	-0.551736(9)	<u>-0.5601(0)</u>	-	-0.5637(5)	-

3.9. táblázat. A $\nu^* = 4/3$ kompozit fermion állapotokból újabb kompozit fermionizációval ($p = 1$ és fordított fluxuscsatolás) kapott állapotok kölcsönhatási energiája.

ami származtatható a részlegesen spinpolarizált $[1, [1]_2] \leftrightarrow (1, 1/3)$ állapotból, amelyben a fel-spinből teljesen megtöltjük a legalsó KF Landau-szintet, és $1/3$ állapotot alakítunk ki a le-spinű KF-ekből.

Kétkomponensű, spin szinglett $\nu = 4/5$ tört kvantált Hall állapot

$$[[1, 1]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow (2/5, 2/5),$$

ami származtatható a spin-szinglett $2/3$ -os állapotból [63], azaz $[1, 1]_{-2} \leftrightarrow (1/3, 1/3)$ -ból, részecske-lyuk konjugációval és újabb kompozit fermionizációval.

Három- vagy többkomponensű $\nu = 4/5$ tört kvantált Hall állapot nem konstruálható a Fock-feltétel teljesítése mellett. Pl. a $[[1]_2, [1]_2, [1]_2, [1]_2]_{-2} \leftrightarrow (1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$ nem teljesíti (3.3)-t, ezért $SU(4)$ szimmetria esetében helytelen.

A 3.9. táblázat megadja az energiákat a termodinamikai határesetben, a fenti állapotok közötti átmenetekhez tartozó kritikus Zeeman-energiák a 3.10. táblázatban találhatók. A többi állapotról csak a lehetséges állapotok listáját adjuk meg a 3.8. táblázatban; a hozzájuk vezető gondolatmenetet lásd [24] cikkben.

A katalógus értelmezéséhez bevezetünk még egy elemet. Wójs, Yi és Quinn [308] javasoltak egy modellt $\nu = 1/3$ -ra, ami nem egyezik meg a $[1]_2$ Laughlin-állapottal. A különbség topologikus: a továbbiakban $1/3^{\text{WYQ}}$ módon jelölt állapot adott N mellett más fluxusnál fordul elő a gömbön, mint $[1]_2$. Jelölje a részecske-lyuk konjugáltját $1/3^{\text{WYQ}} \equiv 2/3^{\text{WYQ}}$. E két új állapot segítségével további TKH állapotok építhetők:

$$[\{n_\alpha\}, 1/3^{\text{WYQ}}]_{\pm 2p}, [\{n_\alpha\}, 2/3^{\text{WYQ}}]_{\pm 2p}, \quad (3.34)$$

$$[n_1 + 1/3^{\text{WYQ}}, n_2, \dots]_{\pm 2p}, [n_1 + 2/3^{\text{WYQ}}, n_2, \dots]_{\pm 2p}, \quad (3.35)$$

ahol az egészeket a Fock-feltétel fényében kell megválasztani. A $[1 + 1/3^{\text{WYQ}}]_2$ és $[1 + 2/3^{\text{WYQ}}]_2$ állapotokat Mukherjee *et al.* [309] már vizsgálták a teljesen spinpolarizált $4/11$ és $5/13$ állapotok jelöltjeként.

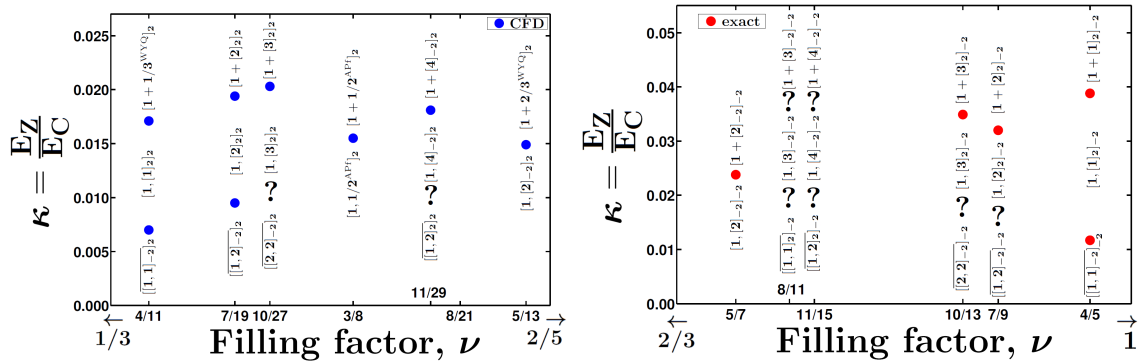
A fázisdiagramot a főbb törtek esetében a 3.17. ábra mutatja a rendezetlenség, a véges mintavastagság és a Landau-szintek keveredésének elhanyagolásával. A kérdőjel arra utal, hogy az elérhető számítási eszközökkel nem tudtuk a kritikus Zeeman-energiát pontosan megbecsülni.

Összehasonlítás a kísérletekkel

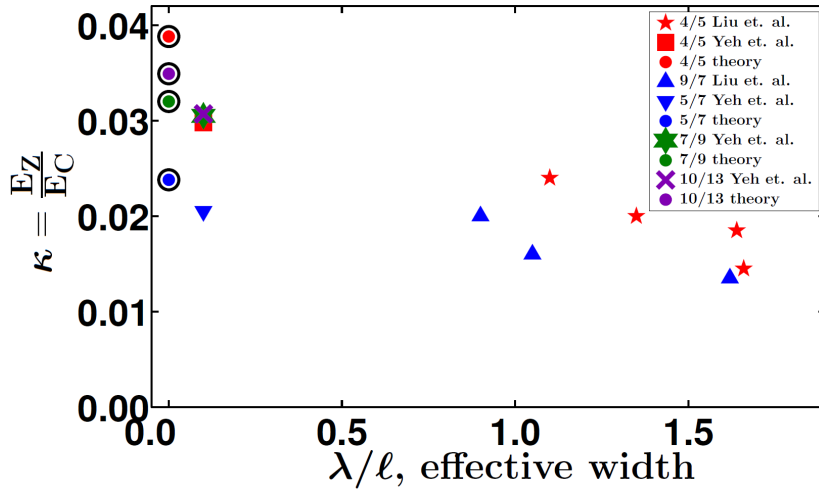
Kompozit fermionok TKH effektusának spinátmeneteivel kapcsolatban viszonylag kevés kísérleti információ áll a rendelkezésünkre. A számított és mért kritikus Zeeman-energiákat a 3.11. táblázat hasonlítja össze. A rendezetlenséget, a véges mintavastagságot és a Landau-szintek keveredését továbbra is elhanyagoljuk. A legalkalmasabb összehasonlítási alap a heterointerfészekon mért TKH állapotok a kis merőleges vastagság miatt. Jó az egyezés $\nu = 4/5$, $5/7$ és $7/9$ törteknél Yeh *et al.* [74] méréseivel, melyeket csak sokkal később kezdtek kompozit fermionok TKH állapotaként értelmezni [75]. Általában a véges mintavastagság simábbá teszi a

ν	Átmenet	Δ_Z^c/E_C	
		egzakt	KFD
4/11	$[1, [1]_2]_2 \leftrightarrow [[1, 1]_{-2}]_2$	0.0026	0.0070
4/11	$[1 + 1/3^{\text{WYQ}}]_2 \leftrightarrow [1, [1]_2]_2$	0.0208	0.0171
4/5	$[1, [1]_2]_{-2} \leftrightarrow [[1, 1]_{-2}]_{-2}$	0.0117	-
4/5	$[1 + [1]_2]_{-2} \equiv [1]_4 \leftrightarrow [1, [1]_2]_{-2}$	0.0388	-
5/13	$[1 + 2/3^{\text{WYQ}}]_2 \leftrightarrow [1, [2]_{-2}]_2$	0.0183	0.0149
5/7	$[1 + [2]_{-2}]_{-2} \equiv [2]_4 \leftrightarrow [1, [2]_{-2}]_{-2}$	0.0238	-
7/19	$[1, [2]_2]_2 \equiv [[3]_{-2}]_2 \leftrightarrow [[1, 2]_{-2}]_2$	-	0.0095
7/19	$[1 + [2]_2]_2 \leftrightarrow [1, [2]_2]_2 \equiv [[3]_{-2}]_2$	-	0.0194
7/9	$[1, [2]_2]_{-2} \equiv [[3]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow [[1, 2]_{-2}]_{-2}$	-	-
7/9	$[1 + [2]_2]_{-2} \equiv [2]_4 \leftrightarrow [1, [2]_2]_{-2} \equiv [[3]_{-2}]_{-2}$	0.0320	-
8/21	$[1, [3]_{-2}]_2 \equiv [[2]_2]_2 \leftrightarrow [[1, 1]_2]_2$	-	-
8/21	$[1 + [3]_{-2}]_2 \leftrightarrow [1, [3]_{-2}]_2 \equiv [[2]_2]_2$	-	-
8/11	$[1, [3]_{-2}]_{-2} \equiv [[2]_2]_{-2} \leftrightarrow [[1, 1]_2]_{-2}$	-	-
8/11	$[1 + [3]_{-2}]_{-2} \equiv [3]_4 \leftrightarrow [1, [3]_{-2}]_{-2} \equiv [[2]_2]_{-2}$	-	-
10/27	$[1, [3]_2]_2 \equiv [[4]_{-2}]_2 \leftrightarrow [[2, 2]_{-2}]_2$	-	-
10/27	$[1 + [3]_2]_2 \leftrightarrow [1, [3]_2]_2 \equiv [[4]_{-2}]_2$	-	0.0203
10/13	$[1, [3]_2]_{-2} \equiv [[4]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow [[2, 2]_{-2}]_{-2}$	-	-
10/13	$[1 + [3]_2]_{-2} \equiv [3]_4 \leftrightarrow [1, [3]_2]_{-2} \equiv [[4]_{-2}]_{-2}$	0.0349	-
11/29	$[1, [4]_{-2}]_2 \equiv [[3]_2]_2 \leftrightarrow [[1, 2]_2]_2$	-	-
11/29	$[1 + [4]_{-2}]_2 \leftrightarrow [1, [4]_{-2}]_2 \equiv [[3]_2]_2$	-	0.0181
11/15	$[1, [4]_{-2}]_{-2} \equiv [[3]_2]_{-2} \leftrightarrow [[1, 2]_2]_{-2}$	-	-
11/15	$[1 + [4]_{-2}]_{-2} \equiv [4]_4 \leftrightarrow [1, [4]_{-2}]_{-2} \equiv [[3]_2]_{-2}$	-	-
3/8	$[1 + 1/2^{\text{APf}}]_2 \leftrightarrow [1, 1/2^{\text{APf}}]_2$	-	0.0183

3.10. táblázat. A Δ_Z^c kritikus Zeeman-energia különböző átmeneteknél két komponenst feltételezve. Az első oszlop értékei egzakt diagonalizáción, a másodiké KFD módszeren alapulnak.



3.17. ábra. Kompozit fermionok tört kvantált Hall állapotainak elméleti fázisdiagramja a $1/3 < \nu < 2/5$ (balra) és a $2/3 > \nu > 1$ tartományban (jobbra). „?” szerepel ott, ahol a kritikus Zeeman-energiát nem tudtuk biztonsággal kiszámolni. A bal oldalon a KF-ok betöltési száma, $1 < \nu^* < 2$, megegyező a fluxuscsatolás, az adatok KF diagonalizációból származnak. A jobb oldalon fordított a fluxuscsatolás, egzakt diagonalizációt használtunk. Mindkét esetben extrapoláltunk a termodinamikai határesetre.



3.18. ábra. A spinátmenetekhez tartozó kritikus Zeeman-energiák 4/5, 9/7, 5/7, 7/9 és 10/13 TKH állapotokban a λ/ℓ effektív mintavastagság függvényében. A kísérleti adatok forrása Liu *et al.* [75] és Yeh *et al.* [74]. Az utóbbi heterointerfészen végzett kísérlet, ami nagyon kis vastagságnak felel meg. A feketével bekarikázott elméleti értékek jól egyeznek a kísérletek nulla vastagsághoz tartozó határértékével.

két dimenzióra vetített kölcsönhatást, ami azt sugallja, hogy a kritikus Zeeman-energia csökken a mintavastagsággal; ezt elméleti számítások is megerősítik [282]. A megfigyelt kritikus Zeeman-energiák mindig kisebbek a számítottnál.

A 3.18. ábra mutatja a mért kritikus Zeeman-energiák függését a merőleges vastagságtól. A λ effektív vastagság definíciója $\lambda = \sqrt{\langle z^2 - \langle z \rangle^2 \rangle}$, ahol z koordináta az elektrongáz síkjára merőleges irányban; az átlagolás egyfajta LDA hullámfüggvény alapján történt. Heterointerfészekre tipikusan $\lambda \approx 0.1\ell$. Kvantumgödrök esetében csak olyan adatokat vettünk fel, amelyeknél a sűrűség változtatásával értek el fázisátmenetet; a döntött mágneses teres kísérletek elhagytuk, mert azok hibridizálhatják a merőleges állapotokat. A kritikus Zeeman-energiák csökkennek a mintavastagsággal, ami a kétdimenziós kölcsönhatás rövid távú kisimításának, ezáltal a kölcsönhatási energiák (és különbségeik) csökkenésének tudható be.

Egy paradoxon továbbra is fennáll. Liu *et al.* [75] két átmenetet figyelt meg $\nu = 5/7$ -nél (és a lyukakból felépülő $\nu = 9/7$ -nél). Ha csak egy komponensben engedjük meg KF-ok TKH állapotát, csak két állapotunk van, $[1 + [2]_{-2}]_{-2}$ és $[1, [2]_{-2}]_{-2}$, tehát legfeljebb egy átmenet. Ha több komponensben is van KF-ok TKH állapota, szóba jöhet még $[1 + 1/3, 1/3]_{-2}$, ami szintén teljesíti a Fock-feltételt (egyik vagy mindkét $1/3$ állapot helyettesíthető $1/3^{\text{WYQ}}$ -val). Zérus vastagság esetében úgy találtuk, ezek az állapotok nem stabilak (lásd [24] függelékét). Az 5/7, 9/7 betöltéseknél megfigyelt két átmenetre jelenleg nincs magyarázatunk.

ν	Átmenet	Elméleti Δ_Z^c/E_C		Kísérleti Δ_Z^c/E_C		
		egzakt	KFD	hivatkozás	w (nm)	n ($\times 10^{11}$ cm $^{-2}$)
4/11	$[1 + 1/3^{WYQ}]_2 \leftrightarrow [1, [1]_2]_2$	0.0208	0.0171	[312]	33	0.55
4/5	$[1 + [1]_2]_{-2} \equiv [1]_4 \leftrightarrow [1, [1]_2]_{-2}$	0.0388	-	[75]	65	1.13
		0.0388	-	[75]	65	1.00
		0.0388	-	[75]	60	0.44
		0.0388	-	[74]	HI	1.13
6/5	$[1 + [1]_4] \leftrightarrow [1, [1]_4]$	0.0388	-	[75]	65	1.13
5/13	$[1 + 2/3^{WYQ}]_2 \leftrightarrow [1, [2]_{-2}]_2$	0.0183	0.0149	[312]	33	0.55
5/7	$[1 + [2]_{-2}]_2 \equiv [2]_{-4} \leftrightarrow [1, [2]_{-2}]_{-2}$	0.0238	-	[75]	60	0.44
		0.0238	-	[74]	HI	1.13
9/7	$[1 + [2]_{-4}] \leftrightarrow [1, [2]_{-4}]$	0.0238	-	[75]	60	0.44
7/9	$[1, [2]_2]_{-2} \equiv [[3]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow [[1, 2]_{-2}]_{-2}$	-	-	[74]	HI	1.13
7/9	$[1 + [2]_2]_{-2} \equiv [2]_4 \leftrightarrow [1, [2]_2]_{-2} \equiv [[3]_{-2}]_{-2}$	0.0320	-	[74]	HI	1.13
8/11	$[1, [3]_{-2}]_{-2} \equiv [[2]_2]_{-2} \leftrightarrow [[1, 1]_2]_{-2}$	-	-	[74]	HI	1.13
8/11	$[1 + [3]_{-2}]_{-2} \equiv [3]_{-4} \leftrightarrow [1, [3]_{-2}]_{-2} \equiv [[2]_2]_{-2}$	-	-	[74]	HI	1.13
10/13	$[1, [3]_2]_{-2} \equiv [[4]_{-2}]_{-2} \leftrightarrow [[2, 2]_{-2}]_{-2}$	-	-	[74]	HI	1.13
10/13	$[1 + [3]_2]_{-2} \equiv [3]_4 \leftrightarrow [1, [3]_2]_{-2} \equiv [[4]_{-2}]_{-2}$	0.0349	-	[74]	HI	1.13
3/8	$[1 + 1/2^{APt}]_2 \leftrightarrow [1, 1/2^{APt}]_2$	-	0.0183	[312]	33	0.55
						0.0169-0.0223

3.11. táblázat. A kritikus Zeeman-energiák elméleti (elhanyagolt merőleges kiterjedés, Landau-szint keveredés és rendezetlenség) és mért értékeinek összehasonlítása. A „HI” rövidítés heterointerfészre utal.

4. fejezet

A félig töltött Landau-szintek fizikája

4.1. Bevezetés

Halperin, Lee és Read [53], illetve Kalmeyer és Zhang [318] elméletei szerint ha a legalacsonyabb Landau-szint félig betöltött, azaz a betöltési szám $\nu = 1/2$ vagy $\nu = 3/2$, átlagtérelméleti értelemben a külső mágneses teret pontosan kiejti a kompozit fermionok által hordozott örvényekből eredő mértéktér, ezért kompozit fermionok Fermi-tengere (KFFT) állapotot jön létre. Ez a Fermi-tenger állapot különleges: amíg szokásosan szabad fermionok tengere a kiindulópontunk, és azt vizsgáljuk, hogy a kölcsönhatás ezt milyen mértékben rombolja le, addig a kompozit fermionok létrejöttéért a legalacsonyabb Landau-szinten és a Fermi-tenger kialakulásáért éppen a Coulomb-kölcsönhatás felelős. A kompozit fermion Fermi-tenger állapot létezése az erős elektron-korreláció megnyilvánulása. E kép helyességét számos kísérlet támasztja alá [59–62, 319–323].

A következő Landau-szinten $\nu = 5/2$ -nél és $7/2$ -nél megfigyelt tört kvantált Hall állapot [15] nem illeszkedik a páratlan nevezőjű törtekből álló Laughlin [44] és kompozit fermion [47] sorozatokba (1.2. szakasz). Az egyik legelfogadottabb elmélet az (1.9) egyenletben megjelölt Pfaff-állapot [79], amely egyfajta p -típusú párosított kompozit fermion állapot. Ha ebben az állapotban $2k$ kvázilyukat helyezünk el, akkor egy jól motivált variációs hullámfüggvény a következő [83]:

$$\Psi_{\text{Pf}}^{(2k)} = \text{Pf} \left(\frac{(\eta_1 - z_i)(\eta_2 - z_i) \dots (\eta_{k+1} - z_j)(\eta_{k+2} - z_j) \dots (\eta_{2k} - z_j) + (i \longleftrightarrow j)}{z_i - z_j} \right) J^2, \quad (4.1)$$

ahol $\eta_1, \dots, \eta_{2k}$ a kvázilyukak helykoordinátái, amelyeket két egyenlő csoportra ($\eta_1, \dots, \eta_k$ és $\eta_{k+1}, \dots, \eta_{2k}$) osztottunk a Pfaff-polinóm argumentumában. Többféle felosztás lehetséges; belátható [83] hogy az ilyen módon generált hullámfüggvények közül 2^{k-1} lesz lineárisan független. $\Psi_{\text{Pf}}^{(2k)}$ egzakt nulla energiájú állapota egy háromrészesecske modell kölcsönhatásnak [(4.6) egyenlet]. A (4.1) kvázilyuk állapotok $e/4$ töltéssel és nemábeli fonási statisztikával rendelkeznek, és elvben felhasználhatók topológikusan védett kvantumszámítógépek létrehozásához [14].

Ehhez az egzotikus állapothoz hosszú út vezet. Először is, a Coulomb-taszítást minimalizálendő a második Landau-szint elektronjainak kompozit fermionokat [47] kell képezniük. Ezek $\nu = 1/2$ betöltésnél nulla effektív mágneses teret éreznek és Fermi-tenger állapotot vesznek fel [53]. A kompozit fermionok Fermi-gömbjének a KF-ok közötti reziduális kölcsönhatás miatt $p_x \pm ip_y$ típusú párképzési instabilitást kell mutatnia, ami tört kvantum Hall állapotot hoz létre [79, 294, 324, 324]. A párosított KF állapot Abrikoszov-örvényei zéró módussal rendelkeznek [83, 325], ami a topologikus degeneráció alapja. A degenerált altér teszi lehetővé a

nemábeli fonási statisztikát [83, 325].

A fenti ideák helyességét végső soron kísérleteknek kell alátámasztania. A kísérletek azonban csak részleges információt adnak: ismert a gap [77, 78, 87, 90, 326–337], vannak a spinpolarizáció mértékéről ellentmondásos adatok [73, 338–340], az elemi gerjesztések töltéséről állítások [329, 341–343]. Lehetséges viszont a korrelált modellek numerikus tesztelése a TKH tartományban, azaz a teljes kölcsönható probléma egzakt megoldásával történő összehasonlítás (max. 16-18 részecskével). A Pfaff-állapot átfedése biztató, de nem kiemelkedően nagy a Coulomb alapállapottal a konvencionális kétdimenziós elektrongáz $n = 1$ Landau-szintjén, ami vagy a két dimenzióra megszorított kölcsönhatás mesterséges hangolásával [82, 218, 344], vagy véges mintavastagság figyelembe vételével javítható [345]. Az állapot érzékenysége a kölcsönhatás kis változásaira arra utal, hogy a $\nu = 5/2$ TKH közel esik valamilyen instabilitáshoz. Véges rendszerekben tudjuk [82, 346, 347], hogy a Pfaff *alapállapot* adiabatikus kapcsolatban áll a Coulomb alapállapottal. A gerjesztések esetében kevésbé világos a helyzet. A Pfaff-kvázilyukak nem bizonyultak a Coulomb kölcsönhatás alacsonyenergiás állapotainak kielégítő közelítésének [268], és nem ismert, hogy a Pfaff-állapot kvázilyukjai és -részecskéi adiabatikusan össze vannak-e kötve a Coulomb kölcsönhatás megfelelő állapotaival.

4.2. A Landau-szintek keveredése és a Pfaff-állapot és gerjesztéseinek stabilitása $\nu = 5/2$ betöltési számnál

A Moore-Read-féle Pfaff-modell egyik legfontosabb vonása, hogy sérti a részecske-lyuk szimmetriát: a Pfaff-állapot topologikusan különbözik a részecske-lyuk konjugált partnerétől, az anti-Pfaff állapottól [348]. A Landau-szintek keveredése¹ nélkül a Pfaff- és anti-Pfaff állapotok degeneráltak a termodinamikai határesetben; mivel a Landau-szintek keveredése háromrészecskés kölcsönhatást is eredményez, a degenerációt az egyik javára megtöri [293, 349, 350]. Rezayi és Simon [351] amellett érvelt, hogy anti-Pfaff állapot energiája alacsonyabb. Radu *et al.* tunnelezési mérése [341] olyan eredményt adott, amely kissé közelebb áll az anti-Pfaff állapotban várthoz, de nem konklúzívan.

Ebben az alfejezetben egzakt diagonalizációval vizsgáljuk a teljesen spinpolarizált THK effektust, a Landau-szintek keveredését a Bishara-Nayak-féle effektív kölcsönhatással modellezve. Azt találjuk, hogy a fázisdiagram egy kísérletileg elérhető részében a Pfaff-modell pontosan leírja nemcsak az alapállapotot, hanem a semleges és töltött gerjesztéseket is. Ezek az eredmények konzisztensek azzal, hogy a $\nu = 5/2$ TKHE nagyon kis mágneses térben is megfigyelhető², és relevánsak a nemábeli gerjesztések megfigyelésére irányuló próbálkozások szempontjából is.

A Haldane gömbön dolgozunk (1.4.1. szakasz). Teljes spinpolarizációt feltételezünk [64, 344, 351], és elhanyagoljuk a rendezetlenség hatását [352]. Az elektronok közötti kölcsönhatás Bishara és Nayak nyomán [293]

$$\mathcal{H}_{\text{BN}} = \mathcal{V}_{\text{Coulomb}} + \sum_m \delta \mathcal{V}_m + \sum_m \mathcal{W}_m, \quad (4.2)$$

ahol

$$\mathcal{V}_{\text{Coulomb}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \sum_{i < j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (4.3)$$

¹Lásd a 1. lábjegyzetet a 15. oldalon.

²Wei Pan publikálatlan eredményei szerint kb. $B = 0.8$ T-ig.

a Coulomb kölcsönhatás, amit a második ($n = 1$) Landau-szint bázisán kell kiértékelnünk³, és az utolsó két tag a Landau-szintek keveredését perturbatíván veszi figyelembe. A definíciójuk

$$\delta\mathcal{V}_m = \delta V_m \sum_{i<j} P_{ij}^{(2)}(2Q - m) \quad \text{és} \quad \mathcal{W}_m = W_m \sum_{i<j<k} P_{ijk}^{(3)}(3Q - m), \quad (4.4)$$

ahol $P_{ij}^{(2)}(L)$ és $P_{ijk}^{(3)}(L)$ két ill. három részecske állapotát az L teljes pálya-impulzusmomentumú altérre vetíti; δV_m egy elektronpár energiájának korrekciója $m = 1, 3, 5, \dots$ relatív impulzusmomentumú állapotban, és W_m három elektron energiájának a kétrészecskés tagokon felüli része ($m = 3, 5, 6, \dots$). A sorfejtési paraméter a Coulomb és a ciklotron energiaskálák hányadosa,

$$\kappa = \frac{E_C}{\hbar\omega_c}, \quad (4.5)$$

ahol $\omega_c = eB/m^*$ a ciklotron frekvencia és m^* az elektrontömeg az adott sávban. GaAs-ban $\kappa \approx 2.5/\sqrt{B \text{ [T]}}$, ami $\kappa = 0.8$ és 1.8 között változik, ha $B = 9$ és 2 T között van. Habár a (4.2) egyenlet alapja perturbációs számítás, feltesszük, hogy alkalmazható marad nagyobb κ esetén is. Az alábbiakban δV_m -t $m \leq 3$ -ig, W_m -t $m \leq 8$ -ig tartjuk meg [293].

A Pfaff-modellt a

$$\mathcal{H}_{\text{Pf}} = \sum_{i<j<k} P_{ijk}^{(3)}(3Q - 3) \quad (4.6)$$

rövidtávú háromrészecskés kölcsönhatás definiálja. $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ egyetlen nulla energiás állapota $2Q = 2N - 3$ fluxus mellett a (1.9) Pfaff alapállapot, a nulla energiás állapotok $2Q > 2N - 3$ fluxusnál a Pfaff-kvázilyukak, és az alacsony energiájú állapotok $2Q < 2N - 3$ fluxusnál a Pfaff-kvázirészecskék. Összehasonlításuképpen használjuk a

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{V}_{\text{Coulomb}} + \delta\mathcal{V}_1 \quad (4.7)$$

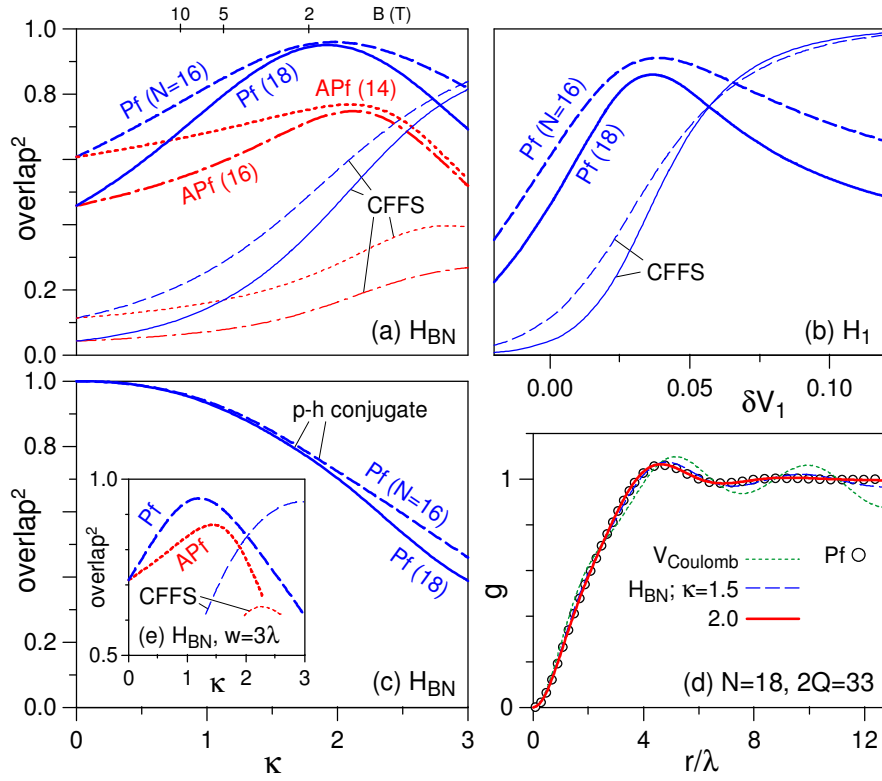
párkölcsönhatást is, ahol a V_1 pszeudopotenciált önkényesen módosítjuk.

Először a $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ közelítés alapállapotát vizsgáljuk. A 4.1(a) ábrán látható, hogy κ növelésével az alapállapot egyre jobban közelíthető a Pfaff-hullámfüggvénnyel; a $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ alapállapotával vett átfedés négyzete a 0.4-0.6 tartományból ($\kappa = 0$) 0.95 fölé nő $\kappa = 2$ -nél $N \leq 18$ részecskés rendszerekben. A Pfaff-állapot lényegesen jobb közelítés, mint az anti-Pfaff, amit a $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ szerinti energiák összehasonlítása is alátámaszt. Bár $W_3 < 0$ az anti-Pfaff állapotot preferálná, a további W_m -ek a Pfaff-állapotot erősítik. $N^{-1} \left\langle \sum_{i<j<k} P_{ijk}^{(3)}(3Q - m) \right\rangle$ lineáris extrapolációja $1/N$ függvényeként a Pfaff-állapotban $N \leq 20$ rendszerekből 0, 0.43, 0.82, 0.47, 0.61 amplitudókat ad $m = 3, 5, 6, 7$ és 8-ra, anti-Pfaff állapotban $N \leq 18$ rendszerekből 0.09, 0.20, 0.62, 0.32 és 0.56 amplitudókat. A W_m együtthatókkal [293] kombinálva ez extenzív energiakülönbséget ad a Pfaff-állapot javára. Minden $m \leq 6$ tag számít, a további tagok elhanyagolhatók.

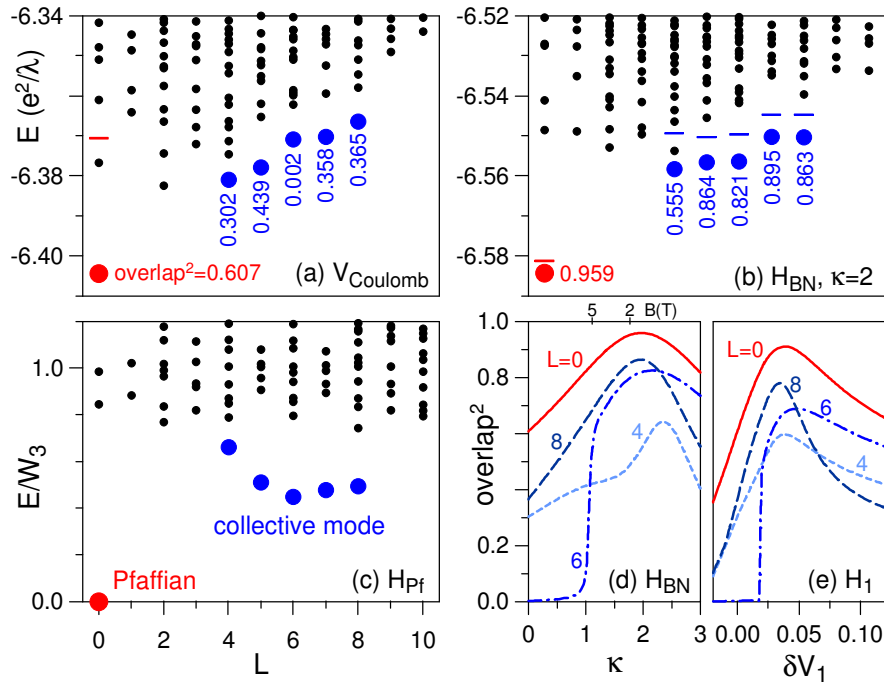
A 4.1(b) ábra szerint a V_1 kétrészecskés pszeudopotenciál változtatása szintén növeli az átfedést Pfaff-állapottal, de mivel ez a kölcsönhatás részecske-lyuk szimmetrikus, nem tesz különbséget Pfaff és anti-Pfaff között. Természetesen ez a hangolás nehezen motíválható.

A következő ábrák $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ semleges és töltött gerjesztéseit vetik össze a megfelelő Pfaff-állapotokkal. A 4.2. ábra $2Q = 2N - 3$ fluxusnál mutatja a Coulomb, a Pfaff és a $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ kölcsönhatások spektrumait (az utóbbinál $\kappa = 2$), valamint az átfedéseket κ és δV_1 függvényében. 4.3. ábra hasonló összehasonlítást tesz két kvázilyuk ($2Q = 2N - 2$), 4.4. ábra két kvázirészecske ($2Q = 2N - 4$) esetére. $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ a nulla energiás alapállapoton túl még egy semleges

³A síkon $V_m^{(1)} = \frac{(m-3/8)(m-11/8)}{2} \frac{\Gamma(m-3/2)}{m!}$ pszeudopotenciálokkal.



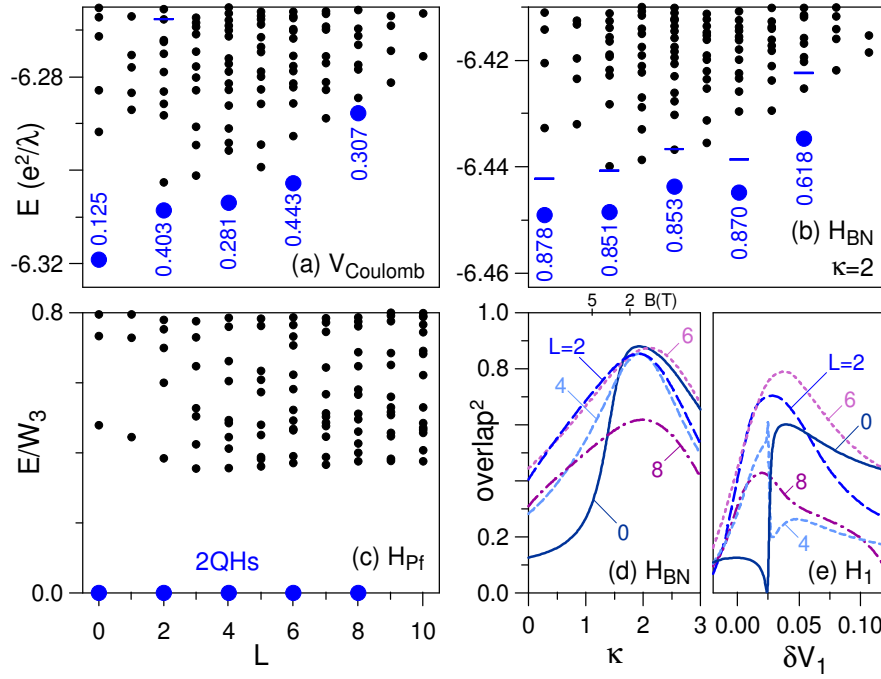
4.1. ábra. (a) $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ egzakt alapállapotának négyzetes átfedése a Pfaff- és anti-Pfaff-állapotokkal κ [(4.5) egyenlet] függvényében rögzített N részecskeszámokra. A felső tengely a mágneses tér erősségét adja meg GaAs-t feltételezve. Megadjuk ezen állapotok négyzetes átfedését a kölcsönhatásmentes kompozit fermionok $L = 0$ állapotával (azonos színű vékony vonalak), CFFS néven. (b) $\mathcal{H}_1$ egzakt alapállapotának négyzetes átfedése a Pfaff- és kompozit fermion állapotokkal. (c) Négyzetes átfedés $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ $2Q = 2N - 3$ fluxusnál vett egzakt alapállapota és $2Q = 2N + 1$ fluxusnál vett alapállapotának részecske-lyuk konjugáltja között. (d) $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ alapállapotának és a Pfaff-állapotnak párkorrelációs függvénye κ függvényében. (e) Átfedés a Pfaff- és anti-Pfaff-állapotok ($N = 16$ és 14) $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ és alapállapota között $w = 3\ell$ kvantumgördőrszélesség mellett.



4.2. ábra. $N = 16$ részecske spektruma $2Q = 2N - 3 = 29$ fluxusnál (a) $\mathcal{V}_{\text{Coulomb}}$, (b) $\mathcal{H}_{\text{BN}}$, és (c) $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ kölcsönhatásokra (fekete és színes pöttyök). Mutatjuk továbbá a Pfaff hullámfüggvény energiájának várható értékét $\mathcal{V}_{\text{Coulomb}}$ és $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ kölcsönhatásokkal (vízszintes vonás az (a,b) paneleken). Az energiaegység E_C (a,b) ill. W_3 (c). A számok az alapállapot (piros) és a semleges gerjesztések (kék) mellett az négyzetes átfedések a megfelelő Pfaff-sajátállapotokkal. (d,e) $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ és $\mathcal{H}_1$ egzakt alapállapotainak a Pfaff-sajátállapotokkal vett átfedésének változása κ [(4.5) egyenlet] és δV_1 függvényében.

gerjesztési sávot is ad (4.2(c) ábra), amely feltehetően egy kvázirészecske-kvázilyuk gerjesztésnek felel meg; ad továbbá nulla energiás Pfaff-kvázilyuk sávot (4.3(c) ábra), és egy alacsony energiás sávot (4.4(c) ábra), amit a Pfaff-kvázirészecske állapotokkal azonosítunk.

A második Landau-szinten $\mathcal{V}_{\text{Coulomb}}$ semleges és töltött gerjesztéseit nem adja vissza jól a Pfaff-modell (a) [300], ami az alacsony átfedésekből és a Pfaff-sajátállapotok nagy Coulomb-energiájából látszik, ami esetenként nem is fér az ábrára. Ha a Landau-szintek keveredését a $\mathcal{H}_{\text{BN}}$ kölcsönhatással írjuk le, az egyezés gyorsan javul [(b) és (d)]. Az egyezés valamivel rosszabb kis L értékekre a semleges gerjesztéseknél (4.2. ábra) és nagy L -ekre a kvázilyukaknál (4.3. ábra), ami a legkisebb kvázirészecske-kvázilyuk, ill. kvázilyuk-kvázilyuk távolságoknak felel meg. A Landau-szintek keveredése tehát a Pfaff-állapotot stabilizálja mind az alapállapot, mind az elemi gerjesztések vonatkozásában.

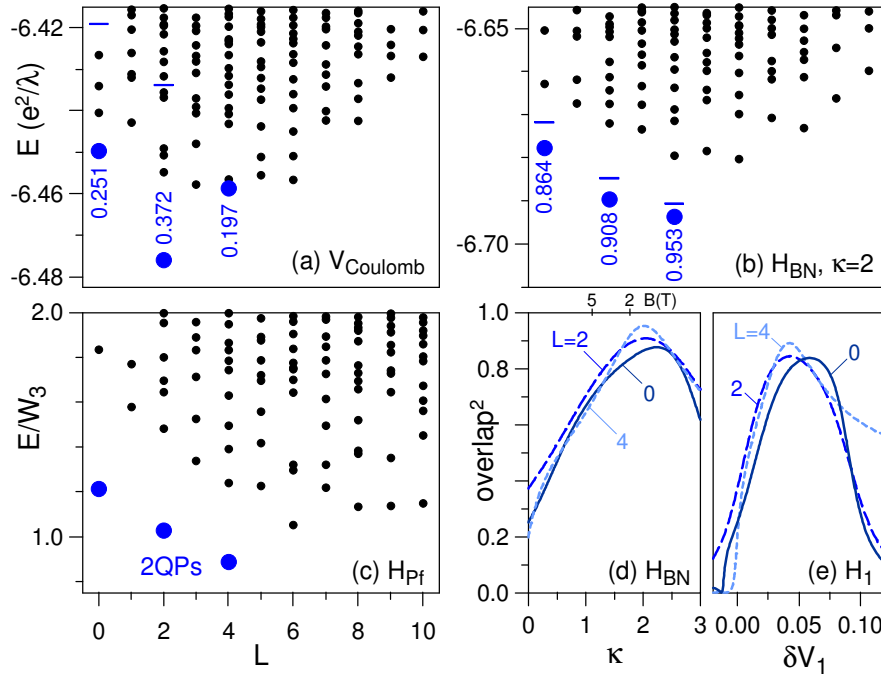


4.3. ábra. Mint a 4.2. ábra, de két Pfaff-kvázilyuk esetére $2Q = 2N - 2 = 30$ fluxusnál.

Az irodalomban szó esik a minta w merőleges vastagságának szerepéről [345]. Mi egy közelítő modellt értékeltünk ki, ahol $\mathcal{V}_{\text{Coulomb}}$ -t végtelen mély potenciálgödör (cos merőleges irányú hullámfüggvény) esetére módosítjuk, és $\delta\mathcal{V}$ -t és $\delta\mathcal{W}$ -t átskálázzuk $\mathcal{V}_1^{\text{Coulomb}}(w)/V_1^{\text{Coulomb}}(w=0)$ aránnyal (ami 0.91, ha $w = 3\ell$). A vastagság növelésével κ optimális értéke enyhén csökken, amint az a 4.1(e) és 4.5(e)-(g) ábrákon látható. (Megjegyezzük, hogy a Landau-szintek keveredése nélkül a véges mintavastagság figyelembe vétele a Pfaff-alapállapotot jelentősebben, a Pfaff-kvázilyukakat és -részecskéket kevésbé javítja.)

A Landau-szintek keveredése tipikusan csökkenti a gapet. Nálunk azonban a gap $\kappa \approx 1.5$ -ig nő, utána csökken, ami annak tudható be, hogy a Pfaff típusú korrelációk erősödnek. Ez összhangban van azzal, hogy az 5/2-es TKHE robosztus marad kicsi (~ 2.5 T) mágneses terekben is [326]. A 4.5(f)-(g) ábrák arra utalnak, hogy a töltött gerjesztések esetében a Landau-szintek keveredésének lényeges szerepe lehet a Pfaff-állapot stabilizálásában, bár e kérdés további vizsgálatokat igényelne.

Összefoglalva, azt találtuk, hogy a Landau-szintek keveredésének egy realiztikus modellje a Pfaff-modellt stabilizálja mind az alapállapot, mind a gerjesztések vonatkozásában. Rezayi

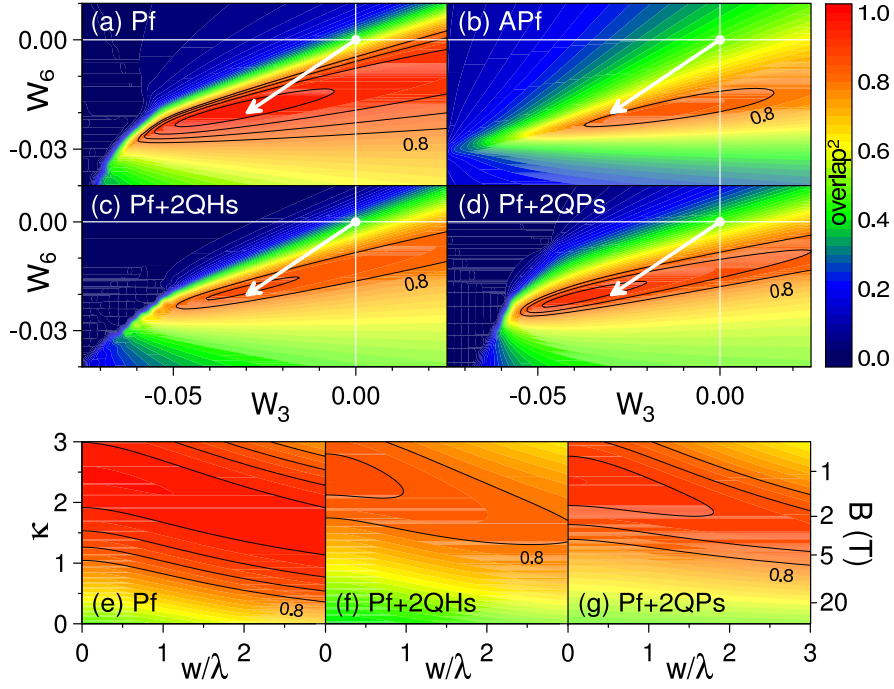


4.4. ábra. Mint a 4.2. és 4.3. ábra, de két Pfaff-kvázirészecskére $2Q = 2N - 4 = 28$ fluxusnál (jobbra).

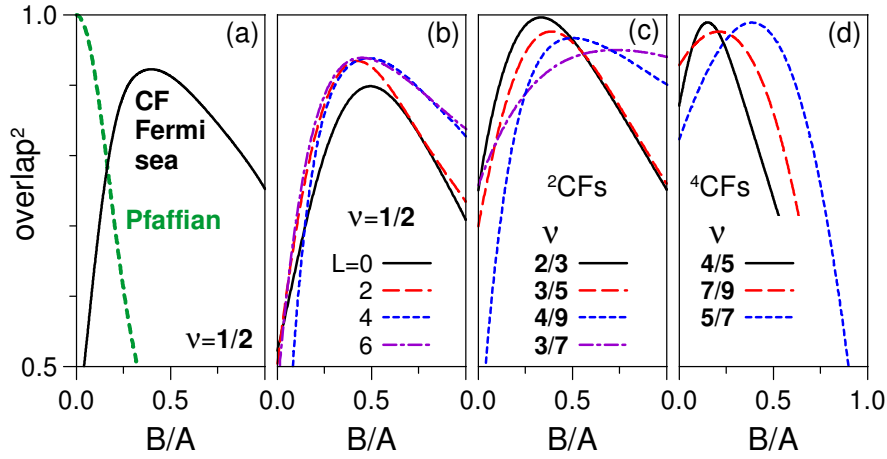
és Simon [351] konklúziója ezzel ellentétes; ez az eredmény egzakt diagonalizáción alapul, amely az aktív $n = 1$ Landau-szint mellett az $n = 0, 2$ szinteket is figyelembe veszi, de a diagonalizálandó mátrixok nagyságát korlátozandó legfeljebb három lyukat enged meg a $n = 0$ szinten, illetve három részecskét a $n = 2$ szinten. Pakrouski *et al.* [353] szintén perturbatív korrekciók figyelembe vételével a miénkkel egyező következtetésre jutott. Zhang és Jain difúziós Monte Carlo módszerrel nem talált lényegesen különböző energiacsökkenést a Pfaff- és anti-Pfaff állapotoknál (magánközlés). Edward Rezayi magánközlése szerint a $\mathcal{W}_9$ háromtest-pszeudopotenciál figyelembe vétele viszont a perturbatív módszerrel is az anti-Pfaff állapotot részesíti előnyben.

4.3. Tört kvantált Hall effektus háromrészecskés taszító kölcsönhatásból

Ebben az alfejezetben kétdimenziós fermionok gázát vizsgáljuk a legalacsonyabb Landau-szinten taszító háromtest-kölcsönhatással. A tört kvantált Hall effektusban háromrészecskés kölcsönhatást a Landau-szintek keveredése okozhat az egy Landau-szintre vetített effektív kölcsönhatásban [(4.2,4.4) egyenletek]. Most a párkölcsönhatási tagok elhagyásával kapott szélső esetet tanulmányozzuk. Ilyen kölcsönhatások vizsgálatára további motiváció, hogy az $\nu = 5/2$ TKH effektus magyarázatára javasolt nemábeli gerjesztésekkel bíró Pfaff-állapot [79, 325] egzakt nulla energiás megoldása a $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ háromtest-kölcsönhatásnak (4.6), amelyben csak a legelső háromtest-pszeudopotenciál nem zérus. Tisztán háromtest-kölcsönhatással rendelkező fermionrendszerek megvalósítására van esély ultrahideg atomi gázokban. Egyfelől a mágneses tér szimulálható a rendszer gyors forgatásával [354, 355], és Berry-fázisok hozhatók létre az atomok belső állapotaihoz kapcsolódó térfüggő csatolással [356]. Másfelől vannak javaslatok a



4.5. ábra. A Pfaff-alapállapot (a,e), az anti-Pfaff alapállapot (b), két Pfaff-kvázilyuk (c,f), és két Pfaff-kvázirészecske (d,g) négyzetes átfedése az egzakt sajátállapotokkal a kölcsönhatási paraméterek függvényében. A részecskeszám a (b) panelen $N = 12$, a többin $N = 14$. Az (e-g) paneleken a paraméterek a w/ℓ mintavastagság és κ [(4.5) egyenlet]. Az (a-d) paneleken a paraméterek a W_3 és W_6 háromtest-pszeudopotenciálok; $W_5 = 0.367 W_3$ rögzített; a fehér nyilak mutatják a Bishara-Nayak effektív kölcsönhatást paramétereit $\kappa = 0$ és 2 végpontok között. Az (a,e) panelen az $L = 0$ állapotot, az (c,d,f,g) paneleken a maximális szeparációnak megfelelő $L = 1$ állapotot hasonlítjuk össze. A kontúrok rendre a 0.8, 0.85, 0.9 és 0.95 négyzetes átfedésnek felelnek meg.



4.6. ábra. Egyes állapotok fejlődése a háromtest-kölcsönhatás hatótávolságát jellemző B/A függvényében. (a) $\mathcal{H}^{(3)}$ legalacsonyabb $L = 0$ állapotának ($B/A < 0.3$ esetben az alapállapotnak) négyzetes átfedése a Pfaff-állapottal és a gyengén kölcsönható kompozit fermion állapottal $\nu = 1/2$ -nél ($N = 18$, $2Q = 33$). L a teljes pályamomentum a Haldane gömbön. (b) A legalsó sávba eső összes KF állapot négyzetes átfedése $\mathcal{H}^{(3)}$ megfelelő legalacsonyabb energiájú állapotaival $N = 14$ fermionra $2Q = 25$ fluxusnál. (c) és (d) $\mathcal{H}^{(3)}$ egzakt alapállapotait hasonlítja össze $\nu = 2/3, 3/5, 4/9, 3/7, 4/5, 7/9$ és $5/7$ betöltéseknél a megfelelő inkompresszibilis kompozit fermion állapotokkal ($N = 22, 18, 16, 15, 32, 30$ és 24).

párkölcsönhatás kikapcsolására [357, 358], ami dominánssá tenné a háromtest-kölcsönhatást.

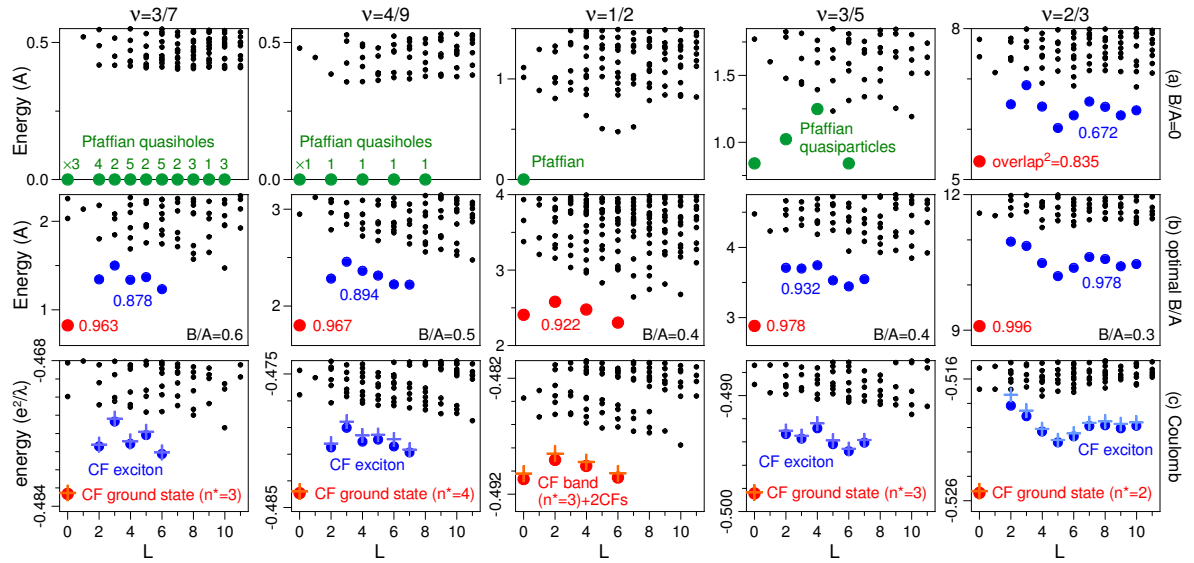
Az olyan kölcsönhatások zérus energiájú állapotait, amelyek véges számú kölcsönhatási pszeudopotenciálnál csonkolva vannak, explicite fel lehet sorolni. Azonban a releváns fizika jelentős részét nem a zérus energiájú állapot hordozzák. Például annak a párkölcsönhatásnak, amelynek pszeudopotenciáljai a legelső V_1 kivételével nullák, $\nu \leq 1/3$ tartományban vannak zéró módusai, a $\nu \geq 1/3$ tartományban az alacsony energiájú állapotok kompozit fermionokat tartalmaznak (akárcsak a Coulomb-kölcsönhatás esetében) [47].

Teljesen spinpolarizált fermionokat tekintünk a legalacsonyabb Landau-szinten. Egzakt diagonalizációt végzünk a gömbön (1.4.1. szakasz). A Hamilton-operátor alakja [359]

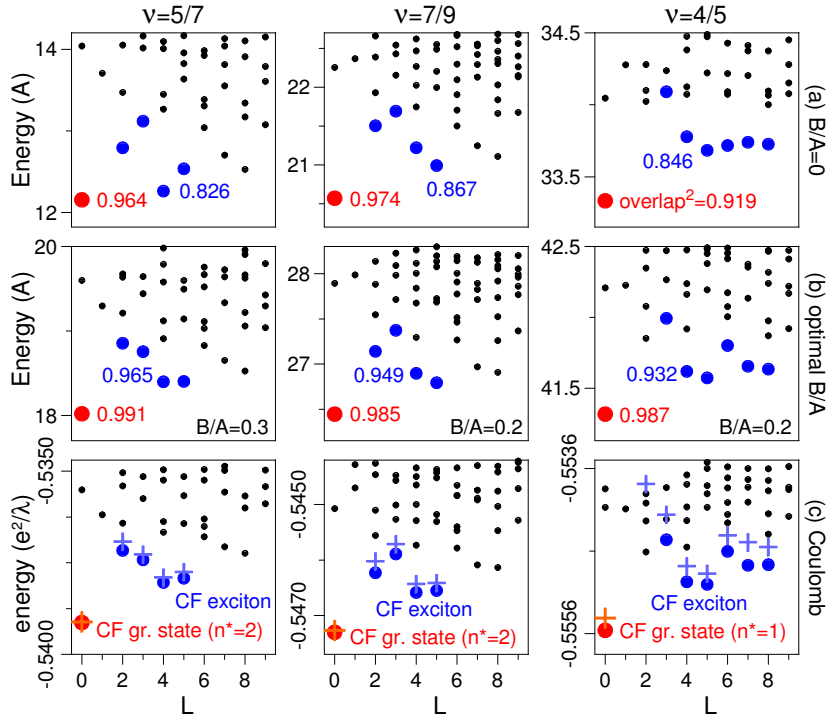
$$\mathcal{H}^{(3)} = A \sum_{i < j < k} P_{ijk}^{(3)}(3Q - 3) + B \sum_{i < j < k} P_{ijk}^{(3)}(3Q - 5), \quad (4.8)$$

ahol $A, B > 0$ konstansok, és $P_{ijk}^{(3)}(L)$ az i, j, k elektronok állapotát vetíti le az L összimpulzusmomentumú altérre. (Az $L = 3Q - 4$ értéket az impulzusmomentum-algebra, a $L > 3Q - 3$ értékeket a Pauli-elv zárja ki.) $\mathcal{H}^{(3)}$ kétrészecskés tagokat nem tartalmaz, de bünteti, ha három részecske a kvantummechanikailag lehetséges két legszorosabb állapotok egyikében van valamilyen súllyal. Ha $B = 0$, $\mathcal{H}^{(3)}$ a Pfaff-modellre redukálódik [(4.6) egyenlet], egyébként a Gaffnian alapállapotot definiálja $\nu = 2/5$ -nél (4.6. fejezet). Most a $\nu > 2/5$ tartományra koncentrálunk. B/A növelése a kölcsönhatás hatótávolságát növeli.

Először a Pfaff-állapot fejlődését vizsgáljuk a kölcsönhatás hatótávolságának függvényében. A 4.6(a) ábrán látható, hogy $\mathcal{H}^{(3)}$ egzakt alapállapotának átfedése a Pfaff-állapottal gyorsan csökkent B/A növelésével, ami átmenetet jelez valamilyen más állapotba. Az alacsony energiás spektrumban B/A növelésével megváltozik a szerkezet: amint a 4.7. ábra középső oszlopában látható, egy jól elkülöníthető alacsony energiájú sáv alakul ki, mire elérjük



4.7. ábra. Kompozit fermionok a háromrészeskés kölcsönhatás spektrumában különböző betöltési számoknál. (a) A felső sor $\mathcal{H}^{(3)}$ spektruma $B/A = 0$ esetén, (b) a középső B/A „optimális” értéke mellett (lásd a 92. oldalon). (c) Az alsó sor a Coulomb kölcsönhatás spektruma egzakt diagonalizációval (pöttyök) és a KF elméletből (keresztek). $\nu = 3/7, 4/9, 1/2, 3/5$ és $2/3$ betöltéseknél a részecskeszámok rendre 12, 16, 14, 15 és 18. Zölddel mutatjuk a Pfaff-alapállapotot, -kvázilyukakat és -kvázirészecskéket; az egész számok a degenerációt adják meg. Pirossal mutatjuk a KF alapállapotot és késsel a KF excitonokat. A felső sorban megadjuk a négyzetes átfedést a megfelelő KF állapotokkal, ha a spektrumok kvalitatív hasonlósága lehetővé teszi az összehasonlítást. Az exciton ág és $\nu = 1/2$ -nél az alacsony energiás ág esetében csak az átlagolt négyzetes átfedést adjuk meg. A felső két sorban az energiaegység A , az alsóban E_C . A vízszintes tengelyen L a teljes pálya-impulzusmomentum.

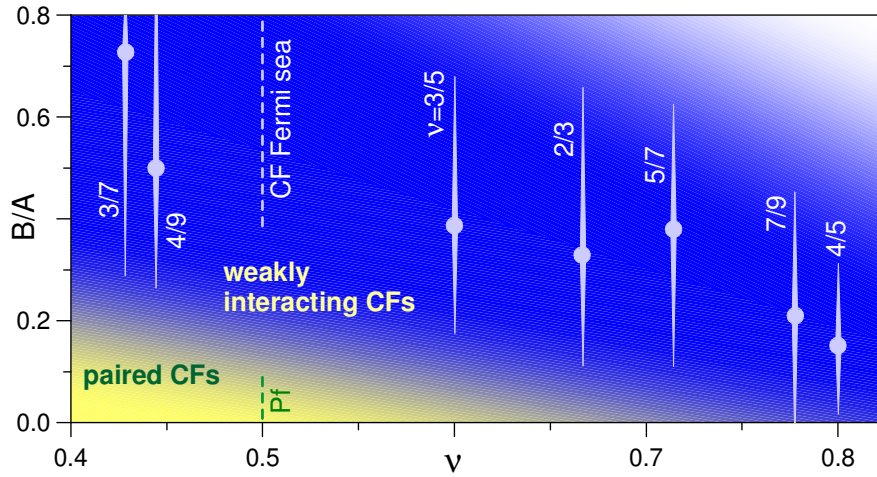


4.8. ábra. Négyörvényes kompozit fermionok kialakulása. Hasonló a 4.7. ábrához, de a betöltési szám $\nu = 5/7, 7/9$ és $4/5$ ($N = 19, 23$ és 28). $\nu = 4/5$ betöltésnél a KF exciton állapot $L = 2$ -nél nem azonosítható egyértelműen.

$B/A \sim 0.2$ -t, és később is fennmarad. Ez a sáv nagyon hasonlít gyengén kölcsönható kompozit fermionok alsó sávjára $2Q^* = 2Q - 2(N - 1) = -1$ effektív fluxusnál. Ezért közvetlenül összehasonlítjuk a KF hullámfüggvények energiáját az egzakt sajátállapotokkal. A KF állapotok szinte tökéletesen egybeesnek a Coulomb-kölcsönhatás alacsony energiájú sajátállapotaival (4.7. ábra alsó sora). A 4.6(a) és (b) ábrákon látható, hogy miközben a Pfaff-állapottal csökken az átfedés, a gyengén kölcsönható KF-okkal gyorsan nő, és $B/A \approx 0.5$ környékén maximális. Ezek az eredmények azt mutatják, hogy fázisátalakulás történik a Pfaff-állapotból a kompozit fermionok Fermi tengere állapotba a kölcsönhatás hatótávolságának növelésével. (Az ábrák mindig a legnagyobb számolható rendszert mutatják minden betöltési számnál; kisebb rendszerek viselkedése hasonló.)

Megvizsgáljuk $\mathcal{H}^{(3)}$ sajátállapotait $\nu = m/(2m \pm 1)$ és $\nu = 1 - m/(2m \pm 1)$ formájú törtek-nél a kompozit fermionok relevanciája szempontjából. A 4.6(c) ábra az alapállapot átfedését mutatja a megfelelő KF állapottal. Látható, hogy van egy „optimális” B/A érték, amelynél az átfedés nagyon magas szinten tetőzik. A 4.7. ábrán megint csak az alacsony energiájú állapotok átrendeződése látható, ahogy B/A -t növeljük. Nyilvánvaló, hogy az optimális B/A környékén az állapotnak gapje van (persze $\nu = 1/2$ kivételével), és a spektrum nagyon hasonló az alsó sorban látható gyengén kölcsönható KF spektrumhoz, beleértve a semleges exciton módot.

A 4.6(d) és 4.8. ábra mutatja, hogy a háromtest-kölcsönhatás nemcsak kétörvényes kompozit fermionokat hoz létre a $2/3 \geq \nu > 2/5$ tartományban, hanem négyörvényeseket a $\nu = 1 - m/(4m \pm 1)$ törteknél $\nu > 2/3$ betöltéseknél. Sőt, ez utóbbiak még robusztusabbak, még $B = 0$ esetén is előfordulnak. Tanulmányoztunk további kis rendszereket a fenti speciális betöltési számok között is, és szintén jó egyezést találtunk a kompozit fermion állapotokkal, azaz a rendszer alacsony energiájú állapotai leírhatók KF kvázirészecskékkal és



4.9. ábra. A $\mathcal{H}^{(3)}$ háromtest-kölcsönhatás tört kvantált Hall effektusának fázisdiagramja. A kék tartományban az alacsonyenergiájú állapotok leírhatók gyengén kölcsönható kompozit fermionokkal, a sárga tartományban párosított KF-okkal. $\nu = 1/2$ betöltésnél a Pfaff-állapot átmegy kompozit fermionok Fermi-tengerébe B/A növelésével. A függőleges vonalak azt a tartományt mutatják, ahol $\mathcal{H}^{(3)}$ egzakt alapállapotának négyzetes átfedése a gyengén kölcsönható KF állapottal legalább 0.9 (a legnagyobb számolható rendszerben), a pontok maximális átfedésnek felelnek meg. A fázishatárok nem tekinthetők kvantitatíve pontosnak.

-lyukakkal, amelyek egy közeli összenyomhatatlan állapot felett jelennek meg.

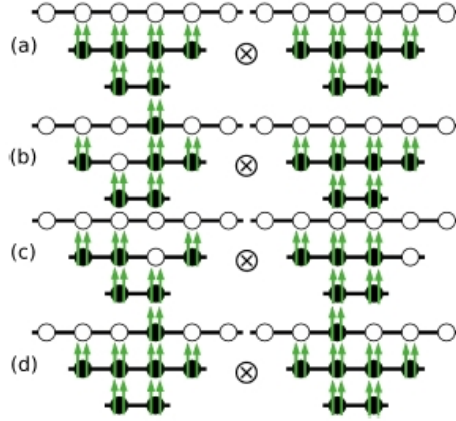
A háromtest-kölcsönhatás nem teljesíti a Landau-szinten belüli részecske-lyuk szimmetriát, ezért a $\nu < 2/5$ és $3/5 < \nu < 1$ tartományok videlkedése eltérhet. Itt viszont azt kaptuk, hogy B/A bizonyos értéktartományára az állapotok a Coulomb kölcsönhatás állapotaihoz közeliek, mely utóbbiak részecske-lyuk szimmetrikusak. A részecske-lyuk szimmetria tehát jó közelítéssel helyreáll a $3/5 > \nu > 2/5$ intervallumban.

Főbb eredményeinket a 4.9. ábrán látható fázisdiagram összegzi. Bár a kompozit fermion konstrukciók a taszító párkölcsönhatás rövid távú részét minimalizálja, rövid távú háromtest-kölcsönhatás esetében is KF-ok alakulnak ki egy széles B/A tartományban. A legalacsonyabb Landau-szinten a kompozit fermion modell szinte olyan pontos és részletes leírását adja az alacsony energiás fizikának a háromtest-kölcsönhatás esetében, mint a Coulomb kölcsönhatás esetében.

4.4. Kétosztatú kompozit fermion állapotok

A második Landau-szinten megfigyelt kis számú TKH állapot esetében a kompozit fermion elmélet kevésbé pontos. Ez teret enged olyan elektronfolyadék-modellek felállítására, amelyek helyesebben írják le a korrelációkat ezen TKH állapotokban. Ebben az alfejezetben egy ilyen modellt állítunk fel és tesztelünk. A variációs hullámfüggvényeink kompozit fermionokból épülnek fel, amelyek két „partícióra” oszlanak. Megmutatjuk, hogy ezek a kétosztatú kompozit fermion (KKF) állapotok nagyon pontosan leírják az erős külső mágneses térben mozgó töltött fermionokat számos betöltési számnál, ha azok a $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ háromrészecskés modellkölcsönhatással hatnak kölcsön [(4.6) egyenlet]; ez a modell továbbá nagyon jól közelíti az egzakt Coulomb alapállapotot $\nu = 2 + 3/5$ és $\nu = 2 + 4/7$ betöltéseknél, ezért a belőlük Landau-szinten belüli részecske-lyuk konjugációval kapott állapotok plauzibilis leírását adják a $\nu = 2 + 2/5$

és $\nu = 2 + 3/7$ betöltéseknél megfigyelt TKH effektusnak [76–78, 87].



4.10. ábra. Az összenyomhatatlan alapállapot és gerjesztéseinek vázlata $\nu = 4/7$ betöltésnél a gömbön, $2Q^* = 1$ effektív monopóluserősségnél. A két blokk a két partíciónak felel meg, mindkettő $\nu^* = 2$ kompozit fermion-betöltéssel. A körök KF pályáknak felelnek meg, a nyilakkal ellátott pöttyök kompozit fermionokat jelölnek. A vízszintes vonalak KF Landau-szintek, melyeknek állapotai növekvő L_z sorrendbe vannak rendezve. (a) Az összenyomhatatlan (gappel rendelkező) alapállapot, (b) semleges gerjesztés, (c) két kvázilyuk, (d) két kvázirészecske.

Kiindulópontunk az ismert tény [324, 360], hogy a Cauchy-féle determináns-azonosság alapján a (1.9) egyenletben bevezetett Pfaff-hullámfüggvény az alábbi alakba írható:

$$\Psi_{\text{Pf}}(\{z_i\}) = \mathcal{A} \left(\prod_{j < k}^{N/2} (z_j - z_k)^3 \prod_{j < k}^{N/2} (w_j - w_k)^3 \prod_{j,k=1}^{N/2} (z_j - w_k) \right) e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2 - \frac{1}{4} \sum_i |w_i|^2}, \quad (4.9)$$

ahol az elektronok komplex koordinátáit két csoportba soroltuk ($\{z_i\}$ és $\{w_i\}$; $i = 1, \dots, N/2$), és $\mathcal{A}$ az antiszimmetrizálás operátora az *összes* elektronváltózóra. Az $\mathcal{A}$ után szereplő részt Halperin javasolta [314] kétrétegű rendszerekben $\nu_T = 1/2$ teljes (mindkét réteget száma vevő) betöltésnél fellépő TKHE magyarázatára; itt ezt az ún. 331 hullámfüggvényt antiszimmetrizáljuk. Természetesen kétrétegű rendszerekre is fel lehet írni kompozit fermion hullámfüggvényeket [361]; most olyan állapotokat vizsgálunk, amelyek ezek antiszimmetrizáltjai:

$$\Psi_{\nu}^{\text{KKF}} = \mathcal{A} \left(\Psi_{\bar{\nu}}^{\text{KF}}(\{z_i\}) \Psi_{\bar{\nu}}^{\text{KF}}(\{w_i\}) \prod_{j,k=1}^{N/2} (z_j - w_k) \right). \quad (4.10)$$

Antiszimmetrizálás előtt az elektronoknak két partíciója van, $\{z_i\}$ és $\{w_i\}$, és mások a partíciókon belüli és a partíciók közötti korrelációk; ezt a különbséget $\mathcal{A}$ eltünteti. A $\Psi_{\bar{\nu}}^{\text{KF}}$ tényezők az egyszerű spinpolarizált rendszerek kompozit fermion hullámfüggvényei [(1.4) és (1.5) egyenlet], $\bar{\nu} = \nu^*/(2p\nu^* + 1)$, ν^* az $N/2$ részecskével betöltött KF Landau-szintek száma. Könnyen belátható, hogy a teljes betöltés

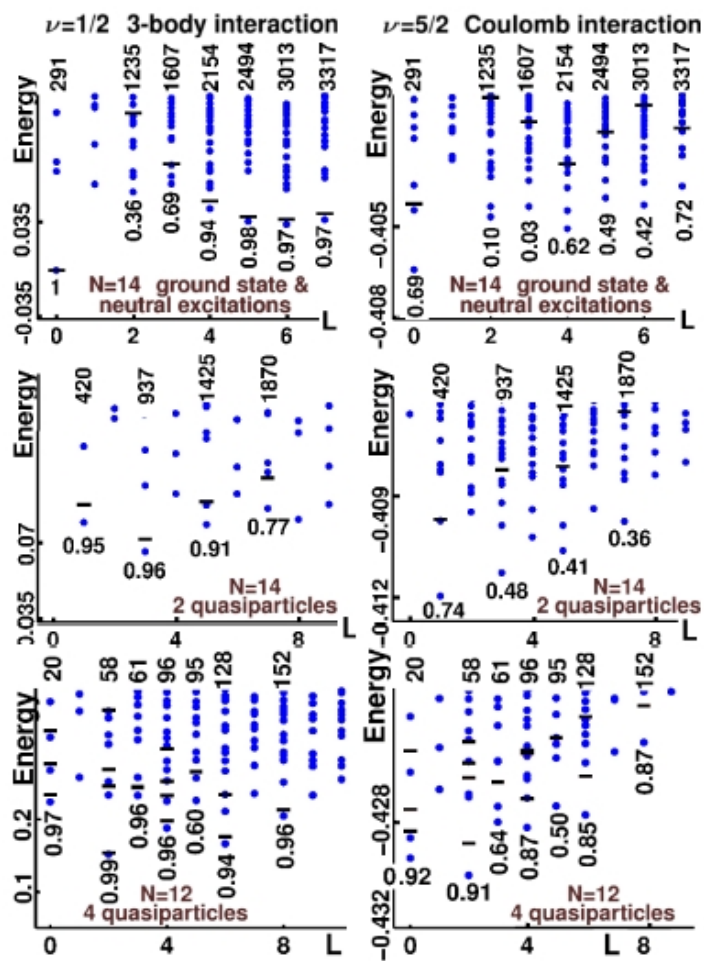
$$\nu_T = \frac{2\bar{\nu}}{\bar{\nu} \pm 1} = \frac{2\nu^*}{(2p + 1)\nu^* \pm 1}. \quad (4.11)$$

Speciálisan, ha $\nu^* = 1$, visszakapjuk a (4.9) Pfaff-állapotot. A kétosztatú Ψ_{ν}^{KKF} állapotok semleges gerjesztéseinek, kvázirészecskéinek, kvázilyukainak variációs hullámfüggvényei

a megfelelő KF állapotok gerjesztéseiből egyszerűen megkonstruálhatók, lásd pl. a 4.10. ábrán. Számításainkat a gömbön végezzük el. Az egyes partíciók kompozit fermionjai $2Q^* = 2Q + 2 - (2p + 1)N/2$ effektív fluxust éreznek; ν_T teljes betöltésnél az összenyomhatatlan állapot $2Q = N/\nu_T \mp (\nu^* + 2p)$ fluxusnál fordul elő.

A Ψ_ν^{KKF} hullámfüggvények alakja párkorrelációt sugall, mivel elektronokat hozzáadása a tömbi rendszerhez csak kettesével történhet (partícionként egy-egy elektron), és a fluxus változtatásával csak párosával hozhatunk létre kvázirészecskéket és -lyukakat. Hasonló konstrukciók már előfordultak az irodalomban [362–366].

A KKF hullámfüggvények kiterjedt összehasonlítását végeztük el mind a második Landau-szinten érvényes egzakt Coulomb sajátállapotokkal, mind a Pfaff-modellt definiáló $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ háromtest-kölcsönhatás [(4.6) egyenlet] sajátállapotaival.



4.11. ábra. Az egzakt állapotok és a KKF variációs hullámfüggvények összehasonlítása $\nu = 1/2$ -nél a $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ háromtest-kölcsönhatás (balra) és a Coulomb kölcsönhatás (jobbra) esetében. A kék pöttyök a Hamilton-operátor sajátértékei, a fekete vonalak az egy részecskére jutó energia várható értékei a variációs KKF állapotokban. (Ha adott L mellett több állapot van, diagonalizáljuk a kölcsönhatást az altéren.) A panelek alatti számok a legalsó KKF hullámfüggvény átfedése az egzakt állapottal, a felső számok az L -altér dimenzióját adják meg. Felső sor: az alapállapot és semleges gerjesztései $2Q = 2N - 3$ fluxusnál, középső sor: két kvázirészecske $2Q = 2N - 2$ fluxusnál, alsó sor: négy kvázirészecske $2Q = 2N - 1$ fluxusnál.

A 4.11. ábra bal oldalán láthatjuk a KKF hullámfüggvények összehasonlítását a $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ sajátállapotaival olyan fluxusoknál, ahol az alapállapot és a semleges gerjesztések, illetve kettő vagy négy kvázirészecske fordul elő $\nu = 1/2$ betöltésnél. Mind az energiák, mind az átfedések jó egyezést mutatnak az alacsony energiás állapotokra. (Semleges gerjesztésekben a részecske-lyuk pár maximális szeparációja a legnagyobb, két töltött gerjesztés esetében a legkisebb L impulzusmomentumnál valósul meg. Több töltött gerjesztés esetében ilyen egyszerű jellemzés nem lehetséges.) Érdekes, hogy Ψ_{ν}^{KKF} semleges gerjesztéseit nagyon jól reprodukáljuk a legkisebb néhány L kivételével. A Coulomb sajátállapotokkal $\nu = 5/2$ -nél már rosszabb az összehasonlítás eredménye (4.11. ábra bal oldala). A kérdés, hogy a Coulomb és a háromrészecskés kölcsönhatás kvázirészecskéi adiabatikus összeköttetésben állnak-e, az általunk diagonalizált kis rendszerekkel nem dönthető el.

A Pfaff-állapot kvázilyuk állapotainak száma ismert: $2n$ kvázilyuk állapotai felírhatók a pozíciók két egyenlő csoportba sorolásával [(4.1) egyenlet, $(2n)!/(n!)^2$ eset], ami azonban csak 2^{n-1} lineárisan független állapotot ad [83, 112]; adott fluxusnál a $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ kölcsönhatásnak ennyi nulla energiájú állapota van [325]. A jelen konstrukció lehetőséget ad a *kvázirészecskék* leszámolására is. $2n$ kvázirészecske ill. kvázilyuk esetén mindegyik partícióban n kompozit fermion jelenik meg a második, ill. n kompozit fermion hiányzik az első KF Landau-szinten. Ezeket az $\frac{N-2n}{2} + 2$ ill. $\frac{N+2n}{2}$ releváns pályán elhelyezve

$$g^{2n\text{-kr}} = \binom{\frac{N-2n}{2} + 2}{n} \quad \text{ill.} \quad g^{2n\text{-kly}} = \binom{\frac{N+2n}{2}}{n}$$

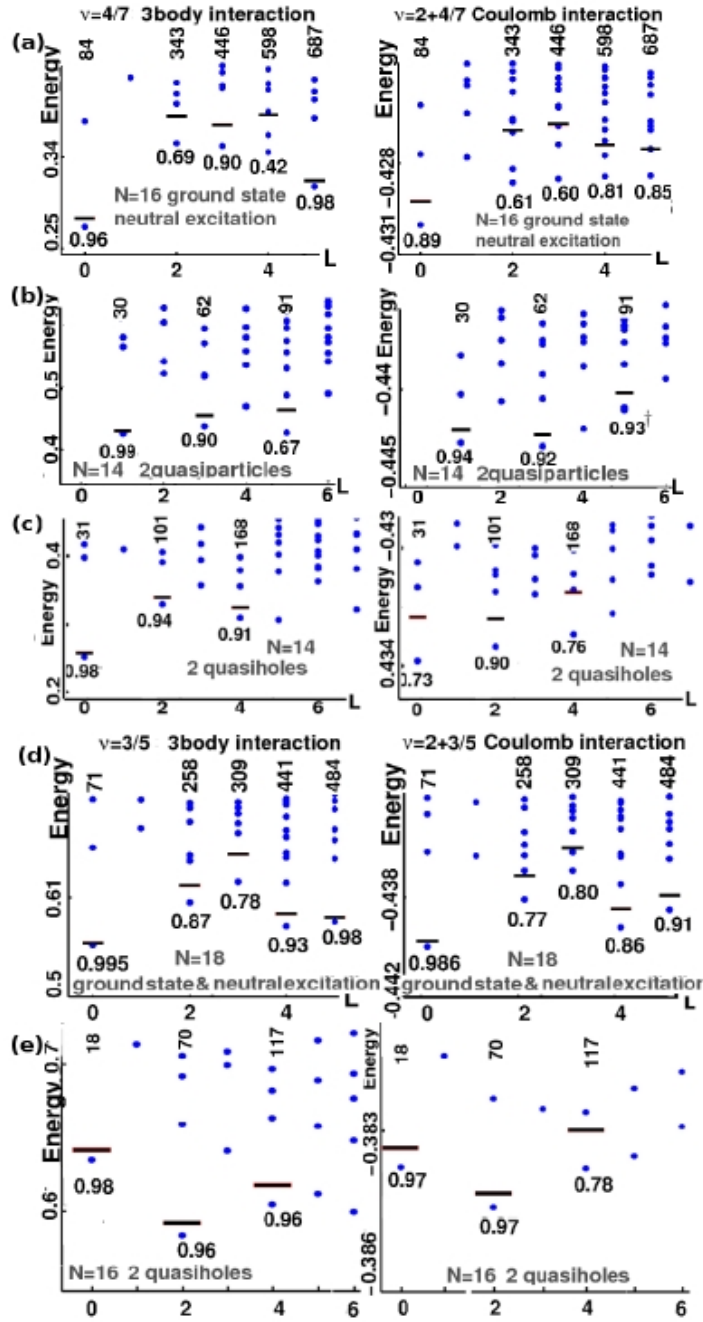
esetet kapunk. Bebizonyítható, hogy a generált kvázilyuk állapotok között most is 2^{n-1} lineárisan független lesz. A kvázirészecskék esetében azonban $N = 6-14$ rendszerekben numerikusan ellenőrizve azt kaptuk, hogy mind a $g^{2n\text{-kr}}$ állapot lineárisan független.

Megvizsgáltuk a $\nu = 2m/(3m+1)$ sorozatba tartozó $4/7$ és $3/5$ törteket is, amelyek két ill. három KF Landau-szint betöltésének felelnek meg mindkét partícióban; a fluxus $2Q = 7N/4 - 4$ és $2Q = 5N/3 - 5$. Egzakt diagonalizáció homogén, azaz $L = 0$ impulzusmomentumú állapotot ad minden általunk vizsgált rendszerméretre. A 4.12. ábra a KKF állapotokat veti össze az egzakt állapotokkal. A $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ modellkölcsönhatás sajátállapotaival az átfedések nagyok, ami az impulzusmomentum-alterek nagy dimenziója miatt szignifikáns. A KKF hullámfüggvények szintén jó leírását adják a Coulomb sajátállapotoknak második Landau-szinten. Kiemeljük $\nu = 2 + 3/5$ betöltés esetét, ahol a KKF alapállapot átfedése az egzakt alapállapottal 0.986 $N = 18$ részecskére, és az energia csak 0.04% -kal magasabb az egzaktnál; ez jobb mint Read és Rezayi parafermion modellje [367] vagy a Bonderson-Slingerland modell [368, 369] esetében. Ha a Landau-szintek keveredése elhanyagolható, az eredményeink átvihetők a szinten belüli részecske-lyuk konjugációval a kísérletekből ismert [76–78, 87] $2 + 2/5$ és $2 + 3/7$ THK állapotokra is.

A bemutatott konstrukciónak három partíciós általánosítása társszerzőim munkája [370].

4.5. Páros nevezőjű tört állapotok egyrétegű grafénben

Ebben az alfejezetben a tört kvantált Hall állapotok $\nu^{(n)} = m/(2pm \pm 1)$ sorozatainak határértékeként adódó $\nu^{(n)} = 1/(2p)$ betöltésekre koncentrálnak. Ha a gyengén kölcsönható kompozit fermion-modell érvényes marad $m \rightarrow \infty$ határesetben, GaAs-hoz hasonlóan kompozit fermionok Fermi-tengere (KFFT) állapotot várunk [53, 318]. Teljesen spinpolarizált GaAs mintákban ez kísérletileg sokszorosán igazolt [59–62, 319–323] $\nu = 1/2$ -nél, és eltűnő Zeeman-energia esetén elméleti eredmények [64, 313] szólnak amellett, hogy spin-szinglett kompozit fermion Fermi-tenger jön létre.



4.12. ábra. A KKF variációs hullámfüggvények összehasonlítása a $\mathcal{H}_{\text{Pf}}$ háromtest-kölcsönhatás (balra) és a Coulomb kölcsönhatás (jobbra) sajátállapotaival. A felső három sor $\nu = 4/7$ -nél mutatja (a) az alapállapot és semleges gerjesztéseit, (b) két kvázilyukat, (c) két kvázirészecskét. A alsó két sor $\nu = 3/5$ -nél mutatja (d) az alapállapotot és semleges gerjesztéseit, (e) két kvázilyukat. A jobb (b) panelen $L = 5$ -nél az átfedés a két alsó majdnem degenerált állapot alterére vett vetületet adja meg.

Grafén feles és negyedes betöltéseinek a következő lehetséges állapotokat vizsgáltuk meg: (i) kompozit fermionok Fermi-tengerét, az $SU(4)$ szimmetria által lehetővé tett komponens-szerkezetekben, (ii) a (1.9) egyenletben bevezetett Pfaff-állapotot, ami kompozit fermionok p -típusú párosított („szupravezető”) állapota [79, 324, 360, 371], és a teljesség kedvéért az ún. hollow-core állapotot [372], amely kompozit fermionok spin-szinglett párosítását írja le. (Ez utóbbi GaAs esetében nem bizonyult relevánsnak [313], és látni fogjuk, hogy itt sem.) Megjegyezzük, hogy az $n = 0$ Landau-szintre alább kapott eredmények más völgydegenerált rendszerekre is érvényesek [97, 98, 373]; ezen a szinten a pályák konvencionális kétdimenziós elektrongázban és grafénben azonos szerkezetűek.

Modell

A hullámfüggvényeket a (3.5) formában keressük. Kompozit fermionok Fermi-tengerét megkaphatjuk, ha $q = 0$ monopólus-erősség mellett egész számú KF Landau-szintet betöltő állapotok sorának termodinamikai határesetét vesszük. $q = 0$ mellett az egyrészecskes pályák a szokásos gömbfüggvények; az ezekből felépített $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ determinánsok azonosak, a (3.1) módon kapott KF hullámfüggvény kielégíti a (3.3) feltételt. Legyen ennek neve „KFFT $[\frac{N}{n}, \dots, \frac{N}{n}]$.” Mivel a kompozit fermionok q effektív monopólus-erősségének és valódi Q monopólus-erősségnek kapcsolata $Q = q + p(N - 1)$, a betöltési szám $q = 0$ esetén

$$\nu^{(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2Q + 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2p(N - 1) + 1} = \frac{1}{2p}. \quad (4.12)$$

Moore és Read Ψ^{Pf} Pfaff-polinóm hullámfüggvénye (1.9) a gömbön következő alakot ölti:

$$\Psi_{1/2p}^{\text{Pf}} = \text{Pf} \left(\frac{1}{u_i v_j - v_i u_j} \right) J^{2p}. \quad (4.13)$$

A gömbön $J = \prod_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i)$, ahol $u_i = \cos(\theta_i/2) e^{-i\phi_i/2}$ és $v_i = \sin(\theta_i/2) e^{i\phi_i/2}$. Ez az állapot spintelen (egykomponensű). Tekintjük még az ún. hollow-core állapotot [372]:

$$\Psi_{1/2p}^{\text{hollow-core}} = \det \left((u_i v_{j+N/2} - u_{i+N/2} v_j)^{-2} \right)_{1 \leq i, j \leq N/2} J^{2p}. \quad (4.14)$$

Ez az állapot $SU(2)$ rendszerben spin-szinglett; $SU(4)$ szimmetrikus limeszben a $[N/2, N/2]$ Young-diagrammal jellemezhető multipllett. A (4.13) és (4.14) egyenletekben szereplő Jastrow-tényező miatt e két állapot párosított kompozit fermionokat ír le.

Eredmények

A kompozit fermion Fermi-tenger állapotokat komponensenként 81 részecskéig értékeltük ki (4.13. ábra és 4.1. táblázat). A betöltési számok rendre $\nu^{(0)} = 1/2$ ($\nu = \pm 3/2$); $\nu^{(0)} = 1/4$ ($\nu = \pm 7/4$); $\nu^{(1)} = 1/2$ ($\nu = \pm 5/2, \pm 11/2$); $\nu^{(1)} = 1/4$ ($\nu = \pm 9/4, \pm 23/4$). Ha a spin- vagy völgydegeneráció sérül, a fenti eredmények további félegész vagy negyedes betöltéseknél is relevánsak. Minden esetben véges rendszerek sorát vesszük $B^* = 0$ effektív mágneses tér mellett, és az egy részecskére jutó energiát extrapoláljuk a termodinamikai határesetre. A következő következtetéseket vonhatjuk le:

(i) A 4.1. táblázatban szereplő TKH állapotok mindegyike esetében a hollow-core energiája nagyon magas, tehát ez az állapot irreleváns.

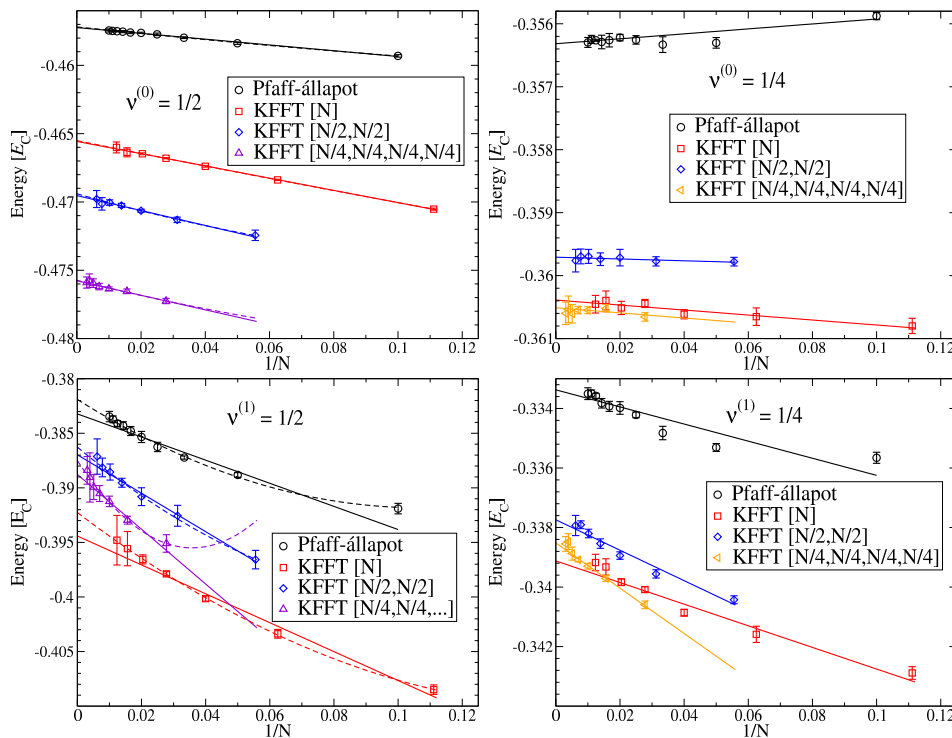
(ii) A Pfaff-állapot energiája szintén minden betöltésnél magasabb, mint a kompozit fermionok Fermi-tengereinek energiája. Így az $|n| = 1$ Landau-szinten magasabb, mint a teljesen polarizált Fermi tenger állapoté, ellentétben GaAs $n = 1$ szintjével [313]. Ezért a Pfaff-polinóm

állapot nem stabil grafénben sem az $n = 0$, sem az $|n| = 1$ Landau-szinteken. Érdekes módon az átfedése a teljesen polarizált egzakt Coulomb alapállapottal magasabb $\nu^{(1)} = 1/2$ -nél grafénben (0.902 és 0.894, $N = 8$ és 10 részecske esetében), mint GaAs-ban $\nu = 5/2$ -nél (rendre 0.87 és 0.84 [344, 374]); az energiák sorrendje persze kizárja a Pfaff-állapotot $\nu^{(1)} = 1/2$ -nél grafénben.

(iii) A Pfaff-polinóm állapot átfedése a teljesen polarizált egzakt Coulomb alapállapottal $\nu^{(2)} = 1/2$ -nél 0.718 és 0.485 $N = 8$ és 10 részecskére, azaz lényegesen rosszabb, mint az $|n| = 1$ szinten (0.902 és 0.894), ami arra utal, hogy irreleváns a grafén $|n| = 2$ Landau-szintjén is.

(iv) Kiértékeljük kompozit fermionok Fermi-tengere hullámfüggvényeit három különböző szimmetriával, az $SU(4)$ szinglettől a teljesen spinpolarizált állapotig. Ezek mindegyikének alacsonyabb az energiája, mint a Pfaff- és hollow-core állapotoknak. Külső szimmetriasértő tér nélkül az $SU(4)$ szinglett állapot energiája a legkisebb $\nu^{(0)} = 1/2$ -nél, összhangban a szabad KF modellel. Ha bekapcsoljuk a Zeeman-teret vagy az alrácsok energiája valamilyen okból különböző, részlegesen polarizált állapotokon keresztül végül eljutunk a teljesen polarizált Fermi-tengerig.

(v) Kompozit fermionok Fermi-tengere releváns $\nu^{(1)} = 1/2$ -nél és $\nu^{(0,1)} = 1/4$ -nél is; de a spinpolarizáció teljes még nulla Zeeman-energia mellett is. Ez összhangban van a $|n| = 1$ Landau-szint TKH állapotaira kapott korábbi eredményekkel (3.3 alfejezet) [20, 299, 375]. $\nu^{(1)} = 1/2$ -nél az energiák extrapolációja egyenesillesztéssel kétségbe vonható, de kvadratikusság függvény illesztése ugyanazt a sorrendet adja. $\nu^{(0)} = 1/4$ -nél a teljesen polarizált KFFT állapot energiája a legkisebb, de az $SU(4)$ szimmetrikus KFFT állapot közel van hozzá.



4.13. ábra. Egy részecskére jutó energia E_C egységeiben különböző állapotokban $\nu^{(n)} = 1/2$ és $1/4$ betöltéseknél az $n = 0$ Landau-szinten (fent) és az $|n| = 1$ Landau-szinten (lent). A termodinamikai határesetre extrapolált energiákat lásd a 4.1 táblázatban.

Számolásunk során elhanyagoltuk a Landau-szintek keveredését; mivel azonban KFFT

Állapot	$E(\nu^{(0)} = \frac{1}{2})$	$E(\nu^{(1)} = \frac{1}{2})$	$E(\nu^{(0)} = \frac{1}{4})$	$E(\nu^{(1)} = \frac{1}{4})$
KFFT $[N]$	-0.46557(5)	-0.3944(3)	-0.36039(7)	-0.3391(1)
KFFT $[\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$	-0.4695(2)	-0.3870(5)	-0.35971(7)	-0.3377(1)
KFFT $[\frac{N}{4}, \frac{N}{4}, \frac{N}{4}, \frac{N}{4}]$	-0.4758(2)	-0.3888(6)	-0.36051(6)	-0.33852(8)
Pfaff-állapot	-0.45723(3)	-0.3832(2)	-0.35632(2)	-0.33337(7)
hollow-core állapot	-0.3146(4)	-0.3333(9)	-0.34928(5)	-0.3209(1)

4.1. táblázat. Egy részecskére jutó kölcsönhatási energia E_C egységeken a termodinamikai határesetben különböző állapotokban $\nu^{(n)} = \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ betöltéseknél az $n = 0, \pm 1$ Landau-szinten. A Zeeman-energiát nem vettük figyelembe, a sűrűségkorrekciót igen. Az $|n| = 1$ szint energiáit befolyásolja a háttér levonásának módja, ezért az irodalmi értékektől különbözhetnek.

állapotok és a Pfaff-polinóm állapot energiakülönbsége jelentős (3-5%), nem valószínű, hogy a szintek keveredése átmenetet okoz a Pfaff-állapotba.

4.6. Kvázirészecskék topologikus jellegének megváltozása a tiltott sáv záródása nélkül a tört kvantált Hall effektus egy modelljében

Topologikus fázisok osztályozásához a Landau-féle rendparaméter fogalma nem elegendő. A különféle tört kvantált Hall állapotok egyaránt folyadékok; nem lehet őket egymástól a termodinamikai potenciálok valamelyik deriváltjával megkülönböztetni. Topologikus fázisok osztályozására számos elképzelés született [376]; azonban a fizika ezen területe még kiforratlan. Egyetértés mutatkozik azonban abban, hogy *adiabatikusan összekötött* állapotok egyazon fázishoz tartoznak, azaz két fázis ekvivalens, ha a Hamilton-operátor folytonos deformációja közben a tiltott sáv fennmarad.

Ha az adiabatikus összeköttetés két topologikus fázis azonosságát vonja maga után, és a topologikus tulajdonságokat a kvázirészecskék határozzák meg (példa erre a kvázirészecske-életutak fonási statisztikája [46, 50, 377–380]), akkor az elemi gerjesztéseknek is adiabatikusan kell fejlődniük. Ismerünk azonban rendszereket, amelyekben az alapállapot folytonos deformációja közben a gerjesztések lényegesen megváltoznak szintkereszteződések és/vagy gap megnyílása miatt: ilyen pl. a BCS-BEC átcsapás.

Most ilyen példát mutatunk a tört kvantált Hall tartományban. Megmutatjuk, hogy miközben a Hamilton-operátort folyamatosan deformáljuk a Coulomb-kölcsönhatásból az ún. Gaffnian háromrészecskés modellkölcsönhatásba [(4.8) egyenlet], az alapállapot $\nu = 2/5$ betöltésnél folyamatosan megy át a $\Psi_{2/5}^{KF}$ kompozit fermion állapotból a Ψ^G Gaffnian állapotba, a gap legalábbis véges rendszerekben megmarad, miközben az elemi gerjesztések topologikus tulajdonságai nem perturbatív módon megváltoznak. Ennek mechanizmusa az, hogy a Coulomb-kölcsönhatás gapet nyit a Gaffnian kvázilyukak sávjában; a gap alatti állapotok egy-az-egyhez megfeleltethetők kompozit fermion kvázilyukaknak, azaz a Gaffnian kvázilyukak kompozit fermion-képződési instabilitást mutatnak. A speciális $2/5$ betöltéstől kissé eltávolodunk; olyan alacsony energiájú állapotokat vizsgálunk, amelyeket leírhatunk olyan KF állapotokkal, melyeknek legfelső kinetikus energia-szintjén csak néhány KF van (ha $\nu \gtrsim 2/5$), vagy néhány KF hiányzik (ha $\nu \lesssim 2/5$); ezeket KF kvázirészecske ill. KF kvázilyuk állapotnak nevezzük. Coulomb-kölcsönhatás esetén rögzített számú KF kvázirészecskét vagy kvázilyukat tartalmazó rendszer legalsó energiaszintjeinek száma megkapható, ha szabad fermionokkal

modellezzük őket B^* effektív mágneses térben (1.2. alfejezet); a KF-ok közötti reziduális kölcsönhatás azonban a szintek degenerációját kvázidegenerált sávvá alakítja.

N	$ \langle \Psi_{2/5}^{\text{KF}} \Psi^{\text{C}} \rangle ^2$	$ \langle \Psi^{\text{G}} \Psi^{\text{C}} \rangle ^2$	$ \langle \Psi^{\text{G}} \Psi_{2/5}^{\text{KF}} \rangle ^2$	$D_{L_z=0}$	$D_{L=0}$
6	0.9993	0.976	0.980	58	3
8	0.9986	0.955	0.962	910	8
10	0.9956	0.943	0.954	16660	52

4.2. táblázat. A Ψ^{C} egzakt Coulomb alapállapot, a Ψ^{G} Gaffnian állapot, és a $\Psi_{2/5}^{\text{KF}}$ kompozit fermion állapot átfedése $\nu = 2/5$ betöltésnél a gömbön. Megadjuk az $L_z = 0$ -hez tartozó altér dimenziószámát ($D_{L_z=0}$) és az $L = 0$ altérét ($D_{L=0}$). Egyes értékek már ismertek az irodalomból [49, 359, 381–383].

A „Gaffnian” hullámfüggvény [359, 381–383] $\nu = 2/5$ betöltésnél egzakt alapállapota a „Gaffnian modell-hamiltoninak” [(4.8) egyenlet], ami három fermion két legközelebbi konfigurációját bünteti. Ez az állapot ugyanazoknál a fluxus-részecske-szám pároknál fordul elő, mint a kompozit fermion hullámfüggvény, és amint a 4.2. táblázat mutatja, magas átfedése van az egzakt Coulomb alapállapottal a legalacsonyabb Landau-szinten, és ezáltal a KF hullámfüggvénnyel is. A Gaffnian valamivel kevésbé pontos, mint a KF hullámfüggvény, de nem annyival, hogy eleve kizárható lenne. Felvetődik a kérdés, mi szól az egyik modell mellett, ha a többi törtet is felölelő általánosabb fenomenológiától eltekintünk.

Először is, a Gaffnian modell és a KF elmélet nem írhatja le ugyanazt a topologikus fázist. Ehhez a kvázirészecskéket és -lyukakat kell figyelembe vennünk. A kompozit fermion elmélet a $\nu = 2/5$ -nél fellépő TKH állapotot kompozit fermionok $\nu^* = 2$ egész kvantált Hall állapotára képezi le. Az alapállapotban két KF Landau-szint teljesen betöltött. Ha rögzített részecske-szám mellett a fluxus q kvantummal változik, $2q$ KF kvázirészecske jelenik meg a harmadik KF Landau-szinten ($q < 0$), vagy ugyanennyi KF kvázilyuk a második szinten ($q > 0$); ebből a gerjesztett állapotok kvantumszámaira pontos predikció következik (valamelyik kompakt geometriában). A Gaffnian modell a kvázilyukak esetére tesz határozott predikciót: a Gaffnian modell-kölcsönhatás nulla energiájú állapotait kell leszámolnunk. A két előrejelzés több kvázirészecske és -lyuk jelenlétében általában különböző. Simon *et al.* megmutatta [359, 383], hogy ha a gap véges marad a termodinamikai határesetben, a Gaffnian zéró módusok szemionikus kizárási statisztikával [384] és nemábeli fonási statisztikával rendelkeznek. A két modell tehát más topologikus tulajdonságokkal rendelkező fázist ír le, és a Coulomb-kölcsönhatás esetében csak az egyik lehet helyes.

Ebben az alfejezetben véges rendszerek egzakt diagonalizációjával tanulmányozzuk a $\nu = 2/5$ TKH állapot kvázilyukait, és ebből következtetünk az állapot topologikus jellegére. Gömbi geometriát alkalmazunk (1.4.1 szakasz). Az elérhető rendszerek természetesen túl kicsik ahhoz, hogy nemtriviális fonási tulajdonságokat számoljunk, amihez legalább négy jól elkülönülő kvázilyuknak kellene a rendszerbe férnie [385, 386]. Azonban egy érvényes modellnek számot kell adnia a szintek leszámolásáról, azaz az elemi gerjesztések kvantumszámairól, valamint elvárható, hogy pontos hullámfüggvényeket adjon kvázilyukak és kvázirészecskék jelenlétében.

A modellek

A Gaffnian modellt [359, 383] az (4.8) egyenletben szereplő háromtest-kölcsönhatás definiálja $A, B > 0$ esetén. Ennek a modellnek egyetlen nulla energiájú alapállapota $2Q = 5N/2 - 4$

fluxusnál a „Gaffnian” állapot [359, 383]:

$$\Psi^G = J e^{-\frac{1}{4} \sum_i (|z_i|^2 + |w_i|^2)} \mathcal{S} \left(\prod_{j < k} ((z_j - z_k)^2 (w_j - w_k)^2) \prod_{j,k=1}^{N/2} (z_j - w_k) \prod_{j=1}^{N/2} \frac{1}{(z_j - w_j)} \right), \quad (4.15)$$

ahol az elektronokat két csoportba soroltuk $\{z_j\}$ és $\{w_j\}$ ($j, k = 1, \dots, N/2$), és $\mathcal{S}$ a szimmetrizálás operátora *minden* elektronváltozóra.

Ha a fluxuskvantumok számát n egységgel megnöveljük, $2n$ kvázilyuk jelenik meg a Gaffnian modellben. Ezen állapotok energiája szintén zérus a $\mathcal{H}^{(3)}$ modell-kölcsönhatás szerint, és egyfajta bázist kapunk, ha a szimmetrizáláson belül a

$$\prod_{j=1}^{N/2} \prod_{\alpha=1}^n (z_j - Z_\alpha)(w_j - Z_{n+\alpha}) \quad (4.16)$$

tényezőt helyezzük el, ahol Z_α a kvázilyukak pozíciója. Ezekre az állapotokra mint a „Gaffnian kvázilyuk szektora” fogunk hivatkozni (jelölés: $\Psi_{2-\text{kly}}^G$, $\Psi_{4-\text{kly}}^G$, stb). Ilyen módon számos különböző hullámfüggvényt generálhatunk, mivel a $2n$ kvázilyuk-pozíciót is két csoportba soroljuk, de ezek az állapotok nem mind lineárisan függetlenek [359, 383]. Mi a Gaffnian Hamilton-operátor numerikus diagonalizálásával generálunk független állapotokat, ami a gömbön impulzusmomentum sajátállapotokat ad. A Gaffnian kvázilyuk szektor állapotainak impulzusmomentumát a 4.3. táblázat sorolja fel.

A másik oldalon, $2Q < 5N/2 - 4$ fluxus esetén kvázirészecskéket várunk, azonban ezek kvantumszámait nem ismertek, mivel a Gaffnian kvázirészecskéknél nem ismert a konkrét függvényalakja. Ezért nem egyértelmű, hogy $\mathcal{H}^{(3)}$ hány alacsonyenergiás állapotát kell kvázirészecskének tekintenünk.

A kompozit fermion alapállapotot $\nu = 2/5$ -nél az (1.4) adja meg $m = 2$ betöltött fermionszint esetében. A fluxus, amelynél $\Psi_{2/5}^{\text{KF}}$ előfordul, a Gaffnianhoz hasonlóan $2Q = 5N/2 - 4$. Ha $2Q$ -t n egységgel megnöveljük, $2n$ KF kvázilyuk számára van hely a második KF Landau-szinten, míg ha n egységgel csökkentjük, $2n$ KF kvázirészecske kerül a harmadik KF Landau-szintre. Ezek jelölése rendre $\Psi_{2-\text{kly}}^{\text{KF}}$, $\Psi_{4-\text{kly}}^{\text{KF}}$, $\Psi_{2-\text{kr}}^{\text{KF}}$, $\Psi_{4-\text{kr}}^{\text{KF}}$, stb. Az impulzusmomentumaikat a 4.3 táblázatban megadjuk. A KF és a Gaffnian model csak legalább négy kvázilyuk esetén ad különböző predikciót; itt a Gaffnian kvázilyuk szektora népesebb.

A tiltott sáv

Véges rendszerekben mind a Gaffnian modell-kölcsönhatás, mind a Coulomb-kölcsönhatás (melynek alacsonyenergiás fizikáját a KF elmélet jól írja el) tiltott sávolt jósol. Felvetődik a kérdés, megőrződik-e a gap termodinamikai határesetben. Mikroszkópikusan az állapot egy jóldefiniált Hamilton-operátor maximális sűrűségű nulla energiájú állapota; a fluxust változtatva a kvázilyukak irányába a legalacsonyabb energia nulla marad, a kvázirészecskék irányába véges lesz, ami a kémiai potenciál ugrását jelzi $\nu = 2/5$ -nél, azaz tiltott sáv meglétét. A kérdést numerikusan vizsgáljuk. A Gaffnian modellnek két pozitív paramétere van, A és B , melyek relatív erősségének hangolásával a tiltott sáv hangolható. A 4.14. ábra mutatja a töltött gerjesztés gapjének extrapolációját a termodinamikai határesetre, a következő definíció szerint:

$$\frac{E\left(\frac{5N}{2} - 3\right) + E\left(\frac{5N}{2} - 5\right) - 2E\left(\frac{5N}{2} - 4\right)}{2} = \frac{E\left(\frac{5N}{2} - 5\right)}{2}, \quad (4.17)$$

ahol $E(2Q)$ a Gaffnian modell alapállapot energiája $2Q$ fluxus mellett. A gap méretfüggése jelentős. Lineáris extrapoláció működik $B/A \leq 5$ esetben, és véges tiltott sávot jósol a

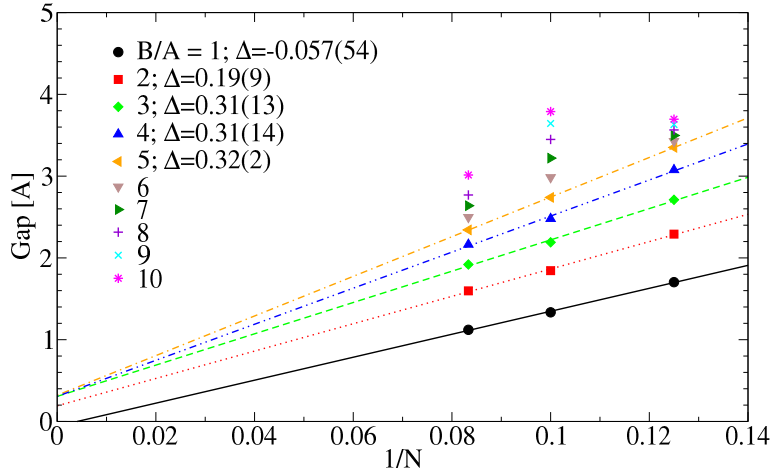
N	$2Q$	Állapot	Kompozit fermion sáv	Gaffnian sáv
6	9	4 kr	0	ismeretlen
6	10	2 kr	1, 3	ismeretlen
6	12	2 kly	1, 3	1, 3
6	13	4 kly	0, 2, 4	$0^2, 2^2, 3, 4^2, 6$
8	14	4 kr	2	ismeretlen
8	15	2 kr	0, 2, 4	ismeretlen
8	17	2 kly	0, 2, 4	0, 2, 4
8	18	4 kly	0, 2, 3, 4, 6	$0^2, 2^3, 3, 4^3, 5, 6^2, 8$
10	19	4 kr	0, 2, 4	ismeretlen
10	20	2 kr	1, 3, 5	ismeretlen
10	22	2 kly	1, 3, 5	1, 3, 5
10	23	4 kly	$0, 2^2, 4^2, 5, 6, 8$	$0^2, 2^4, 3, 4^4, 5^2, 6^3, 7, 8^2, 10$
7	12	3 kr	1, 3	ismeretlen
7	13	1 kr	$\frac{5}{2}$	ismeretlen
7	14	1 kly	2	2
7	15	3 kly	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$
9	17	3 kr	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$	ismeretlen
9	18	1 kr	3	ismeretlen
9	19	1 kly	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
9	20	3 kly	0, 2, 3, 4, 6	0, 2, 3, 4, 6
11	22	3 kr	0, 2, 3, 4, 6	ismeretlen
11	23	1 kr	$\frac{7}{2}$	ismeretlen
11	24	1 kly	3	3
11	25	3 kly	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

4.3. táblázat. A kompozit fermion és a Gaffnian modell alacsonyenergiás gerjesztéseinek impulzuszómomentumai a gömbön. Páros N esetén a fluxus $2Q = 5N/2 - 6$ (négy kvázirészecske) és $2Q = 5N/2 - 2$ (négy kvázilyuk) között változik, páratlan N esetén $2Q = 5N/2 - 11/2$ (három kvázirészecske) és $2Q = 5N/2 - 5/2$ (három kvázilyuk) között.

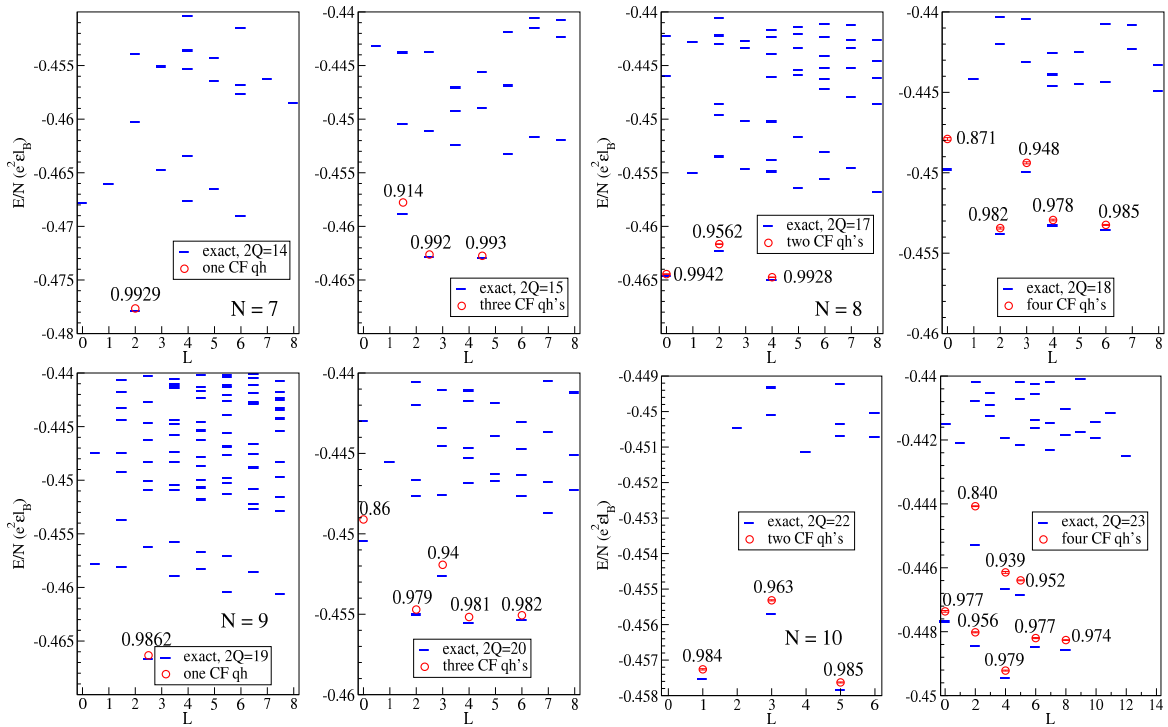
$3 \lesssim B/A \lesssim 5$ tartományban. Megjegyezzük azonban, hogy az illesztés csak három ponton alapul, ezért a konkluzivitása kétségbe vonható. A topologikus jelleget meghatározó fonási statisztikának csak akkor van értelme, ha a tiltott sáv véges a termodinamikai rendszerben. Ha nem, de a gap $1/N$ szerint tűnik el, van olyan nagy véges rendszer, amelyben még mindig használható. Az alábbiakban mindig véges (kicsi) rendszerekkel foglalkozunk, ahol a tiltott sáv léte nem kérdéses.

A kompozit fermion kvázilyukak

A 4.15. ábra mutatja a Coulomb kölcsönhatás spektrumát $N = 7$ -től $N = 10$ részecskéig; ha N páros, a kvázilyukak száma kettő és négy, ha páratlan, egy és három. Jól látható, hogy egyes állapotok a többtől elszakadva alacsonyenergiás sávot alkotnak, amit most Coulomb kvázilyuk sávnak nevezünk. Ezen állapotok kvantumszámait pontosan megegyeznek a KF elmélet jóslatával (4.3. táblázat). A 4.15. ábra összehasonlítja a KF állapotok energiáját az egzakt Coulomb állapotok energiájával, valamint feltünteti a megfelelő állapotok átfedését. A KF elmélet láthatóan mind kvalitatíve, mind kvantitatíve pontos leírását adja a kvázilyukaknak.



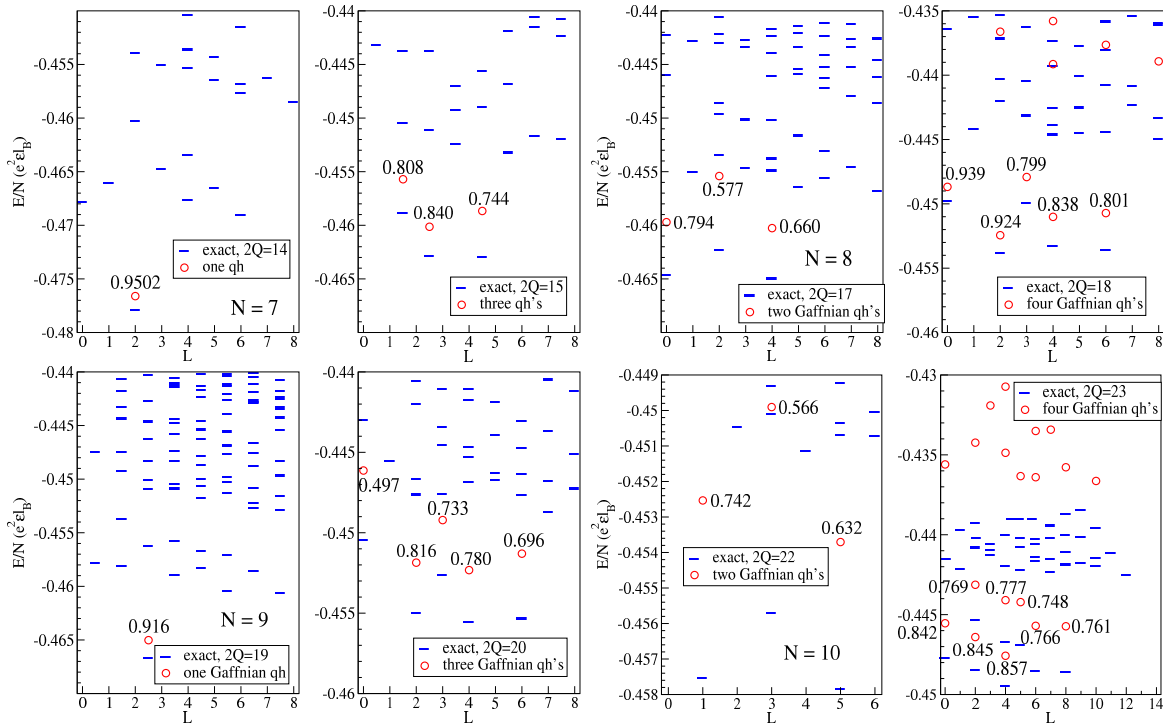
4.14. ábra. A töltött gerjesztések gapje Gaffnian modellben a rendszerméret és a modellkölcsönhatás B/A paramétere függvényében. Azokban az esetekben, ahol a lineáris extrapoláció plauzibilis, megadjuk az extrapolált értéket is.



4.15. ábra. A kompozit fermion kvázilyuk állapotok energiájának és az egzakt Coulomb spektrumnak összehasonlítása $N = 7 - 10$ részecskére. A KF állapotok mellett a megfelelő egzakt állapottal vett átfedés négyzetét adjuk meg. Tíz részecskénél a Lánczos algoritmus használata miatt csak a spektrum alsó része ismert.

A Gaffnian kvázilyukak

A Gaffnian modell négy kvázilyuk esetében több állapotot jósol, mint a KF modell (4.3. táblázat), mely utóbbi a Coulomb kvázilyukak számát helyesen határozza meg (4.15. ábra). A 4.16. ábra megadja az egzakt Coulomb állapotok átfedését a Gaffnian kvázilyukakkal; négy kvázilyuk esetére lásd a 4.4 táblázatot, amely a *kumulatív átfedést* adja meg a Gaffnian kvázilyuk szektor és az azonos számú legalacsonyabb Coulomb állapot között; a pontos definíciót lásd az ábrafeliratban. (Négy kvázilyuk esetén a 4.16. ábra csak azon állapotokra adja meg az átfedést, amelyek kvalitatíve követik a Coulomb kölcsönhatás alsó sávját.) Ahogy az összehasonlíthatatlan állapottól eltávolodunk, a Gaffnian kvázilyukak átfedése gyorsabban romlik, mint a megfelelő KF kvázilyukaké. A 4.16. ábra összehasonlítja továbbá a Gaffnian állapotok és az egzakt állapotok energiáját. Az előbbit úgy kapjuk, hogy a Coulomb kölcsönhatást diagonalizáljuk a Gaffnian kvázilyukak bázisában adott impulzusmomentumnál.



4.16. ábra. A Gaffnian kvázilyuk állapotok Coulomb energiájának és az egzakt Coulomb spektrumnak összehasonlítása $N = 7 - 10$ részecskére. A Gaffnian állapotok mellett a megfelelő egzakt állapottal vett átfedés négyzetét adjuk meg. Tíz részecskénél a Lánczos algoritmus használata miatt csak a spektrum alsó része ismert.

Tisztán a Gaffnian modellen belül tekintve nem zárható ki, hogy a kvázilyuk szektor eltérése a Coulomb kölcsönhatás alacsony energiás állapotaitól végesméret-effektus, amely nagyobb rendszerekben megszűnik; azonban a KF állapotok jó egyezése az egzakt Coulomb állapotokkal független a rendszermérettől, ezért ez az eshetőség nem plauzibilis.

Átmenet a két modell között

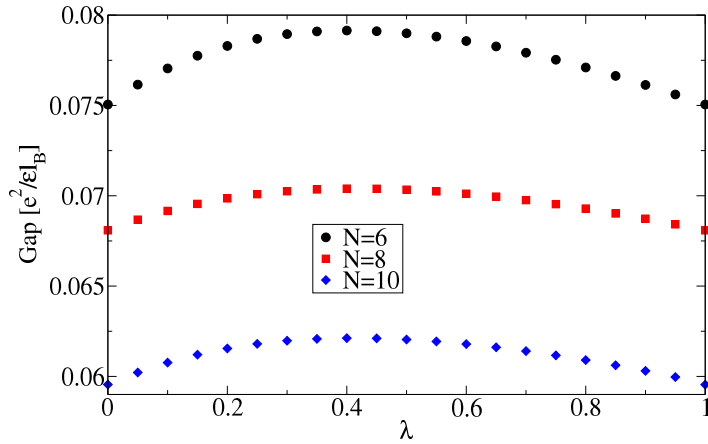
A két modell kapcsolatát megvilágítandó tekintjük az alábbi Hamilton-operátort:

$$\mathcal{H}_\lambda = \lambda \mathcal{H}^{(3)} + (1 - \lambda) \mathcal{V}_{\text{Coulomb}}, \quad (4.18)$$

N	$L = 0$	2	3	4	5	6	7	8	10
6	0.940	0.930	0.262	0.685	-	0.620	-	-	-
8	0.470	0.356	0.799	0.613	0.205	0.674	-	0.465	-
10	0.670	0.490	0.004	0.499	0.682	0.490	0.003	0.560	0.467

4.4. táblázat. Kumulatív négyzetes átfedés a négy Gaffnian kvázilyukat tartalmazó sáv és a Coulomb kölcsönhatás legalacsonyabb energiájú állapotai között $2Q = 5N/2 - 2$ fluxusnál. Adott L mellett a $\sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} |\langle \Psi_{4\text{-kly},i}^G | \Psi_{4\text{-kly},j}^C \rangle|^2 / \mathcal{N}$ mennyiséget adjuk meg, ahol $\mathcal{N}$ a $\mathcal{H}^{(3)}$ degenerált multipllettjének számossága L -nél (4.3. táblázat), és $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$. $\Psi_{4\text{-kly},j}^C$ a Coulomb kölcsönhatás legalsó $\mathcal{N}$ állapota.

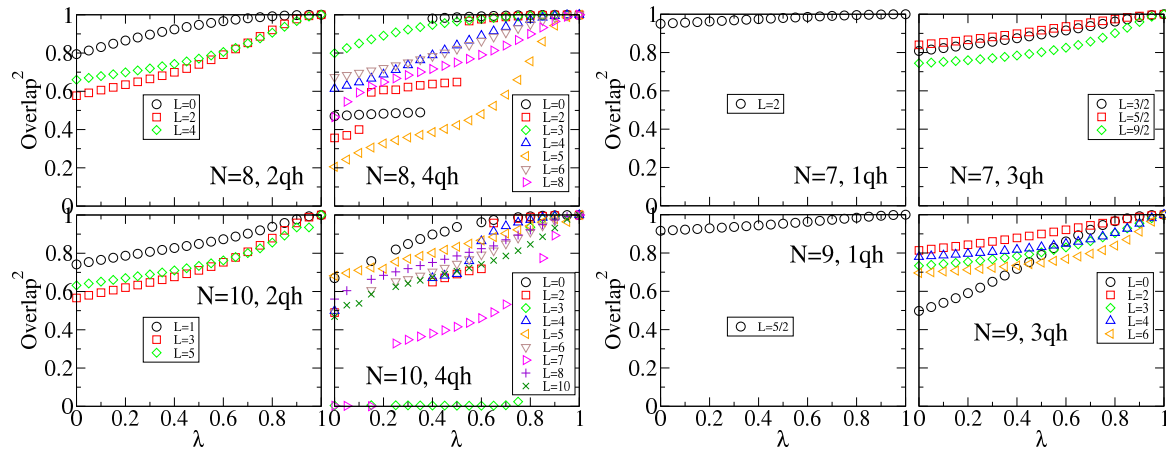
amely a $\mathcal{H}^{(3)}$ Gaffnian modell-kölcsönhatás és a Coulomb-kölcsönhatás között interpolál. Az egyszerűség kedvéért legyen $A = B$, és a két kölcsönhatás skáláját oly módon hangoljuk össze, hogy megköveteljük, hogy a semleges gerjesztések gapje legyen azonos [346] $\lambda = 1$ és $\lambda = 0$ esetén (Coulomb esetben ez a KF roton energiája [294, 387]). Amint a 4.17. ábrán látható, a gap λ hangolásával nem záródik; a közbenső tartományban még kicsit erősebb is lesz. Ez mutatja, hogy legalábbis véges rendszerek esetében a Gaffnian állapot folytonosan megy át a Coulomb/KF alapállapotba, és azt sugallja, hogy ez a termodinamikai limeszben is így van ha a Gaffnian modell tiltott sávja megmarad ebben a limeszben.



4.17. ábra. A $\mathcal{H}_\lambda$ kevert kölcsönhatás gapje $N = 6, 8, 10$ részecskére λ függvényében. A Gaffnian modell-kölcsönhatásban $A = B$, és a két kölcsönhatás skáláját oly módon hangoljuk össze, hogy megköveteljük, hogy a semleges gerjesztések gapje legyen azonos $\lambda = 1$ és $\lambda = 0$ esetén.

A 4.18. ábra mutatja a Gaffnian kvázilyukak fejlődését λ függvényében. A Gaffnian kvázilyuk sáv kumulatív átfedését mutatjuk a $\mathcal{H}_\lambda$ megfelelő számú alsó állapotával adott impulzusmomentumnál. Egy-három kvázilyuk esetén az átfedés λ csökkenésével folytonosan csökken. Négy kvázilyuk esetében a csökkenés gyorsabb, és időnként ugrásszerű. Ezek a diszkontinuitások szintkeresztezéseknek felelnek meg a spektrumban λ függvényében. A 4.16. ábrán látható, hogy a Gaffnian kvázilyuk állapotok némelyike nagyon magas energiára kerül, amint a kölcsönhatás a Coulombhoz közelít, és egy felső alsávot hoz létre.

Kis rendszereinkből nem lehet egyértelműen kijelölni a Gaffnian modell érvényességi tartományát, bár úgy tűnik, az a tartomány $\lambda = 1$ közelében, ahol a Gaffnian kvázilyukak átfedése nagy az egzakt állapotokkal viszonylag szűk.



4.18. ábra. A Gaffnian kvázilyukak átfedése a H_λ kevert kölcsönhatás megfelelő legsős állapotaival, páros N esetén kettő és négy, páratlan N esetén egy és három kvázirészecske esetében. $\lambda = 0$ a tisztán Coulomb, $\lambda = 1$ a tisztán Gaffnian kölcsönhatás. Négy kvázirészecskenél a kumulatív átfedés definícióját lásd a 4.4. táblázat feliratában. Néhány pont hiányzik, mert a Lánczos algoritmus nem konvergált.

Tartalmazza-e a Gaffnian modell a kompozit fermionokat?

Mivel a Gaffnian modell kvázilyuk állapotai minden impulzusmomentumnál többen vannak, mint a KF kvázilyukak, felvetődik a kérdés, hogy ez utóbbiak benne vannak-e a Gaffnian modell kvázilyuk szektorában. Azt állítjuk, hogy kvalitatív értelemben igen.

N	$L = 0$	1	2	3	4	5
6	-	0.777(2)	-	0.696(2)	-	-
8	0.818(1)	-	0.701(2)	-	0.653(1)	-
10	-	0.769(5)	-	0.676(6)	-	0.621(6)

4.5. táblázat. Négyzetes átfedés $|\langle \Psi_{2-\text{kly},j}^G | \Psi_{2-\text{kly},i}^{\text{KF}} \rangle|^2$ a KF kvázilyukak és a Gaffnian kvázilyukak között $2Q = 5N/2 - 3$ fluxusnál (két kvázilyuk).

A Coulomb-kölcsönhatás a Gaffnian kvázilyuk sávot két alsávra bontja (4.16. ábra jobb széle); az alsó sáv állapotai azonos kvantumszámnál azonos számossággal fordulnak elő, mint a KF kvázilyukak. A 4.5. és 4.6. táblázatokban megadjuk a KF állapotok és az azonos impulzusmomentumnál előforduló Gaffnian kvázilyukak átfedését két és négy kvázilyuk esetében. Az átfedések alacsonyabbak, mint az alapállapotok átfedése (4.2. táblázat). Nincs lényeges javulás a rendszerméret növelésével, de a kvázilyukak számának növelésével mutatkozik egy enyhe növekedés. A Gaffnian kvázilyukak degenerációja két részből áll [359, 383]: részben a kvázilyukak pozíciójával kapcsolatos, részben a zero módusok topológiájával. Ha a kvázirészecskepozíciókat rögzítjük, az utóbbi megmarad, és csak a kvázilyukak számától függ, nem a rendszermérettől. Ez alapján úgy tűnik, a zero módusok topologikus degenerációja határozza meg, milyen mértékben tartalmazza a Gaffnian kvázilyuk sáv a kompozit fermionokba épített korrelációkat. Mindenesetre úgy tűnik, a Coulomb kölcsönhatás destabilizálja a Gaffnian kvázilyuk sávot, kiválasztva onnan a helyes korrelációt tartalmazó állapotokat, ezáltal megváltoztatva a tényleges elemi gerjesztések karakterét.

N	$L = 0$	2	3	4	5	6	8
6	0.939(10)	0.926(5)	-	0.906(2)	-	-	-
8	0.984(6)	0.896(3)	0.921	0.872(2)	-	0.880(2)	-
10	0.857(8)	0.85(1)	-	0.843(4)	0.845(4)	0.807(8)	0.823(2)
		0.876(8)		0.862(6)			

4.6. táblázat. Kumulatív négyzetes átfedés a Gaffnian kvázilyuk szektor és a kompozit fermion állapotok között $2Q = 5N/2 - 2$ fluxusnál (négy kvázilyuk). Adott L mellett a $\sum_j^N |\langle \Psi_{4-\text{kly},j=1}^G | \Psi_{4-\text{kly},i}^{\text{KF}} \rangle|^2$ mennyiséget adjuk meg (i rögzített), ahol $\mathcal{N}$ a $\mathcal{H}^{(3)}$ degenerált multipliettjének számossága L -nél (4.3. táblázat).

Konklúzió

A gerjesztések jellegének kvalitatív megváltozása a kölcsönhatás folytonos hangolásával tulajdonképpen nem meglepő. Sokszorosan degenerált sávban egy enyhe perturbáció is nem-perturbatív hatással lehet. Példa erre a TKHE maga: amíg kölcsönhatás nélkül a részlegesen betöltött legalacsonyabb Landau-szint erősen degenerált, a Coulomb kölcsönhatás megjelenése bármilyen kis csatolási állandóval tiltott sávot nyit $\nu = m/(2pm \pm 1)$ betöltéseknél. (Valódi mintában persze a kölcsönhatás a rendezetlenséggel verseng.) Az átalakulás topologikus, ami az elemi gerjesztések tulajdonságaiban (tört töltés, tört fonási statisztika) nyilvánul meg.

Mi ezt a jelenséget a Gaffnian modell esetében mutattuk meg, amely pontosan adja vissza az alapállapotot $\nu = 2/5$ -nél az egzakt diagonalizációval tanulmányozható kis rendszerekben, de a gerjesztéseket rosszul írja le. Az általános tanulság, ami talán nem meglepő, hogy egy modell érvényességéhez nem elegendő az alapállapot összehasonlítása az egzakt alapállapottal, mert egymással nagy alapállapotú átfedést mutató modellek gerjesztései lényegesen különbözhetnek.

4.7. Érvényes-e a Luttinger-tétel a kompozit fermionok Fermi-tenger állapotára?

A közelmúltban Kamburov *et al.* [13] nagy pontossággal meghatározták a kompozit fermionok Fermi-hullámszámát periodikus a külső sűrűségmodulációval való kommenzurabilitás okozta rezonancia mérésén keresztül. A korábbi hasonló mérésekhez képest jóval több ilyen oszcillációt figyeltek meg, és a kompozit fermionok Fermi-tengere (KFFT) állapot eddigi legpontosabb megerősítését nyújtották. A mérésük rendkívüli pontossága felvet egy érdekes kérdést. A legalacsonyabb Landau-szinten lévő elektronok esetében két ekvivalens kiindulópontot vehetünk fel: tekinthetünk elektronokat ν betöltési számnál vagy lyukakat $1 - \nu$ betöltési számnál. (Feltételezzük, a minta teljesen spinpolarizált.) Elektronokból vagy lyukakból kiindulva egyaránt konstruálhatunk kompozit fermionokat; jelölje a két megközelítéssel kapott effektív részecskéket ${}^e\text{KF}$ ill. ${}^l\text{KF}$. Ezek $B^* = B - 2\rho\phi_0$ effektív mágneses teret érzékelnek, ahol ρ a kompozit fermionok sűrűsége. (A kompozit fermionokhoz társított mennyiségeket csillaggal jelöljük.) $\nu \neq 1/2$ esetén a ${}^e\text{KF}$ -ek és a ${}^l\text{KF}$ -ek sűrűsége különböző, ezért *átlagtérelméleti leírásban* különböző Fermi-hullámszámok tartoznak hozzájuk; teljes spinpolarizációt feltételezve:

$$\begin{aligned} {}^e\text{KFFT átlagtérelmélete: } k_F^* &= \sqrt{4\pi\rho_e} \iff k_F^*\ell = \sqrt{2\nu}, \\ {}^l\text{KFFT átlagtérelmélete: } k_F^* &= \sqrt{4\pi\rho_{ly}} \iff k_F^*\ell = \sqrt{2(1-\nu)}, \end{aligned}$$

ahol az elektron- és lyuksűrűségek $\rho_e = \rho_\nu = \nu/(2\pi\ell^2)$ és $\rho_{1-\nu} = \rho_{1-\nu} = (1-\nu)/(2\pi\ell^2)$. Felvetődik a kérdés, hogy adott ν esetén $^e\text{KFFT}$ és $^l\text{KFFT}$ különböző állapotok, vagy egyazon állapot különböző leírásai? Az első esetben a két állapot melyike valósul meg a valós rendszerekben? A második esetben hogyan egyeztetjük össze az átlagtérelmélet látszólag inkompatibilis következményeit, és hogyan értsük meg azt, hogy Luttinger tétele sérül legalább az egyik esetében? Ez utóbbi szerint Landau-Fermi folyadékokban a Fermi-gömb térfogata invariáns a kölcsönhatás bekapcsolására, ha nem lépünk át fázishatárt [388]. E tétel sérülése a nem-Fermi-folyadék viselkedés egyik jele, ezért sokan vizsgálták [389–394], érvényben marad-e különféle erősen korrelált rendszerekben. A KFFT állapot persze nem áll adiabatikus összeköttetésben szabad Fermi-rendszerrel, de az átlagtérelméleti és a tényleges Fermi-momentum eltérése szignifikáns. Mindkét esetben felvetődik a kérdés, hogy mi a szerepe a részecske-lyuk szimmetriának a legalacsonyabb Landau-szinten. Végül, mi a magyarázata Kamburov *et al.* [13] eredményének, hogy a mért Fermi hullámszám a kisebb Fermi-tengerrel konzisztens, azaz $k_F^*\ell = \min[\sqrt{2\nu}, \sqrt{2(1-\nu)}]$?

A fenti eredmények két elméleti álláspontot hoztak létre. Son [395] szerint a kompozit fermionok Dirac-fermionok, és mind a TKH állapotoknak, mind a Fermi-tengernek lehetséges részecske-lyuk szimmetrikus leírása. Barkeshli, Mulligen és Fisher [396] szerint $^e\text{KFFT}$ és $^l\text{KFFT}$ az elektrongáz különböző állapotai; a legalacsonyabb Landau-szintre megszorított részecske-lyuk szimmetria spontán sérül és kiválasztja az egyiket. A kompozit fermionok Chern-Simons elmélete szerint [52, 53] az átlagtérelméleti Fermi-hullámszám $k_F^{*\text{MF}}\ell$ nem változik a Coulomb- és a mértéktér-kölcsönhatás perturbációs számításának egyik rendjében sem, ami arra utal, hogy $^e\text{KFFT}$ és $^l\text{KFFT}$ nem állnak perturbatív kapcsolatban egymással, azaz topologikusan különbözők $\nu \neq 1/2$ esetén, és ennél fogva $\nu = 1/2$ esetben is. A Chern-Simons elmélet azonban nem tartalmazza az állapotoknak a legalacsonyabb Landau-szintre való megszorítását, és ezért nem érvényes rá a részecske-lyuk szimmetria [395, 397].

Mi a kompozit fermionok Fermi-hullámszámát a mikroszkópikus hullámfüggvények kiértékelésével határozzuk meg. Ez az elmélet expliciten a legalacsonyabb Landau-szinten marad, teljesíti a részecske-lyuk szimmetriát, és nem feltételezi eleve $k_F^*\ell$ valamilyen értékét. Megmutatjuk, hogy a párkorrelációs függvény Friedel-oszcillációiból számolt $k_F^*\ell$ értéke megegyezik ν -nél és $1-\nu$ -nél. Expliciten kiszámoljuk $k_F^*\ell$ -t számos betöltési számnál $\nu = 1/2$ és $\nu = 1/4$ közelében.

A párkorrelációs függvényre a Friedel-oszcillációk következő alakját illesztjük [398]:

$$g(\mathbf{r}) = 1 + A(r\sqrt{4\pi\rho_e})^{-\alpha} \sin(2k_F^*r + \theta) \quad (4.19)$$

ahol A , α , k_F^* és θ illesztési paraméterek. A részecske-koordináták jelölése $\mathbf{r}_j$ vagy $z_j = x_j - iy_j$; legyen $\ell = 1$. Legyen ϕ_ν egy homogén sűrűségű állapot hullámfüggvénye ν betöltési számnál. A párkorrelációs függvény definíciója

$$g_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_\nu^{-2} \langle \phi_\nu | \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) | \phi_\nu \rangle, \quad (4.20)$$

$$|\phi_\nu\rangle = \frac{1}{N!} \int \prod_{j=1}^N d^2\mathbf{r}_j \phi_\nu(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_{k=1}^N \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_k) |0\rangle \quad (4.21)$$

ahol $\phi_\nu(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ a hullámfüggvény, $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_{0m}(\mathbf{r}) c_m$ az elektron megsemmisítő téroperátor a legalacsonyabb Landau-szinten, $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ a megfelelő keltő operátor, η_{0m} az (1.7) egyenletben definiált. Az $1-\nu$ -nél érvényes részecske-lyuk konjugált hullámfüggvény

$$|\phi_{1-\nu}\rangle = \frac{1}{N!} \int \prod_{j=1}^N d^2\mathbf{r}_j \phi_\nu^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_{k=1}^N \hat{\Psi}(\mathbf{r}_k) |1\rangle, \quad (4.22)$$

ahol $|1\rangle$ a teljesen betöltött Landau-szint hullámfüggvénye. Ha feltételezzük a Landau-szinten belüli részecske-lyuk szimmetriát, akkor $\langle 1|f(c_m, c_m^\dagger)|1\rangle = \langle 0|f(c_m \rightarrow c_m^\dagger, c_m^\dagger \rightarrow c_m)|0\rangle$. Behelyettesítve a párkorrelációs függvény definíciójába,

$$g_{1-\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_{1-\nu}^{-2} \langle \phi_\nu | \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) | \phi_\nu \rangle \quad (4.23)$$

A legalacsonyabb Landau-szintre vetített Dirac-delta [399, 400], azaz

$$\bar{\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - zz'^* + z'z^*)\right), \quad \bar{\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\bar{\delta}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]^* \quad (4.24)$$

felhasználásával azt kapjuk, hogy $\{\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\} \equiv \bar{\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\langle \phi_\nu | \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') | \phi_\nu \rangle = \nu \bar{\delta}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, és $\langle \phi_\nu | \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') | \phi_\nu \rangle = (1 - \nu) \bar{\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Elemi algebrai átalakítások után, feltételezve a termodinamikai határesetet és az eltolás-invarianciát, $\mathbf{r}' = 0$ választásával belátható, hogy

$$g_{1-\nu}(r) = \frac{(1 - 2\nu)(1 - e^{-r^2/2}) + \nu^2 g_\nu(r)}{(1 - \nu)^2} \quad (4.25)$$

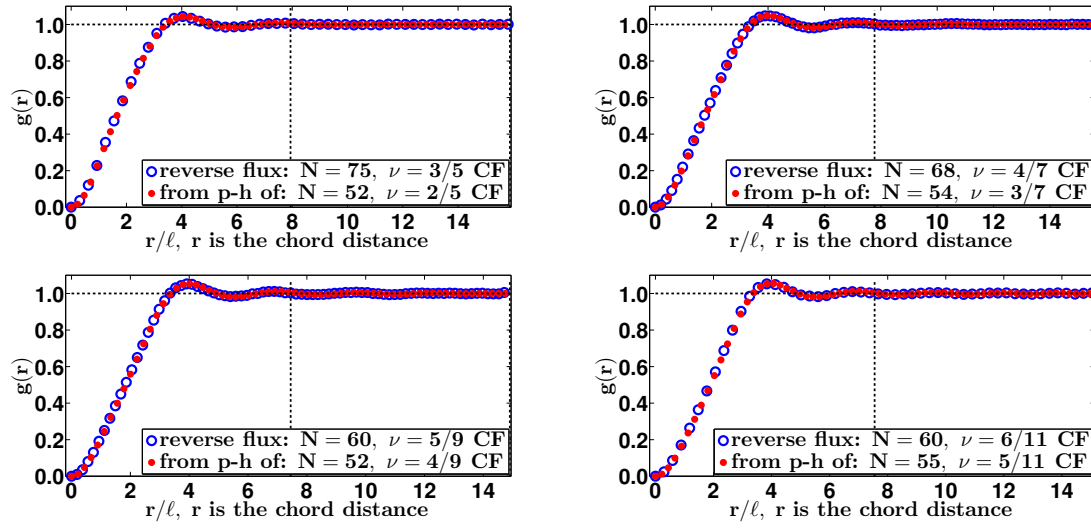
ahol feltételeztük, hogy a mágneses hossz azonos ν és $1 - \nu$ esetén. Ha $r \gg 1$, ez az összefüggés leegyszerűsödik: $g_{1-\nu}(r) = 1 + (\nu/(1 - \nu))^2 (g_\nu(r) - 1)$. Fontos, hogy a $\sin(2k_F^* r)$ oszcilláló rész g_ν -ben azonos hullámszámú oszcillációkat implikál $g_{1-\nu}$ -ben, ezért a ν -nél és $1 - \nu$ -nél előforduló állapotok $k_F^* \ell$ Fermi-hullámszáma megegyezik.

Következőnek $k_F^* \ell$ értékét határozzuk meg $g(r)$ oszcillációból [313, 398] módszerével, a mikroszkópikus hullámfüggvények [(1.4) és (1.5) egyenletek] felhasználásával $\nu = 1/2$ környékén. Úgy tűnhet, a fenti dichotómia fennáll a mikroszkópikus hullámfüggvények esetében is, amit $\nu = (n + 1)/(2n + 1)$ törtnél illusztrálunk. Kétféleképpen konstruálhatunk hullámfüggvényt a kompozit fermion-elméletre alapozva ennél a betöltésnél: (i) a $^{\text{ly}}\text{KF}$ -ek $\nu^* = n$ egész kvantált Hall állapotaként pozitív B^* mellett, azaz a hullámfüggvény $C_{\text{p-h}} \mathcal{P}_{\text{LLL}} J^2 \Phi_n$, ahol $C_{\text{p-h}}$ a részecske-lyuk konjugációt jelöli, és (ii) mint $^{\text{e}}\text{KF}$ -ek $\nu^* = n + 1$ egész kvantált Hall állapotaként negatív B^* mellett, azaz a hullámfüggvény $\mathcal{P}_{\text{LLL}} J^2 [\Phi_{n+1}]^*$. Ezek különböző állapotoknak tűnnek, és feltehető a kérdés, melyik érvényes a tényleges rendszerben. Explicit számolások [57, 63] azonban megmutatták, hogy e két leírás ugyanazt az állapotot reprezentálja, azaz alapállapotra és a gerjesztésekre azonos kvantumszámokat adnak, és a két hullámfüggvény átfedése szinte tökéletes⁴. A 4.19. ábra összehasonlítja $g(r)$ -t a $\Psi_{(n+1)/(2n+1)}^{\text{KF}}$ és a $\Psi_{n/(2n+1)}^{\text{KF}}$ állapotokra, bizonyítja, hogy részecske-lyuk szimmetria köti össze őket. Ezért a $\Psi_{n/(2n+1)}^{\text{KF}}$ hullámfüggvények $n \rightarrow \infty$ határesetben mindkét oldalról ugyanazt a Fermi-tenger állapotot adják, mert $\Phi(B^* = 0)$ valós [401].⁵ A kompozit fermion hullámfüggvények nagy pontosságú részecske-lyuk szimmetriája összhangban van azzal, hogy ezek a legalacsonyabb Landau-szint egzakt Coulomb alapállapotainak nagyon pontos közelítései.

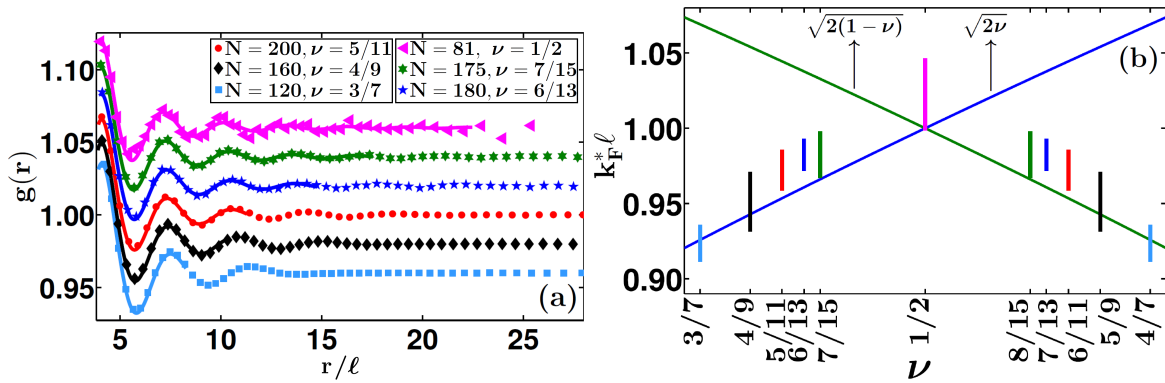
Ha a spin szabadsági fok releváns, a részecske-lyuk szimmetria ν és $2 - \nu$ betöltési számokat köti össze. Ekkor a $\nu = (n + 1)/(2n + 1)$ -nél fellépő TKH effektus értelmezése, mint $^{\text{e}}\text{KF}$ -ek $\nu^* = n + 1$ egész kvantált Hall effektusa negatív B^* -nél [1.5 egyenlet] megkerülhetetlenné válik; csak így értelmezhetők a nem teljesen spinpolarizált állapotok, pl. a spin-szinglett $\nu = 2/3$ -nél. Kiterjedt kísérleti [68–75, 97, 98, 262, 264, 265] és elméleti [21, 24, 57, 63–65, 67, 317, 402] irodalom igazolja ennek az értelmezésnek helyességét.

⁴P1. $\nu = 2/3$ esetében az egzakt Coulomb állapottal 10 részecske esetén 0.996 és 0.994 [63].

⁵Rezayi és Haldane [218] expliciten megkonstruálták a kompozit fermion Fermi-tenger hullámfüggvényeket a tóruszon, és $N = 16$ részecske esetén 0.9994 átfedést találtak annak részecske-lyuk konjugáltjával, és 0.9925 átfedést az egzakt Coulomb alapállapottal (amely részecske-lyuk szimmetrikus).

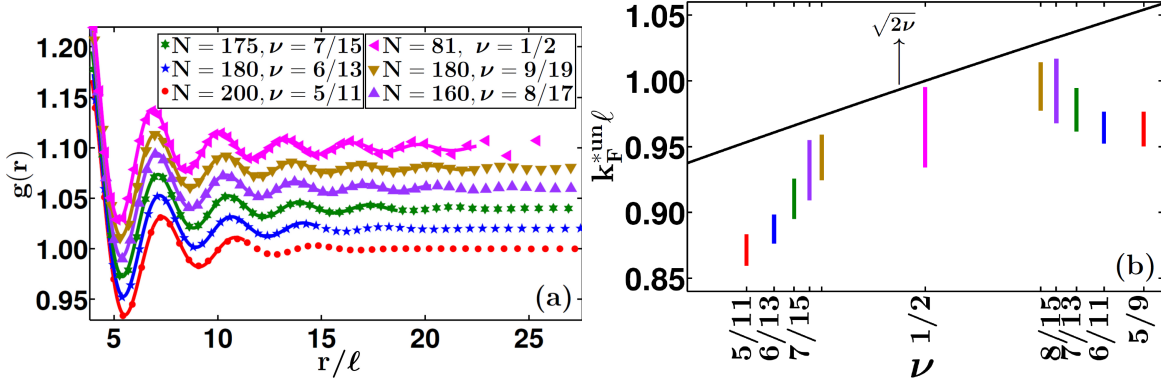


4.19. ábra. A $g(r)$ párkorreláció r/ℓ függvényében, ahol r a húrtávolság. A kék körök a $\Psi_{(n+1)/(2n+1)}^{\text{KF}}$ kompozit fermion hullámfüggvényen alapulnak $\nu = 3/5, 4/7, 5/9$ és $6/11$ betöltéseknél. A piros pöttyök $g(r)$ -t a $\Psi_{n/(2n-1)}^{\text{KF}}$ hullámfüggvény részecske-lyuk konjugáltjára mutatják. Felhasználtuk, hogy véges gömbre a (4.25) egyenlet a $g_{1-\nu}(r) = \frac{(2Q+1)(2Q+1-2N)}{(2Q+1-N)^2} \left(1 - \left[1 - \left(\frac{r_c}{2\sqrt{Q}\ell} \right)^2 \right]^{2Q} \right) + \left(\frac{N}{2Q+1-N} \right)^2 g_\nu(r)$ alakot ölti.



4.20. ábra. (a) A $g(r)$ párkorrelációs függvény r/ℓ változóban, ahol r a húrtávolság. A hullámfüggvényeket lásd az (1.4) egyeletben. A folytonos vonal a (4.19) alakot illeszti a kezdeti oszcillációkra. A görbéket 0.02 többszöröseivel eltoltuk (5/11 kivételével). (b) A $k_F^* \ell$ Fermi hullámszám termodinamikai határesetre extrapolált értéke ν függvényében. Feltüntettük a $\sqrt{2\nu}$ és $\sqrt{2(1-\nu)}$ átlagtér-értékeket is.

Mivel numerikus számolások sora igazolja, hogy $\Psi_{n/(2n\pm1)}^{\text{KF}}$ érvényes az összenyomhatatlan állapotokra [49, 50, 63, 290, 401, 403], *feltételezzük*, hogy tetszőlegesen nagy n esetében is érvényes marad, azaz hogy a $\nu = 1/2$ körüli gap nélküli régió kompozit fermionok fel nem bontott egész kvantált Hall állapotaiból áll. Nem tudjuk konklúzíven kizárni azt a lehetőséget, hogy $^e\text{KFFT}$ és $^l\text{KFFT}$ topologikusan különbözök, amint [396] javasolja, és a részecske-lyuk szimmetria spontán sérülése választ közülük. Mindenesetre az ismert tények megengedik, hogy a kompozit fermionok Fermi-tengere részecske-lyuk szimmetrikus legyen, ezért mi ennek tulajdonságait derítjük fel.

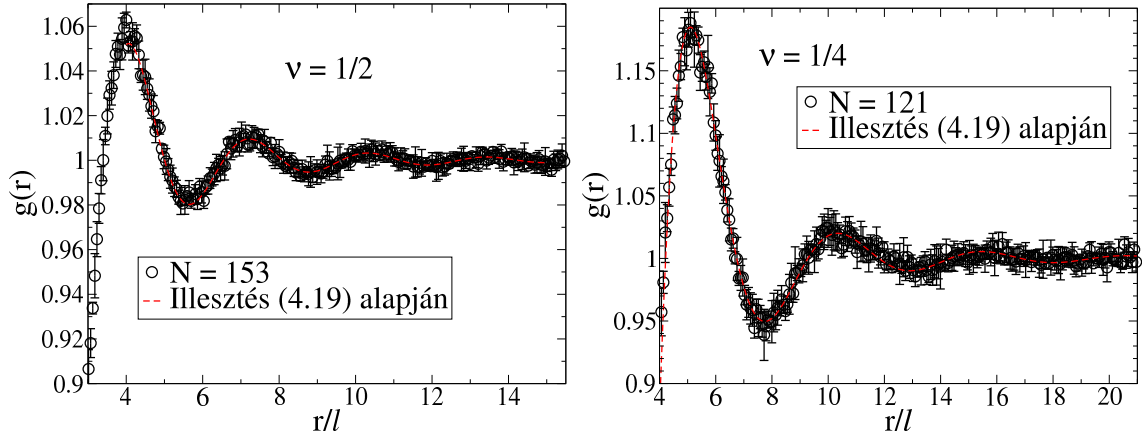


4.21. ábra. Mint a 4.20. ábra, de a vetítés nélküli $\Psi_{n/(2n\pm1)}^{\text{vn KF}}$ hullámfüggvényekre. Feltüntettük az elektronokra vonatkozó $\sqrt{2\nu}$ átlagtér-értékeket is.

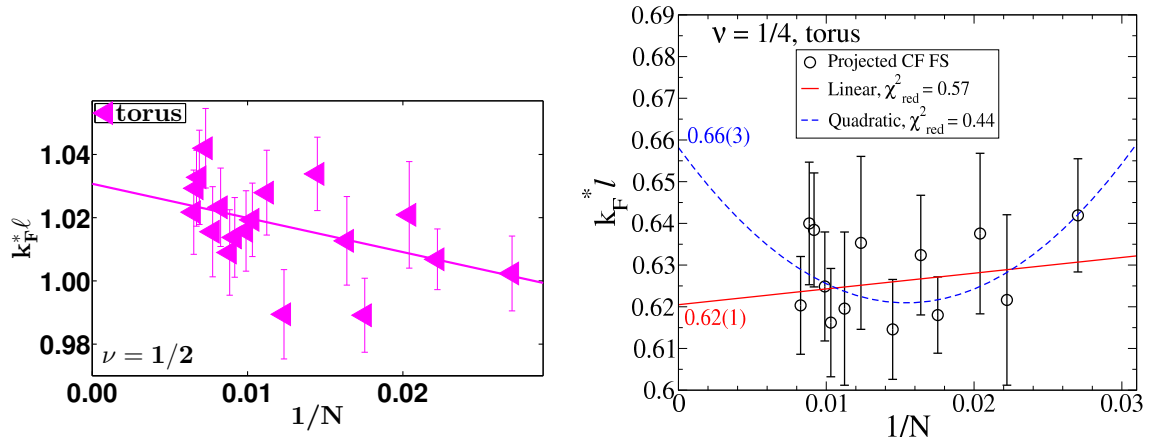
A párkorrelációs függvényt Monte Carlo módszerrel számoltuk 7/15-ig a $\nu = n/(2n+1)$ sorozatban, gömbi geometriában (1.4.1 szakasz), majd $N \rightarrow \infty$ extrapolációval kaptuk meg a síkon érvényes Fermi-hullámszámot. A legnagyobb rendszerek $g(r)$ függvényét mutatja a 4.20(a) ábra. Gappel rendelkező rendszerekben a párkorrelációs függvény $r \rightarrow \infty$ határesetben Gauss-függvény szerint cseng le, de van egy jóldefiniált oszcillációt mutató közbenső távolság-tartomány. Amikor $g(r)$ -re az (4.19) egyenletben megadott függvényt illesztjük, mind a nagyon kicsi, mind a nagyon nagy r -eket elkerüljük, a rövidtávú korrelációk ill. a görbületi effektusok miatt. Meglehetősen nagy rendszerek ($N > 100$) szükségesek $k_F^* l$ -nek a termodinamikai határesetre vett extrapolációjához. A 4.20(b) ábra az extrapolált értékeket mutatja. (A korábbiak alapján feltettük, hogy $k_F^* l$ megegyezik $\nu = (n+1)/(2n+1)$ -nél és $\nu = n/(2n+1)$ -nél.) A $k_F^* l$ -hez rendelt hiba magában foglalja az illesztés hibáját (lineáris és négyzetes függvény illesztése az $1/N$ függvényében vett görbékre), valamint a görbület hatását (a húron és főkörön mért távolságra egyaránt illesztettünk). A 4.20(b) ábra mutatja az átlagtérelméletből adódó $k_F^{\text{MF}} l = \sqrt{2\nu}$ és $k_F^{\text{MF}} l = \sqrt{2(1-\nu)}$ görbéket is $^e\text{KFFT}$ és $^l\text{KFFT}$ állapotokra.

$\nu = 1/2$ betöltésnél a gömbön technikai okokból nem tudunk $N > 81$ részecske fölé menni ($N = n^2$ a $B^* = 0$ melletti zárt héjú állapotokra), ezért tóruszon is kiértékeljük $k_F^* l$ -t [109, 113, 218] egészen $N = 153$ részecskéig. Az illesztésre példát mutat a 4.22. ábra. Az extrapolációt a termodinamikai határesetre a 4.23. ábra mutatja. $\nu = 1/2$ betöltésnél a lineáris extrapoláció $k_F^* l = 1.03(1)$ Fermi-momentumot ad. Ha a kvadrátikus extrapolációt is megengedjük, a tartomány $k_F^* l = 1.02 - 1.07$ lesz, ami konzisztens a gömbi eredményekkel. $\nu = 1/4$ betöltésnél $k_F^* l = 0.66(2)$ lineáris, és $k_F^* l = 0.61 - 0.69$ mindkét fajta extrapoláció megengedésével, ami ismét konzisztens a gömbbel.

Ha ν kissé tér el 1/2-től, a kapott $k_F^* l$ közel van, de nem egyezik meg pontosan $\sqrt{2\nu}$ és $\sqrt{2(1-\nu)}$ minimumával. Mind a $n/(2n\pm1)$ sorozatból számolt extrapoláció, mind a közvetlenül $\nu = 1/2$ -nél elvégzett számolás arra utal, hogy a KFFT területe $\nu = 1/2$ -nél kissé eltér



4.22. ábra. A Friedel-oszcillációk illesztése a tóruszon számolt párkorrelációs függvényre kompozit fermionok Fermi tengere állapotban $\nu = 1/2$ és $\nu = 1/4$ betöltéseknél. A legnagyobb számolt rendszert mutatom.



4.23. ábra. A Fermi-hullámszámok a kompozit fermionok Fermi tengere állapotban $\nu = 1/2$ és $\nu = 1/4$ betöltéseknél a rendszerméret függvényében.

az átlagtér-elmélet által implikálttól, azaz Luttinger tétele sérül ebben az esetben.

$\nu = 3/2$ -nél a KFFT állapot analóg viselkedést mutat $\nu = 1/2$ -vel [323, 404]. $\nu = 1/4$ környékén mind $n/(4n + 1)$, mind $n/(4n - 1)$ e KF-ekkel értelmezendő, ezért $k_F^* \ell \approx \sqrt{2\nu}$ várható, amit a kísérletek megerősítenek [13, 404]. Végül $\nu = 3/4$ -nél $k_F^* \ell \approx \sqrt{2(1 - \nu)}$.

Röviden kitérünk arra, mennyire robosztus a KFFT területe a Landau-szintek keveredésére. Ennek korrekt leírása lehetséges lenne pl. a diffúziós Monte Carlo módszerrel [405]. Ehelyett csak egy durva becslésre vállalkozunk: tekintjük a vetítés nélküli KF hullámfüggvényeket:

$$\Psi_{n/(2n \pm 1)}^{\text{vn KF}} = \prod_{j < k=1}^N J^2 \Phi_{\pm n},$$

melyeknek a legalacsonyabb Landau-szinten kívül is van valamekkora amplitudójuk [398, 406], és valószínűleg adiabatikus kapcsolatban vannak a levetített hullámfüggvényekkel (ez $\nu = 2/5$ esetében bizonyított [407]), és ezért a tényleges Coulomb alapállapottal. E függvényekre $g(r)$ azonos $\nu = n/(2n - 1)$ és $\nu = n/(2n + 1)$ esetében rögzített N -nél, ha a gömb sugarának függvényében ábrázoljuk; termodinamikai határesetben ebből következik, hogy

$$(k_F^{\text{vn KF}} \ell)_{\frac{n}{2n-1}} = \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{1/2} (k_F^{\text{vn KF}} \ell)_{\frac{n}{2n+1}} \quad (4.26)$$

A $k_F^{\text{vn KF}} \ell$ momentumokat a 4.21. ábra mutatja. Úgy tűnik, a $k_F^* \ell$ Fermi-hullámszám függ a Landau-szintek keveredésétől.

5. fejezet

A disszertáció tézispontjai

1. Kétrétegű grafénben vizsgáltuk a spektrum háromszöges torzulásának és az elektron-elektron kölcsönhatásnak viszonyát külső mágneses tér nélkül [16]. A kétsáv-modell keretein belül levezettük a renormálási csoport egyenleteket. Az alacsony energiájú fizikát néhány nem ismert mikroszkópikus konstans határozza meg a kétsáv-modell érvényességének felső határán. A kezdeti feltételek széles tartományában $C_{6v} \rightarrow C_{2v}$ szimmetriasértést találtunk, ami együtt jár az egyrészcskés spektrum topológiájának megváltozásával. Elsőrendű kvantum-fázisátalakulást jósoltunk az elektronsűrűség függvényében. Ez az átalakulás megfigyelhető a vezetőképesség hiszterézisén keresztül a sűrűség függvényében a töltésemlegességi pont közelében, ha a sűrűség kellő finomsággal hangolható.
2. Kiszámoltam a dőpolatlan kétrétegű grafén gerjesztési spektrumát a kvantált Hall tartományban átlagtér-közelítésben, ha a rétegek közötti potenciális energia-különbséget merőleges elektromos térrel hangoljuk [17]. A kollektív gerjesztései módus, amely az $n = 0, 1$ Landau-pályákat megőrző átmenetek páros lineáris kombinációjának felel meg, hosszúhullámú instabilitást okoz, amely a merőleges elektromos tér függvényében kompresszibilis tartományt illeszt be a két kvantált Hall ferromágnes közé. Kidolgoztam a nulla hőmérsékletű fázisdiagramot a mágneses tér és a rétegek közötti feszültség függvényében.
3. Kvantált Hall ferromágneses állapotokat vizsgáltam királis (rombos) többrétegű grafén (AB, ABC, ABCA, stb. pakolás) nulla energiájú Landau-szintjén [18]. Megmutattam, hogy a teljesen betöltött valencia-Landau-szintekkel vett kicserélődési kölcsönhatás figyelembe vételével a részecske-lyuk szimmetria fennáll, szemben a korlátozott átlagtér-közelítésben levezetett Hund-szabályokkal [152, 185–190]. Ha a ν betöltési szám egész, de nem többszöröse a rétegszámnak, pályakoherens állapotok alakulnak ki $U(1)$ szimmetriával. A pályakoherencia véges hőmérsékleten Berezsinszkij-Kosterlitz-Thouless típusú fázisátalakulás során tűnik el. E hőmérséklet alatt orbitális Goldstone módus megjelenése várható. Kétrétegnél $\nu = \pm 3, \pm 1$, ABCA négyrétegnél $\nu = \pm 2, \pm 6$ betöltéseknél a mágneses tér függvényében Ising-típusú átmenet történik egy $Z_2 \times U(1)$ szimmetriájú állapotba.
4. Megmutattam [19], hogy a grafén-hatszöges bór nitrid-grafén heterostruktúrákban megvalósított kétdimenziós elektrongáznak merőleges mágneses térben számos a rétegek között csatolt töltéssűrűség-hullám állapota van, és ennek a rendeződésnek kritikus hőmérséklete a kísérletileg elérhető tartományban van. Megadtam a nulla hőmérsékletű fázisdiagramot. Kiszámoltuk az elektronrendszer kompresszibilitását is ebben a tarto-

mányban. Ezek a jelenségek mind transzport-, mind kompresszibilitás-mérésekben tanulmányozhatók.

5. Grafénben, ahol a mérőleges mintavastagság hatása nem játszik szerepet, kiszámoltuk a tört kvantált Hall effektus spinpolarizációs fázisdiagramját a rendezetlenség elhanyagolásával, a Landau-szintek keveredése nélkül, illetve annak elsőrendű közelítésével [21]. Feldman *et al.* [265] kísérleti eredményei nagyszerűen egyeznek a Landau-szintek keveredése *nélküli* elmélettel, de az egyezés elromlik, ha elsőrendű perturbációs számítás-sal figyelembe vesszük ezt az effektust, ami elsősorban az elsőrendű közelítés korlátait mutatja. Kielemeztük az irodalomban a legalacsonyabb Landau-szintre történő vetítés módjainak pontosságát. Szigorúbb számolással megerősítettük [22] azt a korábbi eredményt [65], hogy a négyörvényes $\nu = m/(4m+1)$ állapotoknál nincsenek spinátmenetek, $\nu = m/(4m-1)$ betöltésnél ellenben lehetségesek.
6. Egzakt diagonalizáció és a kompozit fermion modell kombinációjával megmutattuk, hogy grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén a $\nu^{(1)} = m/(2m \pm 1)$ relatív betöltési szám sorozatba tartozó tört kvantált Hall állapotok teljesen spinpolarizáltak a Zeeman-energia értékétől függetlenül, ellentétben a $n = 0$ szint esetével [22]. Ezek az állapotok is jól leírhatók kompozit fermionokkal, de azok kölcsönhatása nem hanyagolható el; a teljes spinpolarizáció a kompozit fermionok közötti kicserélődési kölcsönhatás következményeként értelmezhető. Megbecsültük a Landau-szintek keveredésének hatását is; megmutattuk, hogy az alapállapot spinpolarizációján ez nem változtat.
7. Grafén $|n| = 1$ Landau-szintjén kiértékelünk három semleges gerjesztési módust a spinpolarizált tört kvantált Hall állapotokban $\nu^{(1)} = m/(2m \pm 1)$ relatív betöltésnél, a spinmegőrző excitonokét, a spin-fordító excitonokét, és a spinhullámokét [22]. Amíg a spinmegőrző excitonok diszperziója hasonló a $n = 0$ szintbeli állapotokéhoz, a spin-fordító excitonok a $|n| = 1$ szinten nem mutatnak Zeeman-energia közeli roton-minimumot, és a spinhullámok diszperziója nem megy a Zeeman-energia alá. Ez további érv az alapállapot teljes polarizációja mellett. A 6. tézissel kombinálva kétsége vontuk, hogy a tört kvantált Hall állapotok gyengülése döntött térrel elért nagy Zeeman-energia esetén Amet *et al.* kísérletében [266] spinátmenet kezdeteként lenne értelmezhető.
8. Kiértékelünk több erősen korrelált állapot energiáját grafén $|n| \leq 1$ Landau-szintjeinek feles és negyedek betöltésénél [20]. Mind a Pfaff-állapot, mind a „hollow-core” állapot biztonsággal kizárható. A kompozit fermionok Fermi-tengere típusú állapotok viszont relevánsak. Külső szimmetriasértő tér nélkül az SU(4) szinglett állapot energiája a legkisebb $\nu^{(0)} = 1/2$ relatív betöltésnél. Ha bekapcsoljuk a Zeeman-teret vagy az alrácsok energiája valamilyen okból különböző, részlegesen spinpolarizált állapotokon keresztül végül eljutunk a teljesen polarizált Fermi-tengerig. $\nu^{(0)} = 1/4$ -nél a teljesen polarizált állapot energiája alacsonyabb az SU(4) szinglett állapotánál, de a különbség nem jelentős, ezért egyértelmű konklúzió nem vonható le. $\nu^{(1)} = 1/2$ -nél és $\nu^{(1)} = 1/4$ -nél viszont egyértelmű, hogy a kompozit fermionok Fermi tengere teljesen spinpolarizált még nulla Zeeman-energia mellett is.
9. Kiszámoltuk a tört kvantált Hall állapotok gerjesztéseit grafén $n = 0$ Landau-szintjén az SU(4) szimmetrikus határesetben $\nu^{(0)} = 2/5, 3/7$ és $4/9$ relatív betöltéseknél [23]. Megmutattuk, hogy az $\nu^{(0)} = 2/5$ és $3/7$ betöltéseknél a tört kvantált Hall állapotok gapje lényegesen lecsökken a SU(2) esethez képest egy új SU(4) Goldstone módus megjelenése miatt.

10. Tanulmányoztuk kompozit fermionok lehetséges *tört* kvantált Hall effektusát többkomponensű rendszerekben [24] (ellentétben kompozit fermionok *egész* kvantált Hall effektusával, ami a szokásos tört kvantált Hall állapotok magyarázata). Kimerítő katalógusát adtuk erősen korrelált állapotoknak és ezek energiájának számos törtnél. Kiszámoltuk az azonos betöltési számnál előforduló állapotok közötti átmenetek kritikus Zeeman-energiáját. Kielégítő kvantitatív egyezést találtunk Yeh *et al.* [74] heterostruktúrákon végzett régebbi, és Liu *et al.* frissebb kísérleteivel [75, 283].
11. A $\nu = 5/2$ tört kvantált Hall effektusban a Landau-szintek keveredésének Bishara-Nayak-féle perturbatív modelljének és egzakt diagonalizáció kombinációjával megmutattuk [25], hogy a Landau-szintek keveredése a Pfaff-állapotot stabilizálja, előnyben részesíti az anti-Pfaff állapottal szemben. A fázisdiagram egy kísérletileg elérhető részében a Pfaff-modell pontosan leírja nemcsak az alapállapotot, hanem a semleges és töltött gerjesztéseket is.
12. Kidolgoztuk a Pfaff-modell igazolására használt rövidtávú háromtest-potenciállal kölcsönható fermionok fázisdiagramját a legalacsonyabb Landau-szinten [26]. A fázisdiagram egy széles tartományában kompozit fermionok alakulnak ki, annak ellenére, hogy ezt a modellt a taszító párkölcsönhatás esetére dolgozták ki. Ebben a tartományban a kompozit fermion modell hasonlóan részletes leírását adja az alacsony energiás fizikának a háromtest-kölcsönhatás esetében, mint a Coulomb kölcsönhatás esetében.
13. Kidolgoztuk a kétosztatú kompozit fermion modellt [27, 28]. Megmutattuk, hogy e modell pontos leírását adja erős külső mágneses térben mozgó töltött fermionoknak számos betöltési számnál, ha azok egyfajta rövidtávú háromtest-kölcsönhatással hatnak kölcsön. Továbbá, modellünk kielégítően közelíti az egzakt Coulomb alapállapotot $\nu = 2 + 3/5$ és $\nu = 2 + 4/7$ betöltéseknél, ezért a belőlük Landau-szinten belüli részecske-lyuk konjugációval kapott állapotok plauzibilis leírását adják a $\nu = 2 + 2/5$ és $\nu = 2 + 3/7$ betöltéseknél megfigyelt tört kvantált Hall effektusnak [76–78, 87].
14. Kielemeztünk egy konkrét példát arra, hogy adiabatikusan összekötött gappal védett tört kvantált Hall alapállapotok (a kompozit fermion állapot $\nu = 2/5$ -nél és az ún. Gaffnian állapot) eltérő topológiájú gerjesztésekkel rendelkezhetnek [29]. A Hamilton-operátor folyamatos deformációja közben az erősödő Coulomb-kölcsönhatási rész gapet nyit a Gaffnian kvázilyukak sávjában; a gap alatti állapotok egy-az-egyhez megfeleltethetők kompozit fermion kvázilyukaknak.
15. Beláttuk, hogy a kompozit fermion elméleten belül elektronokból és lyukakból származtatott $\nu = m/(2m \pm 1)$ kompozit fermion állapotok azonosak, a két kiindulópont lényegében ekvivalens [30]. Meghatároztuk a kompozit fermionok Fermi-hullámszámát $\nu = 1/2$ közelében, és azt találtuk, hogy az közel van $\sqrt{4\pi\rho_e}$ és $\sqrt{4\pi\rho_h}$ közül a kisebbikhez, ahol ρ_e az elektronok, ρ_h a lyukak sűrűsége a Landau-szinten belül. Ez összhangban van Kamburov *et al.* [13] kísérleti eredményeivel. Elektronokból származó kompozit fermionok esetében ez azt jelenti, hogy Luttinger tétele $\nu < 1/2$ esetében enyhén, $\nu > 1/2$ esetben erősen sérül. Pontosan $\nu = 1/2$ -nél eredményeink azt mutatják, ha nem is bizonyítják, hogy a Fermi-momentum kicsit (pár százalékkal) különbözik a Luttinger-tétel által jósolt $\sqrt{4\pi\rho_e}$ értéktől. Megmutattuk továbbá, hogy a Fermi-hullámszám függhet a Landau-szintek keveredésének mértékétől.

6. fejezet

Köszönetnyilvánítások

Először is a pályámon elindító tanároknak szeretnék köszönetet mondani, Szabó Rozália általános iskolai, Mihályi Gyula és Vecsernyés Géza gimnáziumi tanároknak, Szabó Györgynek, akinél diplomamunkámat írtam, Jainendra Kumar Jainnek, aki doktori témavezetőm volt, valamint Vladimir Falkonak, akinél 2008-2009-ben posztdoktori kutatóként dolgoztam. Köszönöm továbbá az együttműködést mindazoknak, akikkel az évek során együtt dolgoztam: Arkadiusz Wójsnak, Nicolas Regnaultnak, Mark Goerbigne, Igor Aleinernek, Yonah Lomoniknak, Chuntai Shinek, Chia-chen Changnak, Michael Petersonnak, Kwon Parknak, Gun-Sang Jeonnak, Ajit Balramnak, és Sreejith Ganesh Jayanak. Köszönettel tartozom továbbá saját tanítványaimnak, Sári Juditnak és Haidekker Galambos Tamásnak; a közös munka fontos motiváció volt a számomra, bár közös munkáink nem kerültek bele ebbe az értekezésbe. Köszönet illeti Pályi Andrást, aki az ELTE nanofizikai szemináriumainak szervezőjeként alkalmat adott munkáink ismertetésére. Köszönettel tartozom Lévay Péternek, Nagy Istvánnak, és Thierry Jolicoeurnek inspiráló szakmai eszmecseréért.

A munka során fontos technikai segítséget kaptam Szeberényi Imrétől, Udvardi Lászlótól és Jason Holmestől. Abban az időszakban, amelyben az értekezéshez felhasznált tanulmányok születtek, két alkalommal is Bolyai János Ösztöndíjban részesültem, köszönet érte.

Köszönöm családomnak a folyamatos támogatást az évek során, ami segített kutatói pályára lépnem, e pályán kitartanom.

Irodalomjegyzék

- [1] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005).
- [2] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim, *Nature* **438**, 201 (2005).
- [3] K. S. Novoselov, E. McCann, S. V. Morozov, V. I. Fal'ko, M. I. Katsnelson, U. Zeitler, D. Jiang, F. Schedin, and A. K. Geim, *Nat. Phys.* **2**, 177 (2006).
- [4] W. Bao, L. Jing, J. Velasco, Y. Lee, G. Liu, D. Tran, B. Standley, M. Aykol, S. B. Cronin, D. Smirnov, et al., *Nat. Phys.* **7**, 948 (2011).
- [5] K. Zou, F. Zhang, C. Clapp, A. H. MacDonald, and J. Zhu, *Nano Letters* **13**, 369 (2013).
- [6] J. González, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **59**, R2474 (1999).
- [7] J. Chae, S. Jung, A. F. Young, C. R. Dean, L. Wang, Y. Gao, K. Watanabe, T. Taniguchi, J. Hone, K. L. Shepard, et al., *Phys. Rev. Lett.* **109**, 116802 (2012).
- [8] T. M. Kott, B. Hu, S. H. Brown, and B. E. Kane, *Phys. Rev. B* **89**, 041107 (2014).
- [9] Y. Tanaka, Z. Ren, T. Sato, K. Nakayama, S. Souma, T. Takahashi, K. Segawa, and Y. Ando, *Nat. Phys.* **8**, 800 (2012).
- [10] P. Dziawa, B. J. Kowalski, K. Dybko, R. Buczko, A. Szczerbakow, M. Szot, E. Ćusakowska, T. Balasubramanian, B. M. Wojek, M. H. Berntsen, et al., *Nat. Mater.* **11**, 1023 (2012).
- [11] S.-Y. Xu, C. Liu, N. Alidoust, M. Neupane, D. Qian, I. Belopolski, J. D. Denlinger, Y. J. Wang, H. Lin, L. A. Wray, et al., *Nat. Commun.* **3**, 1192 EP (2012).
- [12] B. E. Feldman, M. T. Randeria, A. Gyenis, F. Wu, H. Ji, R. J. Cava, A. H. MacDonald, and A. Yazdani, *Science* **354**, 316 (2016).
- [13] D. Kamburov, Y. Liu, A. Mueed, M., M. Shayegan, N. Pfeiffer, L., W. West, K., and W. Baldwin, K., *Phys. Rev. Lett.* **113**, 196801 (2014).
- [14] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008).
- [15] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776 (1987).
- [16] Y. Lemonik, I. L. Aleiner, C. Tóke, and V. I. Fal'ko, *Phys. Rev. B* **82**, 201408 (2010).
- [17] C. Tóke and V. I. Fal'ko, *Phys. Rev. B* **83**, 115455 (2011).

- [18] C. Tóke, Phys. Rev. B **88**, 241411 (2013).
- [19] C. Tóke and V. I. Fal'ko, Phys. Rev. B **90**, 035404 (2014).
- [20] C. Tóke and J. K. Jain, Phys. Rev. B **76**, 081403 (2007).
- [21] A. C. Balram, C. Tóke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **92**, 075410 (2015).
- [22] A. C. Balram, C. Tóke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **92**, 205120 (2015).
- [23] C. Tóke and J. K. Jain, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 235601 (2012).
- [24] A. C. Balram, C. Tóke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **91**, 045109 (2015).
- [25] A. Wójs, C. Tóke, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **105**, 096802 (2010).
- [26] A. Wójs, C. Tóke, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **105**, 196801 (2010).
- [27] G. J. Sreejith, C. Tóke, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **107**, 086806 (2011).
- [28] A. Wójs, G. J. Sreejith, G. Möller, C. Tóke, and J. K. Jain, Acta Phys. Polonica A **120**, 830 (2011).
- [29] C. Tóke and J. K. Jain, Phys. Rev. B **80**, 205301 (2009).
- [30] A. C. Balram, C. Tóke, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **115**, 186805 (2015).
- [31] J. Sári and C. Tóke, Phys. Rev. B **87**, 085432 (2013).
- [32] J. Sári, C. Tóke, and M. O. Goerbig, Phys. Rev. B **90**, 155446 (2014).
- [33] J. Sári, M. O. Goerbig, and C. Tóke, Phys. Rev. B **92**, 035306 (2015).
- [34] C. Tóke, C. Shi, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **77**, 245305 (2008).
- [35] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [36] M. Büttiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).
- [37] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
- [38] B. I. Halperin, Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982).
- [39] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii, and L. I. Glazman, Phys. Rev. B **46**, 4026 (1992).
- [40] D. B. Chklovskii, K. A. Matveev, and B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **47**, 12605 (1993).
- [41] M. A. Paalanen, D. C. Tsui, and A. C. Gossard, Phys. Rev. B **25**, 5566 (1982).
- [42] H. L. Stormer, Rev. Mod. Phys. **71**, 875 (1999).
- [43] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [44] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [45] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983).
- [46] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).

- [47] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).
- [48] J. K. Jain, Phys. Rev. B **40**, 8079 (1989).
- [49] G. Dev and J. K. Jain, Phys. Rev. B **45**, 1223 (1992).
- [50] J. K. Jain, *Composite Fermions* (Cambridge University Press, New York, USA, 2007).
- [51] J. K. Jain, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **6**, 39 (2015).
- [52] A. Lopez and E. Fradkin, Phys. Rev. B **44**, 5246 (1991).
- [53] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).
- [54] J. K. Jain and R. K. Kamilla, Int. J. Mod. Phys. B **11**, 2621 (1997).
- [55] J. K. Jain and R. K. Kamilla, Phys. Rev. B **55**, R4895 (1997).
- [56] G. Möller and S. H. Simon, Phys. Rev. B **72**, 045344 (2005).
- [57] S. C. Davenport and S. H. Simon, Phys. Rev. B **85**, 245303 (2012).
- [58] R. R. Du, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **70**, 2944 (1993).
- [59] R. L. Willett, R. R. Ruel, K. W. West, and L. N. Pfeiffer, Phys. Rev. Lett. **71**, 3846 (1993).
- [60] W. Kang, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **71**, 3850 (1993).
- [61] V. J. Goldman, B. Su, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **72**, 2065 (1994).
- [62] J. H. Smet, D. Weiss, R. H. Blick, G. Lütjering, K. von Klitzing, R. Fleischmann, R. Ketzmerick, T. Geisel, and G. Weimann, Phys. Rev. Lett. **77**, 2272 (1996).
- [63] X. G. Wu, G. Dev, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **71**, 153 (1993).
- [64] K. Park and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **80**, 4237 (1998).
- [65] K. Park and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **83**, 5543 (1999).
- [66] K. Park and J. K. Jain, Phys. Rev. B **62**, R13274 (2000).
- [67] K. Park and J. K. Jain, Solid State Commun. **119**, 291 (2001).
- [68] J. P. Eisenstein, H. L. Stormer, L. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **62**, 1540 (1989).
- [69] R. R. Du, A. S. Yeh, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **75**, 3926 (1995).
- [70] I. V. Kukushkin, K. v. Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **82**, 3665 (1999).
- [71] I. V. Kukushkin, J. H. Smet, K. von Klitzing, and K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **85**, 3688 (2000).

- [72] S. Melinte, N. Freytag, M. Horvatic, C. Berthier, L. P. Lévy, V. Bayot, and M. Shayegan, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 354 (2000).
- [73] L. Tiemann, G. Gamez, N. Kumada, and K. Muraki, *Science* **335**, 828 (2012).
- [74] A. S. Yeh, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 592 (1999).
- [75] Y. Liu, D. Kamburov, S. Hasdemir, M. Shayegan, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 246803 (2014).
- [76] J. S. Xia, W. Pan, C. L. Vicente, E. D. Adams, N. S. Sullivan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 176809 (2004).
- [77] W. Pan, J. S. Xia, H. L. Stormer, D. C. Tsui, C. Vicente, E. D. Adams, N. S. Sullivan, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, *Phys. Rev. B* **77**, 075307 (2008).
- [78] H. C. Choi, W. Kang, S. Das Sarma, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. B* **77**, 081301 (2008).
- [79] G. Moore and N. Read, *Nucl. Phys. B* **360**, 362 (1991).
- [80] S. Das Sarma, M. Freedman, and C. Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 166802 (2005).
- [81] A. Stern and B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 016802 (2006).
- [82] G. Möller and S. H. Simon, *Phys. Rev. B* **77**, 075319 (2008).
- [83] C. Nayak and F. Wilczek, *Nucl. Phys. B* **479**, 529 (1996).
- [84] H. Fukuyama, P. M. Platzman, and P. W. Anderson, *Phys. Rev. B* **19**, 5211 (1979).
- [85] M. M. Fogler, A. A. Koulakov, and B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. B* **54**, 1853 (1996).
- [86] A. A. Koulakov, M. M. Fogler, and B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 499 (1996).
- [87] W. Pan, J.-S. Xia, V. Shvarts, D. E. Adams, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3530 (1999).
- [88] M. P. Lilly, K. B. Cooper, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 394 (1999).
- [89] R. Du, D. Tsui, H. Stormer, L. Pfeiffer, K. Baldwin, and K. West, *Solid State Commun.* **109**, 389 (1999).
- [90] J. P. Eisenstein, K. B. Cooper, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 076801 (2002).
- [91] K. B. Cooper, M. P. Lilly, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. B* **60**, R11285 (1999).
- [92] F. Stern and W. E. Howard, *Phys. Rev.* **163**, 816 (1967).
- [93] T. M. Lu, W. Pan, D. C. Tsui, C.-H. Lee, and C. W. Liu, *Phys. Rev. B* **85**, 121307 (2012).

- [94] R. Dingle, H. L. Stömer, A. C. Gossard, and W. Wiegmann, Appl. Phys. Lett. **33**, 665 (1978).
- [95] A. G. Davies, R. Newbury, M. Pepper, J. E. F. Frost, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, Phys. Rev. B **44**, 13128 (1991).
- [96] H. L. Stormer, A. Chang, D. C. Tsui, J. C. M. Hwang, A. C. Gossard, and W. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **50**, 1953 (1983).
- [97] N. C. Bishop, M. Padmanabhan, K. Vakili, Y. P. Shkolnikov, E. P. De Poortere, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. **98**, 266404 (2007).
- [98] M. Padmanabhan, T. Gokmen, and M. Shayegan, Phys. Rev. B **80**, 035423 (2009).
- [99] B. A. Piot, J. Kunc, M. Potemski, D. K. Maude, C. Betthausen, A. Vogl, D. Weiss, G. Karczewski, and T. Wojtowicz, Phys. Rev. B **82**, 081307 (2010).
- [100] A. Tsukazaki, S. Akasaka, K. Nakahara, Y. Ohno, H. Ohno, D. Maryenko, A. Ohtomo, and M. Kawasaki, Nat. Mater. **9**, 889 (2010).
- [101] J. Falson, D. Maryenko, B. Friess, D. Zhang, Y. Kozuka, A. Tsukazaki, J. H. Smet, and M. Kawasaki, Nat. Phys. **11**, 347 (2015).
- [102] Y. Xu, I. Miotkowski, C. Liu, J. Tian, H. Nam, N. Alidoust, J. Hu, C.-K. Shih, M. Z. Hasan, and Y. P. Chen, Nat. Phys. **10**, 956 (2014).
- [103] P. A. M. Dirac, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **133**, 60 (1931).
- [104] T. T. Wu and C. N. Yang, Nucl. Phys. B **107**, 365 (1976).
- [105] T. T. Wu and C. N. Yang, Phys. Rev. D **16**, 1018 (1977).
- [106] G. Fano, F. Ortolani, and E. Colombo, Phys. Rev. B **34**, 2670 (1986).
- [107] R. Morf and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **33**, 2221 (1986).
- [108] J. Zak, Phys. Rev. **134**, A1602 (1964).
- [109] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Phys. Rev. B **31**, 2529 (1985).
- [110] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Modern Birkhäuser Classics (Springer, 1987), ISBN 9780817645779.
- [111] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Phys. Rev. B **31**, 2529 (1985).
- [112] N. Read and E. Rezayi, Phys. Rev. B **54**, 16864 (1996).
- [113] J. Shao, E.-A. Kim, F. D. M. Haldane, and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **114**, 206402 (2015).
- [114] R. K. Kamilla, J. K. Jain, and S. M. Girvin, Phys. Rev. B **56**, 12411 (1997).
- [115] E. V. Tsiper, J. Math. Phys. **43**, 1664 (2002).
- [116] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953).

- [117] S. S. Mandal and J. K. Jain, Phys. Rev. B **66**, 155302 (2002).
- [118] W. M. C. Foulkes, L. Mitas, R. J. Needs, and G. Rajagopal, Rev. Mod. Phys. **73**, 33 (2001).
- [119] G. Ortiz, D. M. Ceperley, and R. M. Martin, Phys. Rev. Lett. **71**, 2777 (1993).
- [120] V. Melik-Alaverdian, N. E. Bonesteel, and G. Ortiz, Phys. Rev. Lett. **79**, 5286 (1997).
- [121] V. Melik-Alaverdian, N. Bonesteel, and G. Ortiz, Physica E **1**, 138 (1997).
- [122] Y. Zhang, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **117**, 116803 (2016).
- [123] D. M. Ceperley, Rev. Mod. Phys. **67**, 279 (1995).
- [124] D. M. Ceperley, *Proceedings of the Les Houches Summer School, Session 56, Strongly Interacting Fermions and High T_c Superconductivity* (Elsevier, 1995), chap. 9, pp. 427–453.
- [125] N. Shibata and K. Nomura, J. Phys. Soc. Japan **78**, 104708 (2009).
- [126] A. E. Feiguin, E. Rezayi, C. Nayak, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **100**, 166803 (2008).
- [127] J. Zhao, D. N. Sheng, and F. D. M. Haldane, Phys. Rev. B **83**, 195135 (2011).
- [128] Z.-X. Hu, Z. Papic, S. Johri, R. Bhatt, and P. Schmitteckert, Physics Letters A **376**, 2157 (2012).
- [129] G. Murthy, Phys. Rev. B **60**, 13702 (1999).
- [130] A. Lopez and E. Fradkin, Phys. Rev. B **47**, 7080 (1993).
- [131] S. He, S. H. Simon, and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **50**, 1823 (1994).
- [132] X. C. Xie, Phys. Rev. B **49**, 16833 (1994).
- [133] A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals* (North Holland, 1988), ISBN 0444870954.
- [134] E. McCann and V. I. Fal'ko, Phys. Rev. Lett. **96**, 086805 (2006).
- [135] F. Guinea, A. H. Castro Neto, and N. M. R. Peres, Phys. Rev. B **73**, 245426 (2006).
- [136] J. M. Pereira, F. M. Peeters, and P. Vasilopoulos, Phys. Rev. B **76**, 115419 (2007).
- [137] M. Koshino and E. McCann, Phys. Rev. B **80**, 165409 (2009).
- [138] M. Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems* (Dover, New York, NY, 1989).
- [139] O. Vafek and K. Yang, Phys. Rev. B **81**, 041401 (2010).
- [140] R. Nandkishore and L. Levitov, ArXiv e-prints (2009), 0907.5395v1.
- [141] R. Nandkishore and L. Levitov, Phys. Rev. Lett. **104**, 156803 (2010).
- [142] I. L. Aleiner, D. E. Kharzeev, and A. M. Tsvelik, Phys. Rev. B **76**, 195415 (2007).

- [143] D. M. Basko, Phys. Rev. B **78**, 125418 (2008).
- [144] J. E. Drut and D. T. Son, Phys. Rev. B **77**, 075115 (2008).
- [145] Y. Lemonik, I. Aleiner, and V. I. Fal'ko, Phys. Rev. B **85**, 245451 (2012).
- [146] A. S. Mayorov, D. C. Elias, M. Mucha-Kruczynski, R. V. Gorbachev, T. Tudorovskiy, A. Zhukov, S. V. Morozov, M. I. Katsnelson, A. K. Geim, and K. S. Novoselov, Science **333**, 860 (2011).
- [147] J. Velasco, L. Jing, W. Bao, Y. Lee, P. Kratz, V. Aji, M. Bockrath, C. N. Lau, C. Varma, R. Stillwell, et al., Nat. Nanotech. **7**, 156 (2012).
- [148] B. E. Feldman, J. Martin, and A. Yacoby, Nat. Phys. **5**, 889 (2009).
- [149] R. T. Weitz, M. T. Allen, B. E. Feldman, J. Martin, and A. Yacoby, Science **330**, 812 (2010).
- [150] Y. Zhao, P. Cadden-Zimansky, Z. Jiang, and P. Kim, Phys. Rev. Lett. **104**, 066801 (2010).
- [151] S. Kim, K. Lee, and E. Tutuc, Phys. Rev. Lett. **107**, 016803 (2011).
- [152] Y. Barlas, R. Côté, K. Nomura, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **101**, 097601 (2008).
- [153] K. Shizuya, Phys. Rev. B **86**, 045431 (2012).
- [154] J. G. Checkelsky, L. Li, and N. P. Ong, Phys. Rev. Lett. **100**, 206801 (2008).
- [155] J. G. Checkelsky, L. Li, and N. P. Ong, Phys. Rev. B **79**, 115434 (2009).
- [156] G. M. Gusev, E. B. Olshanetsky, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky, and J. C. Portal, Phys. Rev. Lett. **104**, 166401 (2010).
- [157] S. D. Sarma and K. Yang, Solid State Commun. **149**, 1502 (2009).
- [158] R. Nandkishore and L. Levitov, ArXiv e-prints (2010), 1002.1966.
- [159] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, and V. A. Miransky, JETP Letters **91**, 314 (2010).
- [160] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, and V. A. Miransky, Phys. Rev. B **81**, 155451 (2010).
- [161] E. McCann, Phys. Rev. B **74**, 161403 (2006).
- [162] Y. Zhang, T.-T. Tang, C. Girit, Z. Hao, M. C. Martin, A. Zettl, M. F. Crommie, Y. R. Shen, and F. Wang, Nature **459**, 820 (2009).
- [163] K. F. Mak, C. H. Lui, J. Shan, and T. F. Heinz, Phys. Rev. Lett. **102**, 256405 (2009).
- [164] P. R. Wallace, Phys. Rev. **71**, 622 (1947).
- [165] J. W. McClure, Phys. Rev. **108**, 612 (1957).
- [166] J. C. Slonczewski and P. R. Weiss, Phys. Rev. **109**, 272 (1958).
- [167] L. M. Zhang, M. M. Fogler, and D. P. Arovas, Phys. Rev. B **84**, 075451 (2011).

- [168] C. Kallin and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **30**, 5655 (1984).
- [169] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi, Phys. Rev. B **47**, 16419 (1993).
- [170] H. A. Fertig, L. Brey, R. Côté, A. H. MacDonald, A. Karlhede, and S. L. Sondhi, Phys. Rev. B **55**, 10671 (1997).
- [171] V. I. Fal'ko, Journal of Physics: Condensed Matter **5**, 8725 (1993).
- [172] A. Iyengar, J. Wang, H. A. Fertig, and L. Brey, Phys. Rev. B **75**, 125430 (2007).
- [173] A. Pinczuk, B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Semiconductor Science and Technology **9**, 1865 (1994).
- [174] D. Paquet, T. M. Rice, and K. Ueda, Phys. Rev. B **32**, 5208 (1985).
- [175] J. B. Oostinga, H. B. Heersche, X. Liu, A. F. Morpurgo, and L. M. K. Vandersypen, Nat. Mater. **7**, 151 (2008).
- [176] S. Kim and E. Tutuc, ArXiv e-prints (2009), 0909.2288.
- [177] J. Yan and M. S. Fuhrer, Nano Letters **10**, 4521 (2010).
- [178] S. M. Girvin and A. H. MacDonald, *Multicomponent Quantum Hall Systems: The Sum of Their Parts and More* (Wiley-VCH Verlag GmbH, 2007), pp. 161–224, ISBN 9783527617258.
- [179] C. R. Dean, A. F. Young, P. Cadden-Zimansky, L. Wang, H. Ren, K. Watanabe, T. Taniguchi, P. Kim, J. Hone, and K. L. Shepard, Nat. Phys. **7**, 693 (2011).
- [180] Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small, M. S. Purewal, Y.-W. Tan, M. Fazlollahi, J. D. Chudow, J. A. Jaszczak, H. L. Stormer, and P. Kim, Phys. Rev. Lett. **96**, 136806 (2006).
- [181] Z. Jiang, Y. Zhang, H. L. Stormer, and P. Kim, Phys. Rev. Lett. **99**, 106802 (2007).
- [182] J. Martin, B. E. Feldman, R. T. Weitz, M. T. Allen, and A. Yacoby, Phys. Rev. Lett. **105**, 256806 (2010).
- [183] H. J. van Elferen, A. Veligura, E. V. Kurganova, U. Zeitler, J. C. Maan, N. Tombros, I. J. Vera-Marun, and B. J. van Wees, Phys. Rev. B **85**, 115408 (2012).
- [184] K. Shizuya, Phys. Rev. B **87**, 085413 (2013).
- [185] Y. Barlas, R. Côté, J. Lambert, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **104**, 096802 (2010).
- [186] R. Côté, J. Lambert, Y. Barlas, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **82**, 035445 (2010).
- [187] R. Côté, W. Luo, B. Petrov, Y. Barlas, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **82**, 245307 (2010).
- [188] Y. Barlas, R. Côté, and M. Rondeau, Phys. Rev. Lett. **109**, 126804 (2012).
- [189] F. Zhang, D. Tilahun, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **85**, 165139 (2012).
- [190] R. Côté, M. Rondeau, A.-M. Gagnon, and Y. Barlas, Phys. Rev. B **86**, 125422 (2012).

- [191] M. Kharitonov, Phys. Rev. Lett. **109**, 046803 (2012).
- [192] R. Côté and M. Barrette, Phys. Rev. B **88**, 245445 (2013).
- [193] Y. Barlas, W.-C. Lee, K. Nomura, and A. H. MacDonald, Int. J. Mod. Phys. B **23**, 2634 (2009).
- [194] J. D. Bernal, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **106**, 749 (1924).
- [195] B. Partoens and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **74**, 075404 (2006).
- [196] B. Partoens and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **75**, 193402 (2007).
- [197] M. Koshino and T. Ando, Phys. Rev. B **76**, 085425 (2007).
- [198] M. Koshino and T. Ando, Phys. Rev. B **77**, 115313 (2008).
- [199] H. Min and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **77**, 155416 (2008).
- [200] M. Koshino and E. McCann, Phys. Rev. B **81**, 115315 (2010).
- [201] P. M. Solomon, P. J. Price, D. J. Frank, and D. C. La Tulipe, Phys. Rev. Lett. **63**, 2508 (1989).
- [202] T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **66**, 1216 (1991).
- [203] U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **68**, 1196 (1992).
- [204] J. P. Eisenstein and A. H. MacDonald, Nature **432**, 691 (2004).
- [205] M. Kellogg, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **93**, 036801 (2004).
- [206] E. Tutuc, M. Shayegan, and D. A. Huse, Phys. Rev. Lett. **93**, 036802 (2004).
- [207] Y. Yoon, L. Tiemann, S. Schmult, W. Dietsche, K. von Klitzing, and W. Wegscheider, Phys. Rev. Lett. **104**, 116802 (2010).
- [208] A. F. Croxall, K. Das Gupta, C. A. Nicoll, M. Thangaraj, H. E. Beere, I. Farrer, D. A. Ritchie, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **101**, 246801 (2008).
- [209] J. A. Seamons, C. P. Morath, J. L. Reno, and M. P. Lilly, Phys. Rev. Lett. **102**, 026804 (2009).
- [210] Y. W. Suen, L. W. Engel, M. B. Santos, M. Shayegan, and D. C. Tsui, Phys. Rev. Lett. **68**, 1379 (1992).
- [211] J. P. Eisenstein, G. S. Boebinger, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and S. He, Phys. Rev. Lett. **68**, 1383 (1992).
- [212] D. R. Luhman, W. Pan, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **101**, 266804 (2008).
- [213] L. A. Ponomarenko, A. K. Geim, A. A. Zhukov, R. Jalil, S. V. Morozov, K. S. Novoselov, I. V. Grigorieva, E. H. Hill, V. V. Cheianov, V. I. Fal'ko, et al., Nat. Phys. **7**, 958 (2011).

- [214] F. Amet, J. R. Williams, A. G. F. Garcia, M. Yankowitz, K. Watanabe, T. Taniguchi, and D. Goldhaber-Gordon, Phys. Rev. B **85**, 073405 (2012).
- [215] L. Britnell, R. V. Gorbachev, R. Jalil, B. D. Belle, F. Schedin, M. I. Katsnelson, L. Eaves, S. V. Morozov, A. S. Mayorov, N. M. R. Peres, et al., Nano Letters **12**, 1707 (2012).
- [216] R. Moessner and J. T. Chalker, Phys. Rev. B **54**, 5006 (1996).
- [217] E. H. Rezayi, F. D. M. Haldane, and K. Yang, Phys. Rev. Lett. **83**, 1219 (1999).
- [218] E. H. Rezayi and F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **84**, 4685 (2000).
- [219] F. D. M. Haldane, E. H. Rezayi, and K. Yang, Phys. Rev. Lett. **85**, 5396 (2000).
- [220] T. Jungwirth, A. H. MacDonald, L. Smrčka, and S. M. Girvin, Phys. Rev. B **60**, 15574 (1999).
- [221] N. Maeda, Phys. Rev. B **61**, 4766 (2000).
- [222] R. Côté and H. A. Fertig, Phys. Rev. B **62**, 1993 (2000).
- [223] T. D. Stanescu, I. Martin, and P. Phillips, Phys. Rev. Lett. **84**, 1288 (2000).
- [224] F. von Oppen, B. I. Halperin, and A. Stern, Phys. Rev. Lett. **84**, 2937 (2000).
- [225] E. Fradkin and S. A. Kivelson, Phys. Rev. B **59**, 8065 (1999).
- [226] E. Fradkin, S. A. Kivelson, E. Manousakis, and K. Nho, Phys. Rev. Lett. **84**, 1982 (2000).
- [227] H. Yi, H. A. Fertig, and R. Côté, Phys. Rev. Lett. **85**, 4156 (2000).
- [228] A. H. MacDonald and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **61**, 5724 (2000).
- [229] M. M. Fogler and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **84**, 5828 (2000).
- [230] J. Eisenstein, Solid State Commun. **117**, 123 (2001).
- [231] F. von Oppen, B. I. Halperin, and A. Stern, *Striped Quantum Hall Phases* (World Scientific, 2012), pp. 66–75.
- [232] M. M. Fogler, *Stripe and Bubble Phases in Quantum Hall Systems* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001), chap. 4, pp. 98–138.
- [233] C.-H. Zhang and Y. N. Joglekar, Phys. Rev. B **75**, 245414 (2007).
- [234] H. Wang, D. N. Sheng, L. Sheng, and F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **100**, 116802 (2008).
- [235] O. Poplavskyy, M. O. Goerbig, and C. Morais Smith, Phys. Rev. B **80**, 195414 (2009).
- [236] V. I. Fal'ko, Phys. Rev. B **49**, 7774 (1994).
- [237] S. Narasimhan and T.-L. Ho, Phys. Rev. B **52**, 12291 (1995).
- [238] K. Esfarjani and Y. Kawazoe, Journal of Physics: Condensed Matter **7**, 7217 (1995).
- [239] L. Zheng and H. A. Fertig, Phys. Rev. B **52**, 12282 (1995).

- [240] G. Goldoni and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **53**, 4591 (1996).
- [241] I. V. Schweigert, V. A. Schweigert, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **60**, 14665 (1999).
- [242] H. C. Manoharan, Y. W. Suen, M. B. Santos, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. **77**, 1813 (1996).
- [243] J. Doveston, S. Djordjevic, R. Dunford, C. Mellor, F. Williams, and M. Henini, Physica E **12**, 296 (2002).
- [244] Z. Wang, Y. P. Chen, L. W. Engel, D. C. Tsui, E. Tutuc, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. **99**, 136804 (2007).
- [245] Z. Wang, Y. P. Chen, H. Zhu, L. W. Engel, D. C. Tsui, E. Tutuc, and M. Shayegan, Phys. Rev. B **85**, 195408 (2012).
- [246] E. J. Mele, Am. J. Phys. **69**, 557 (2001).
- [247] B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, and F. Guinea, New J. Phys. **8**, 318 (2006).
- [248] I. L. Aleiner and L. I. Glazman, Phys. Rev. B **52**, 11296 (1995).
- [249] S. V. Kravchenko, D. A. Rinberg, S. G. Semenchinsky, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. B **42**, 3741 (1990).
- [250] J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **68**, 674 (1992).
- [251] J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. B **50**, 1760 (1994).
- [252] S. Shapira, U. Sivan, P. M. Solomon, E. Buchstab, M. Tischler, and G. Ben Yoseph, Phys. Rev. Lett. **77**, 3181 (1996).
- [253] S. C. Dultz and H. W. Jiang, Phys. Rev. Lett. **84**, 4689 (2000).
- [254] S. Ilani, A. Yacoby, D. Mahalu, and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **84**, 3133 (2000).
- [255] B. Skinner and B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **87**, 035409 (2013).
- [256] B. Skinner, G. L. Yu, A. V. Kretinin, A. K. Geim, K. S. Novoselov, and B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **88**, 155417 (2013).
- [257] J. M. B. Lopes dos Santos, N. M. R. Peres, and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. Lett. **99**, 256802 (2007).
- [258] R. Bistritzer and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **81**, 245412 (2010).
- [259] M. Kindermann, B. Uchoa, and D. L. Miller, Phys. Rev. B **86**, 115415 (2012).
- [260] D. K. Maude, M. Potemski, J. C. Portal, M. Henini, L. Eaves, G. Hill, and M. A. Pate, Phys. Rev. Lett. **77**, 4604 (1996).
- [261] D. R. Leadley, R. J. Nicholas, D. K. Maude, A. N. Utjuzh, J. C. Portal, J. J. Harris, and C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **79**, 4246 (1997).
- [262] N. Freytag, Y. Tokunaga, M. Horvatić, C. Berthier, M. Shayegan, and L. P. Lévy, Phys. Rev. Lett. **87**, 136801 (2001).

- [263] K. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman, H. Stormer, and P. Kim, *Nature* **462**, 196 (2009).
- [264] B. E. Feldman, B. Krauss, J. H. Smet, and A. Yacoby, *Science* **337**, 1196 (2012).
- [265] B. E. Feldman, A. J. Levin, B. Krauss, D. A. Abanin, B. I. Halperin, J. H. Smet, and A. Yacoby, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 076802 (2013).
- [266] F. Amet, A. J. Bestwick, J. R. Williams, L. Balicas, K. Watanabe, T. Taniguchi, and D. Goldhaber-Gordon, *Nat. Commun.* **6** (2015).
- [267] X. Du, I. Skachko, F. Duerr, A. Luican, and E. Y. Andrei, *Nature* **462**, 192 (2009).
- [268] C. Tóke and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **75**, 245440 (2007).
- [269] W. Ludwig and C. Falter, *Symmetries in Physics* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1988).
- [270] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [271] D. P. DiVincenzo and E. J. Mele, *Phys. Rev. B* **29**, 1685 (1984).
- [272] N. H. Shon and T. Ando, *J. Phys. Soc. Japan* **67**, 2421 (1998).
- [273] C. Tóke, P. E. Lammert, V. H. Crespi, and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **74**, 235417 (2006).
- [274] V. M. Apalkov and T. Chakraborty, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 126801 (2006).
- [275] K. Nomura and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 256602 (2006).
- [276] C. Shi, S. Jolad, N. Regnault, and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **77**, 155127 (2008).
- [277] C. Tóke and J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 246805 (2006).
- [278] X. Lin, R. R. Du, and X. C. Xie, *National Science Review* **1**, 564 (2014).
- [279] M. R. Peterson and C. Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 086401 (2014).
- [280] F. Ghahari, Y. Zhao, P. Cadden-Zimansky, K. Bolotin, and P. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 046801 (2011).
- [281] J. Shabani, Y. Liu, and M. Shayegan, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 246805 (2010).
- [282] Y. Liu, S. Hasdemir, A. Wójs, J. K. Jain, L. N. Pfeiffer, K. W. West, K. W. Baldwin, and M. Shayegan, *Phys. Rev. B* **90**, 085301 (2014).
- [283] Y. Liu, S. Hasdemir, J. Shabani, M. Shayegan, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin, *Phys. Rev. B* **92**, 201101 (2015).
- [284] M. Padmanabhan, T. Gokmen, and M. Shayegan, *Phys. Rev. B* **81**, 113301 (2010).
- [285] T. Gokmen, M. Padmanabhan, and M. Shayegan, *Phys. Rev. B* **81**, 235305 (2010).
- [286] C. Betthausen, P. Giudici, A. Iankilevitch, C. Preis, V. Kolkovsky, M. Wiater, G. Karczewski, B. A. Piot, J. Kunc, M. Potemski, et al., *Phys. Rev. B* **90**, 115302 (2014).
- [287] A. F. Morpurgo and F. Guinea, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 196804 (2006).

- [288] G. W. Semenoff, *Physica Scripta* **2012**, 014016 (2012).
- [289] B. Roy, M. P. Kennett, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **90**, 201409 (2014).
- [290] G. Dev and J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2843 (1992).
- [291] M. R. Peterson and C. Nayak, *Phys. Rev. B* **87**, 245129 (2013).
- [292] S. Das Sarma, S. Adam, E. H. Hwang, and E. Rossi, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 407 (2011).
- [293] W. Bishara and C. Nayak, *Phys. Rev. B* **80**, 121302 (2009).
- [294] V. W. Scarola, K. Park, and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **61**, 13064 (2000).
- [295] S. S. Mandal and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **63**, 201310 (2001).
- [296] U. Wurstbauer, D. Majumder, S. S. Mandal, I. Dujovne, T. D. Rhone, B. S. Dennis, A. F. Rigosi, J. K. Jain, A. Pinczuk, K. W. West, et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 066804 (2011).
- [297] M. O. Goerbig, R. Moessner, and B. Douçot, *Phys. Rev. B* **74**, 161407 (2006).
- [298] A. Jellal, *Nuclear Physics B* **804**, 361 (2008).
- [299] A. Wójs, G. Möller, and N. R. Cooper, *Acta Physica Polonica A* **119**, 592 (2011).
- [300] C. Tóke, N. Regnault, and J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 036806 (2007).
- [301] J. K. Jain and R. K. Kamilla, in *Composite Fermions* (World Scientific Pub Co Inc, 1998), chap. 1, pp. 1–90.
- [302] A. Pinczuk, B. Dennis, L. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3983 (1993).
- [303] J. G. Groshaus, I. Dujovne, Y. Gallais, C. F. Hirjibehedin, A. Pinczuk, Y.-W. Tan, H. Stormer, B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 046804 (2008).
- [304] A. C. Balram and S. Pu, *ArXiv e-prints* (2016), 1609.01703.
- [305] C. Quesne, *J. Math. Phys.* **17**, 1452 (1976).
- [306] S.-Y. Lee, V. W. Scarola, and J. Jain, *Phys. Rev. B* **66**, 085336 (2002).
- [307] W. Pan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 016801 (2003).
- [308] A. Wójs, K.-S. Yi, and J. J. Quinn, *Phys. Rev. B* **69**, 205322 (2004).
- [309] S. Mukherjee, S. S. Mandal, Y.-H. Wu, A. Wójs, and J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 016801 (2014).
- [310] C.-C. Chang, S. S. Mandal, and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* **67**, 121305 (2003).
- [311] A. Wójs, G. Simion, and J. J. Quinn, *Phys. Rev. B* **75**, 155318 (2007).
- [312] A. C. Balram, U. Wurstbauer, A. Wójs, A. Pinczuk, and J. K. Jain, *Nat. Commun.* **6**, 8981 EP (2015).

- [313] K. Park, V. Melik-Alaverdian, N. E. Bonesteel, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **58**, R10167 (1998).
- [314] B. I. Halperin, Helvetica Physica Acta **56**, 75 (1983).
- [315] S. Mukherjee, S. S. Mandal, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **109**, 256801 (2012).
- [316] S. Mukherjee, J. K. Jain, and S. S. Mandal, Phys. Rev. B **90**, 121305 (2014).
- [317] I. Sodemann and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **112**, 126804 (2014).
- [318] V. Kalmeyer and S.-C. Zhang, Phys. Rev. B **46**, 9889 (1992).
- [319] J. H. Smet, *Ballistic transport of composite fermions in semiconductor nanostructures* (World Scientific Pub Co Inc, 1998), chap. 7, pp. 443–491.
- [320] R. L. Willett, K. W. West, and L. N. Pfeiffer, Phys. Rev. Lett. **83**, 2624 (1999).
- [321] J. H. Smet, S. Jobst, K. von Klitzing, D. Weiss, W. Wegscheider, and V. Umansky, Phys. Rev. Lett. **83**, 2620 (1999).
- [322] N. Freytag, M. Horvatic, C. Berthier, M. Shayegan, and L. P. Lévy, Phys. Rev. Lett. **89**, 246804 (2002).
- [323] D. Kamburov, M. Shayegan, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin, Phys. Rev. Lett. **109**, 236401 (2012).
- [324] M. Greiter, X.-G. Wen, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **66**, 3205 (1991).
- [325] N. Read and D. Green, Phys. Rev. B **61**, 10267 (2000).
- [326] C. R. Dean, B. A. Piot, P. Hayden, S. Das Sarma, G. Gervais, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **100**, 146803 (2008).
- [327] J. Eisenstein, R. Willett, H. Stormer, L. Pfeiffer, and K. West, Surface Science **229**, 31 (1990).
- [328] J. B. Miller, I. P. Radu, D. M. Zumbuhl, E. M. Levenson-Falk, M. A. Kastner, C. M. Marcus, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Nat. Phys. **3**, 561 (2007).
- [329] R. L. Willett, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Proceedings of the National Academy of Sciences **106**, 8853 (2009).
- [330] A. Kumar, G. A. Csáthy, M. J. Manfra, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **105**, 246808 (2010).
- [331] C. Zhang, T. Knuuttila, Y. Dai, R. R. Du, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **104**, 166801 (2010).
- [332] J. Nuebler, V. Umansky, R. Morf, M. Heiblum, K. von Klitzing, and J. Smet, Phys. Rev. B **81**, 035316 (2010).
- [333] J. Xia, V. Cvicek, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **105**, 176807 (2010).

- [334] W. Pan, N. Masuhara, N. S. Sullivan, K. W. Baldwin, K. W. West, L. N. Pfeiffer, and D. C. Tsui, Phys. Rev. Lett. **106**, 206806 (2011).
- [335] N. Samkharadze, J. D. Watson, G. Gardner, M. J. Manfra, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and G. A. Csáthy, Phys. Rev. B **84**, 121305 (2011).
- [336] G. Gamez and K. Muraki, Phys. Rev. B **88**, 075308 (2013).
- [337] C. Reichl, J. Chen, S. Baer, C. Rössler, T. Ihn, K. Ensslin, W. Dietsche, and W. Wegscheider, New J. Phys. **16**, 023014 (2014).
- [338] M. Stern, P. Plochocka, V. Umansky, D. K. Maude, M. Potemski, and I. Bar-Joseph, Phys. Rev. Lett. **105**, 096801 (2010).
- [339] T. D. Rhone, J. Yan, Y. Gallais, A. Pinczuk, L. Pfeiffer, and K. West, Phys. Rev. Lett. **106**, 196805 (2011).
- [340] M. Stern, B. A. Piot, Y. Vardi, V. Umansky, P. Plochocka, D. K. Maude, and I. Bar-Joseph, Phys. Rev. Lett. **108**, 066810 (2012).
- [341] I. P. Radu, J. B. Miller, C. M. Marcus, M. A. Kastner, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Science **320**, 899 (2008).
- [342] M. Dolev, M. Heiblum, V. Umansky, A. Stern, and D. Mahalu, Nature **452**, 829 (2008).
- [343] M. Dolev, Y. Gross, Y. C. Chung, M. Heiblum, V. Umansky, and D. Mahalu, Phys. Rev. B **81**, 161303 (2010).
- [344] R. H. Morf, Phys. Rev. Lett. **80**, 1505 (1998).
- [345] M. R. Peterson, T. Jolicoeur, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **101**, 016807 (2008).
- [346] M. Storni, R. H. Morf, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **104**, 076803 (2010).
- [347] A. Wójs, Phys. Rev. B **80**, 041104 (2009).
- [348] M. Levin, B. I. Halperin, and B. Rosenow, Phys. Rev. Lett. **99**, 236806 (2007).
- [349] M. R. Peterson, K. Park, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **101**, 156803 (2008).
- [350] H. Wang, D. N. Sheng, and F. D. M. Haldane, Phys. Rev. B **80**, 241311 (2009).
- [351] E. H. Rezayi and S. H. Simon, ArXiv e-prints (2009), 0912.0109.
- [352] R. Morf and N. d'Ambrumenil, Phys. Rev. B **68**, 113309 (2003).
- [353] K. Pakrouski, M. R. Peterson, T. Jolicoeur, V. W. Scarola, C. Nayak, and M. Troyer, Phys. Rev. X **5**, 021004 (2015).
- [354] V. Schweikhard, I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **92**, 040404 (2004).
- [355] M. W. Zwierlein, Abo-Shaer, A. J. R., Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Nature **435**, 1047 (2005).
- [356] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. Jimenez-Garcia, J. V. Porto, and I. B. Spielman, Nature **462**, 628 (2009).

- [357] N. R. Cooper, Phys. Rev. Lett. **92**, 220405 (2004).
- [358] H. P. Buchler, A. Micheli, and P. Zoller, Nat. Phys. **3**, 726 (2007).
- [359] S. H. Simon, E. H. Rezayi, and N. R. Cooper, Phys. Rev. B **75**, 075318 (2007).
- [360] M. Greiter, X. G. Wen, and F. Wilczek, Phys. Rev. B **46**, 9586 (1992).
- [361] V. W. Scarola and J. K. Jain, Phys. Rev. B **64**, 085313 (2001).
- [362] M. V. Milovanovic and T. Jolicoeur, Int. J. Mod. Phys. B **24**, 549 (2010).
- [363] M. Hermanns, Phys. Rev. Lett. **104**, 056803 (2010).
- [364] B. A. Bernevig and F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **102**, 066802 (2009).
- [365] T. H. Hansson, M. Hermanns, N. Regnault, and S. Viefers, Phys. Rev. Lett. **102**, 166805 (2009).
- [366] T. H. Hansson, M. Hermanns, and S. Viefers, Phys. Rev. B **80**, 165330 (2009).
- [367] N. Read and E. Rezayi, Phys. Rev. B **59**, 8084 (1999).
- [368] P. Bonderson and J. K. Slingerland, Phys. Rev. B **78**, 125323 (2008).
- [369] P. Bonderson, A. E. Feiguin, G. Möller, and J. K. Slingerland, Phys. Rev. Lett. **108**, 036806 (2012).
- [370] G. J. Sreejith, Y.-H. Wu, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **87**, 245125 (2013).
- [371] V. W. Scarola, K. Park, and J. K. Jain, Nature **406**, 863 (2000).
- [372] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **60**, 956 (1988).
- [373] O. Gunawan, Y. P. Shkolnikov, K. Vakili, T. Gokmen, E. P. De Poortere, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. **97**, 186404 (2006).
- [374] V. W. Scarola, J. K. Jain, and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **88**, 216804 (2002).
- [375] A. Wójs, G. Möller, and N. R. Cooper, Journal of Physics: Conference Series **334**, 012048 (2011).
- [376] X.-G. Wen, ArXiv e-prints (2016), 1610.03911.
- [377] H. Kjønsberg and J. Myrheim, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 537 (1999).
- [378] H. Kjønsberg and J. M. Leinaas, Nucl. Phys. B **559**, 705 (1999).
- [379] G. S. Jeon, K. L. Graham, and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **91**, 036801 (2003).
- [380] G. S. Jeon, K. L. Graham, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **70**, 125316 (2004).
- [381] N. Regnault, M. O. Goerbig, and T. Jolicoeur, Phys. Rev. Lett. **101**, 066803 (2008).
- [382] R. de Gail, N. Regnault, and M. O. Goerbig, Phys. Rev. B **77**, 165310 (2008).
- [383] S. H. Simon, E. H. Rezayi, N. R. Cooper, and I. Berdnikov, Phys. Rev. B **75**, 075317 (2007).

- [384] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **67**, 937 (1991).
- [385] C. Tóke, N. Regnault, and J. K. Jain, Solid State Commun. **144**, 504 (2007).
- [386] M. Baraban, G. Zikos, N. Bonesteel, and S. H. Simon, Phys. Rev. Lett. **103**, 076801 (2009).
- [387] I. V. Kukushkin, J. H. Smet, V. W. Scarola, V. Umansky, and K. von Klitzing, Science **324**, 1044 (2009).
- [388] J. M. Luttinger, Phys. Rev. **119**, 1153 (1960).
- [389] H. J. Schulz, eprint arXiv:cond-mat/9503150 (1995), cond-mat/9503150.
- [390] A. J. Schofield, Contemporary Physics **40**, 95 (1999).
- [391] M. Yamanaka, M. Oshikawa, and I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **79**, 1110 (1997).
- [392] M. Oshikawa, Phys. Rev. Lett. **84**, 3370 (2000).
- [393] K. B. Dave, P. W. Phillips, and C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **110**, 090403 (2013).
- [394] C. M. Varma, Z. Nussinov, and W. van Saarloos, Phys. Reports **361**, 267 (2002).
- [395] D. T. Son, Phys. Rev. X **5**, 031027 (2015).
- [396] M. Barkeshli, M. Mulligan, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **92**, 165125 (2015).
- [397] S. A. Kivelson, D.-H. Lee, Y. Krotov, and J. Gan, Phys. Rev. B **55**, 15552 (1997).
- [398] R. K. Kamilla and J. K. Jain, Phys. Rev. B **55**, 9824 (1997).
- [399] S. M. Girvin and T. Jach, Phys. Rev. B **29**, 5617 (1984).
- [400] M. Stone, *Quantum Hall Effect* (World Scientific, 1992).
- [401] E. Rezayi and N. Read, Phys. Rev. Lett. **72**, 900 (1994).
- [402] A. C. Archer and J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **110**, 246801 (2013).
- [403] A. C. Balram, A. Wójs, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **88**, 205312 (2013).
- [404] D. Kamburov, M. A. Mueed, M. Shayegan, L. N. Pfeiffer, K. W. West, K. W. Baldwin, J. J. D. Lee, and R. Winkler, Phys. Rev. B **89**, 085304 (2014).
- [405] V. Melik-Alaverdian and N. E. Bonesteel, Phys. Rev. B **52**, R17032 (1995).
- [406] N. Trivedi and J. K. Jain, Mod. Phys. Lett. B **05**, 503 (1991).
- [407] E. H. Rezayi and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **44**, 8395 (1991).