Egyszerű összefonódott rendszerek geometriája és a fekete lyuk-qubit megfelelés

írta

Lévay Péter Pál

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Fizikai Intézet
Elméleti Fizika Tanszék

Akadémiai Doktori Értekezés Tézisfüzete

A Magyar Tudományos Akadémia
Doktori Tanácsának
Fizikai Tudományok Osztályának
Részecskefizikai Tudományos Bizottságának számára az

MTA doktora cím elnyeréséért

MŰEGYETEM 1782

2017

dc_1382_17

A tézispontokhoz kapcsolódó publikációk

[1] Péter Lévay. The geometry of entanglement: metrics, connections and the geometric phase. *Journal of Physics A*, 37(5):1821, 2004.

[2] Péter Lévay. Geometry of three-qubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 71:012334, Jan 2005.

[3] Péter Lévay. On the geometry of four-qubit invariants. *Journal of Physics A*, 39(30):9533, 2006.

[4] Péter Lévay. Stringy black holes and the geometry of entanglement. *Phys. Rev. D*, 74:024030, Jul 2006.

[5] Péter Lévay. Strings, black holes, the tripartite entanglement of seven qubits, and the Fano plane. *Phys. Rev. D*, 75:024024, Jan 2007.

[6] Péter Lévay. Three-qubit interpretation of BPS and non-BPS STU black holes. *Phys. Rev. D*, 76:106011, Nov 2007.

[7] Péter Lévay. Attractors, black holes and multiqubit entanglement. In Stefano Bellucci, editor, *The Attractor Mechanism*, Springer Proceedings in Physics. Springer, 2010.

[8] Péter Lévay. STU black holes as four-qubit systems. *Phys. Rev. D*, 82:026003, Jul 2010.

[9] Péter Lévay. Qubits from extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 84:125020, Dec 2011.

[10] Péter Lévay. Two-center black holes, qubits, and elliptic curves. *Phys. Rev. D*, 84:025023, Jul 2011.

[11] Péter Lévay and Frédéric Holweck. Embedding qubits into fermionic Fock space: Peculiarities of the four-qubit case. *Phys. Rev. D*, 91:125029, Jun 2015.

[12] Péter Lévay, Szilvia Nagy, and János Pipek. Elementary formula for entanglement entropies of fermionic systems. *Phys. Rev. A*, 72:022302, Aug 2005.

[13] Péter Lévay, Metod Saniga, and Péter Vrana. Three-qubit operators, the split Cayley hexagon of order two, and black holes. *Phys. Rev. D*, 78:124022, Dec 2008.

[14] Péter Lévay, Metod Saniga, Péter Vrana, and Petr Pracna. Black hole entropy and finite geometry. *Phys. Rev. D*, 79:084036, Apr 2009.

[15] Péter Lévay and Gábor Sárosi. Hitchin functionals are related to measures of entanglement. *Phys. Rev. D*, 86:105038, Nov 2012.

[16] Péter Lévay and Szilárd Szalay. Attractor mechanism as a distillation procedure. *Phys. Rev. D*, 82:026002, Jul 2010.

[17] Péter Lévay and Szilárd Szalay. STU attractors from vanishing concurrence. *Phys. Rev. D*, 83:045005, Feb 2011.

[18] Péter Lévay and Péter Vrana. Three fermions with six single-particle states can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, 78:022329, Aug 2008.

[19] Péter Lévay. Thomas rotation and the mixed state geometric phase. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(16):4593, 2004.

[20] Péter Lévay. On the geometry of a class of n -qubit entanglement monotones. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(41):9075, 2005.

Előzmények

A kvantum információelmélet megjelenésével [Fey82, Deu85, DiV95, Sho99] nyilvánvalóvá vált, hogy a kvantumos összefonódottság jelensége nemcsak az elmélet szokatlanságát szemlélteti, hanem ugyanakkor egy olyan fontos *erőforrást* is biztosít, melynek segítségével javunkra fordíthatjuk a kvantumos világ furcsaságait. Ez az erőforrás reményeink szerint lehetővé teszi majd olyan kvantum számítógépek építését, melyek bizonyos számítástechnikai feladatok elvégzését látványosan jobb hatásfokkal képesek biztosítani mint a jelenleg jólismert klasszikus társaik [Sho99, NC00].

A terület fejlődésének első évtizedében a kvantum információelmélettel kapcsolatos elsődleges törekvések a kvantum számítógépek megépítésének ideája köré csoportosultak. A későbbi felfedezések azonban, mint például a kvantum teleportáció jelensége [BBC+93], a kvantumelmélet alapkérdéseinek összefonódottság elméleten alapuló újragondolására is késztették a kutatókat.

A 2006-os évtől kezdődően, az összefonódottsággal kapcsolatos elméleti kérdések vizsgálatában különösen fontos szerepet kaptak a geometriai módszerek [BŽ06]. A geometriai módszerek alkalmazása a tudomány történetében alapvető fontosságú. Kepler híres mondása, "Ubi materia, ibi geometria"[1], a természet alapvető kölcsönhatásainak feltérképezésében mély jelentéssel bíró alapelvnek bizonyult. Ezt szem előtt tartva nem meglepő, hogy a kvantumos összefonódottság geometriai jellegű tárgyalása, a terület fenti hagyományok szellemében történő további, mélyebb, megértését tette lehetővé.

Az összefonódottság elméleti aspektusainak vizsgálatával párhuzamosan, a kvantumszámításon kívüli egyéb érdekes alkalmazások robbanásszerű elterjedését is megfigyelhettük. Az összefonódottság elméleti módszerek behatoltak a szilárdtestfizikus, a kvantumkémikus, az atom és molekula fizikus eszköztárába. Ezt követően a kvantum információelmélettel kapcsolatos filozófia megváltozott. Az utóbbi évtizedben az összefonódottsággal kapcsolatos ismereteinket a kutatók fokozatosan egy olyan új *nyelvként* kezdték használni, melynek segítségével mélyebb bepillantást nyerhetünk a fent felsorolt területek fizikai problémáiba.

A nagyenergiás fizika (részecskefizika, téridő-fizika, húrelmélet stb.) az összefonódottság elmélet által produkált kihívásokra viszonylag későn reagált. 2005-ben például, a nagyenergiás elméleti fizikai archívumban, mindössze 22 olyan cikket találunk, melynek a címében az "entanglement" szó szerepel. 2015-ben ugyanez a szám már 220.

Az érdeklődés növekedtét a Ryu-Takayanagi páros Holografikus Összefonódottsági Entrópiával [RT06] (HÖE), illetve a Duff-Kallosh-Linde trió Fekete Lyuk/ Qubit Megfeleléssel (FLYQM) kapcsolatos vizsgálatainak [Duf07, KL06] 2006 elején történő megjelenésével hozhatjuk kapcsolatba.

A HÖE, a már húsz éve az érdeklődés homlokterében álló, és számos területen igazolt AdS/CFT megfelelés továbbgondolásából született, kiemelkedő fontosságú eredmény. A HÖE alapötlete szerint, egy magasabb dimenziós tartományban értelmezett gravitációs rendszer állapotairól, a tartomány *határán* értelmezett kvantumelméletek összefonódott állapotai (kvantum) információt kódolnak.

A FLYQM az irodalomban kevésbé ismert, az egyszerű összefonódott rendszerek, és a húrelméleti fekete-lyuk megoldások szimmetriáinak hasonlóságát kihasználó módszer. A FLYQM segítségével a megfelelés egyik oldalán kidolgozott módszerekkel a másik oldalnak megfelelő területen kaphatunk értékes eredményeket [BDL12]. Azonban amig a HÖE fizikai szempontból jól motivált, addig a FLYQM fizikai alapjai ezidáig tisztázatlanok. Tekintettel arra, hogy a FLYQM az összefonódott rendszerek geometriai tulajdonságaival kapcsolatos, ezért természetes

[1] "Ahol anyag, ott geometria."

ötlet, hogy az alapok tisztázásáig, az összefonódottsággal kapcsolatos geometriai módszereket ezen az érdekes területen alkalmazzuk.

A 2016 elején a Simons Foundation szponzorálásában beindult "It from Qubit" program a kvantum információelmélet és a HÖE fizikusainak erőfeszítéseit egy közös projektbe hangolja össze. Ezzel egy, az eredetileg a FLYQM által már 2006-ban felvetett lehetőség valósult meg. Ez a FLYQM-vel kapcsolatos ismeretek összefoglalásának, és HÖE-vel való esetleges kapcsolódási pontok tisztázásának, újabb aktualitást adott.

Célkitűzések

Az összefonódottság elmélet területén 2003-ban kezdődött kutatómunkám elsődleges célja az összefonódottság jelenségének geometriai szemléleten nyugvó alaposabb megértése volt. A FLYQM 2006 elején történt megjelenése után azonban, a munkámban egyre nagyobb szerepet kapott a húrelméleti fekete lyuk megoldásokkal kapcsolatos eredmények összefonódottság elméleti vonatkozásainak vizsgálata.

A munkám első felében az összefonódottságot mint egy *erőforrást* vizsgálom. Bármely erőforrás esetén alapvető fontosságú az erőforrás különböző típusainak elkülönítése, illetve számszerűsítése. Az összefonódott fizikai rendszerek állapotainak matematikai reprezentánsait egy Hilbert tér vektorai adják. Ebben a képben az összefonódottság típusainak, a Hilbert tér vektorainak, egy fizikailag jól motivált csoporthatás szerinti, ekvivalenciaosztályai felelnek meg. Ezeknek az "összefonódottsági osztályoknak" az elkülönítésére, és az összefonódottság számszerűsítésére, polinom invariánsokat és kovariánsokat használhatunk. Ezek az állapotokvektorok komplex amplitúdóiban vett olyan polinomiális kifejezések, melyek a csoport hatásra nézve invariánsak vagy kovariánsak. Az összefonódottsági klasszifikáció alapja annak vizsgálata, hogy ezek a mennyiségek bizonyos osztályokon zérus, másokon nem zérus értékeket vesznek fel. Az invariánsok és kovariánsok eltűnése által meghatározott polinomiális relációk speciális algebrai varietások megjelenésére vezetnek. Ezek az algebrai geometriai struktúrák természetes módon kapcsolatba hozhatók bizonyos karakterisztikus összefonódottsági osztályokkal. Ennek a legfontosabb következménye az, hogy az összefonódottság jelenségét geometriai módszerekkel vizsgálhatjuk.

A dolgozat második felében az összefonódottsággal kapcsolatos ismereteink rendszerét mint egy új *nyelvet* fogom fel. A célom itt az, hogy a FLYQM filozófiájának megfelelően, újragondoljam a húrelméleti fekete lyuk megoldásokkal kapcsolatos bizonyos ismereteinket. Vizsgálataim során szeretném megmutatni azt, hogy ennek során számos, már ismert, eredmény duális nyelvezetben történő értékes átfogalmazásán túl, mindkét terület új eredményekkel is gazdagodik. A FLYQM-t módszerként felhasználó szemléletem pragmatikus. Ez azt jelenti, hogy a FLYQM esetleges fizikai okainak firtatása helyett, azt csupán használom. Konkrétan ez az *egyik* területen kifejlesztett ábrázolás és invariánselméleti technikák felhasználását jelenti arra, hogy mélyebb bepillantást nyerhessek a *másik* terület matematikai szerkezetébe.

Természetesen a FLYQM matematikai megfelelései egy egységesítő fizikai alapelv működésére *is* utalhatnak. Különösen vonzó lehetőség a FLYQM kapcsán felbukkanó ötletek, és a HÖE, kapcsolatának további kutatás során történő feltárása. Amennyiben ez a kapcsolat valóban létezik, az a FLYQM-t a fizikai szempontból is érdekes dualitások közé emelné. A FLYQM eredményeinek bemutatása azt a célt is szolgálja, hogy megteremtsem annak a jövőbeli kutatásnak az alapjait, mely ezt az érdekes területet az "It from Qubit" program szellemi áramlatához csatolja.

Tudományos eredmények

T1. Elemi két-qubit összefonódott rendszerek geometriáját vizsgáltam a második Hopf fibrálás segítségével. Megmutattam, hogy ebben a speciális esetben a Schmidt decompozíciónak, a geometriai fázisfaktorok nyelvén, szemléletes geometriai jelentés tulajdonítható [1]. Ezen vizsgálatok kapcsán bevezettem a Pancharatnam fázis kvaterniós megfelelőjét [1, 19], melynek interferometriai módszerekkel történő kimutatásának lehetősége is felmerült [JES+11].

T2. N-qubit rendszerek SLOCC összefonódottsági mértékeinek algebrai geometriai szerkezetét vizsgáltam [2, 3, 20]. A három-qubit rendszerek SLOCC osztály szerkezetének megértésére twisztor geometriai módszereket vezettem be [2]. Ennek kapcsán az összefonódottság megosztásával kapcsolatos Coffman-Kundu-Wootters-egyenlőtlenségnek [CKW00] egy egyszerű geometriai értelmezését adtam [2]. Négy-qubit rendszerekre az algebrailag független SLOCC mértékek és az elliptikus görbék egy speciális osztálya közötti kapcsolatot találtam [10, 3]. A kapott kapcsolatot az STU modell kétcentrumú fekete-lyuk megoldásainak osztályozására használtam [10]. Grassmann varietáson alapuló új N-qubit összefonódottsági monoton SLOCC mértékeket konstruáltam [20].

T3. Fermionikus összefonódottság jelenségét vizsgáltam geometriai módszerekkel [12, 18, 11]. A fermion állapotok szeparabilitási kritériumaként a multilineáris algebrából ismeretes Plücker relációkat javasoltam [18]. A kvantumkémiából jól ismert N-reprezentálhatósági problémával kapcsolatos, u.n. Borland-Dennis (hat és hét egyrészecske állapotú) háromfermionos, esetekben új összefonódottsági mértékeket vezettem be [18, 15]. Ezen példák kapcsán kimutattam, hogy a három fermion rendszerekbe a három-qubit rendszerek természetes módon beágyazhatók. Kimutattam, hogy tetszőleges számú qubit hasonló szellemben történő fermionikus beágyazásának problémája egy, a fermionikus összefonódottság fogalmát a Clifford algebrák keretén belül általánosító formalizmus segítségével, elegáns módon, teljesen általánosan is vizsgálható [11].

T4. Elsőként mutattam rá, bizonyos speciális tulajdonságú összefonódott rendszerek, és a kivételes Lie algebrákkal kapcsolatos Freudenthal-rendszerek érdekes kapcsolatára [5, 18]. Felvetettem annak a lehetőségét, hogy ezen rendszerek egyértelműen meghatározott SLOCC összefonódottsági mértékei, és az úgynevezett mágikus szupergravitációs elméletek fekete lyuk entrópiaformulái egymásnak megfeleltethetők [5]. A későbbiek során kiderítettem, hogy a fenti rendszerek a Sato és Kimura által vizsgált úgynevezett prehomogenitási tulajdonsággal rendelkeznek. Ennek folyományaként beláttam, hogy az összefonódottsági mértékek unicitása a differenciálgeometriából és a húrelméletből jólismert variációs Hitchin funkcionálok létezésével kapcsolatos [15]. Ez a felismerés az összefonódottsági mértékek és a fekete lyuk entrópiaformulák közötti fenti kapcsolat matematikai megértését tette lehetővé.

T5. Húrelméleti kompaktifikációval származtatható, $N = 2$ szupergravitációs modellek keretein belül, statikus, extremális, szuperszimmetrikus (BPS) és nem szuperszimmetrikus (nem-BPS) fekete lyuk megoldások matematikai szerkezetét tanulmányoztam [4, 6, 16, 17]. Az STU-modell esetén, a modell dualitási szimmetriáját implementáló, egy a gyűrési faktort, a komplex struktúra modulusokat, az elektromos és mágneses töltéseket magába foglaló három-qubit állapotot vezettem be [4, 16]. Megmutattam, hogy ekkor a modulusterek stabilizációját leíró attraktor mechanizmus, a FLYQM duális leírásában, GHZ-szerű állapotok eseményhorizonton történő desztillációjaként interpretálható [4, 6]. Megfigyeltem, hogy a horizonton kapható BPS állapotok a modulusok variálásával kapható bit és előjel flip hibákra nézve stabilak, míg a nem-BPS állapotokra a hibák két különböző osztályba eső jellegzetes szerkezetet mutatnak [6]. Felvetettem annak a lehetőségét, hogy az attraktor folyamok ezen jellemvonásait egy a hibajavító kódokkal kapcsolatos formalizmusban értelmezzük [6, 7, 16]. Megmutattam, hogy a BPS esetben az attraktor egyenletek pontosan akkor teljesülnek, ha a bevezetett modulusfüggő három-qubit állapot kevert állapoti konkurrenciái eltűnnek [17].

T6. Elsőként mutattam rá az STU modell és a négy-qubit rendszerek $SO(8)$ csoport Cartan dekompozícióján alapuló kapcsolatára [5]. Ezt követően Bergshoeff és társai [BCP+09], illetve és Bossard és társai [BMP10] észrevételeit általánosítva az STU modellben ezidáig használt három-qubites szemlélet helyett egy négy-qubit összefonódottságon alapuló szemléletet vezettem be. Megmutattam, hogy stacionárius fekete lyuk megoldásokra, a negyedik qubit megjelenése az időszerű dimenzióredukcióval kapcsolatos, a gyűrési faktort és a NUT töltést is magábafoglaló Ehlers csoport [Ehl57, Ger71] megjelenésével kapcsolatos [8]. Elsőként mutattam rá arra, hogy a nem extremális illetve az extremális STU fekete lyuk megoldások, féligegyszerű illetve nilpotens SLOCC osztályokkal állnak kapcsolatban [8]. Többek között ez a megfigyelés motiválta a négy-qubit nilpotens állapotok és az extremális fekete lyuk megoldások közötti explicit kapcsolat, Borsten és társai [BDD+10] által elvégzett részletes kidolgozását.

T7. Borsten és társai felvetették azt a lehetőséget, hogy a FLYQM-ben felbukkanó elemi qubit rendszereket, az extra dimenziókra feltekeredő membránok csavarodási konfigurációiként értelmezzük [BDD+08]. A IIB húrmodell toroidális kompaktifikációja esetén megmutattam, hogy ezt a sejtést matematikailag precízen az extra dimenziók kohomológiájának nyelvén igazolhatjuk [9].

T8. A toroidális kompaktifikációval kapható négy dimenziós E_7 szimmetrikus entrópiaformula szerkezetét vizsgáltam [5]. Megmutattam, hogy az E_7 csoport 56 dimenziós ábrázolásán alapuló entrópiaformula szerkezete, a Fano sík segítségével jellemezhető, szemléletes, véges geometriai jelentéssel rendelkezik. Az E_7 entrópiaformulával kapcsolatos négydimenziós $N = 8$ maximális szupergravitációs modell 8, 24 illetve 32 töltéses csonkítása, a Fano sík egy pontjának, egyenesének illetve annak komplementumának feleltethető meg. Megmutattam, hogy az entrópiaformula 32 töltéses csonkítása az általánosított Hichin funkcionállal kapcsolatos invariánst adja [15]. A későbbiekben megmutattam, hogy ezt a csonkítást, hat qubit speciális fermionikus beágyazásával is értelmezhetjük [11]. Az a tény, hogy a Fano síkon alapuló valamennyi csonkítás hétféleképpen végezhető el, a FLYQM bevezetése előtt ismeretlen volt. Megmutattam, hogy a csonkítások hét különböző verziója között forgató hetedrendű generátor három-qubit CNOT kapukkal elegáns módon felírható [13]. Megadtam a Fano sík automorfizmus csoportjaként ismert Klein csoport további generátorainak a centrális töltés mátrixon történő hatását [13]. Mivel a Klein csoport az $N = 8$ elmélet elektromos-mágneses dualitási csoportjának egy részcsoportját adja, ez az eredmény az U-dualitási csoport mélyebb megértését tette lehetővé. Rámutattam arra is [7], hogy az E_7 csoport talált véges geometriai szerkezete a klasszikus Hamming kóddal áll szoros kapcsolatban. Felhívtam a figyelmet az ötdimenziós fekete-lyuk entrópiaformulák szerkezetének véges geometriai aspektusaira [14]. Ezek az eredmények, véges geometriai szakemberek bevonásával, további matematikai kutatás kiindulópontjává váltak[2]. Az irodalomban ezidáig ismeretlen, a Fano sík hét pontjára történő STU csonkításoknak a kozmológiai alkalmazását illetően lásd Ferrara és Kallosh 2016-os dolgozatát [FK16].

[2]A Szerző ezzel kapcsolatos munkássága nem tárgya a dolgozatnak. A véges geometriai kutatás publikációit, lásd a Szerző publikációs listájában.

Irodalomjegyzék

[BBC+93] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70(13):1895–1899, Mar 1993.

[BCP+09] E. Bergshoeff, W. Chemissany, A. Ploegh, M. Trigiante, and T. Van Riet. Generating geodesic flows and supergravity solutions. *Nuclear Physics B*, 812(3):343 – 401, 2009.

[BDD+08] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, H. Ebrahim, and W. Rubens. Wrapped branes as qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 100:251602, Jun 2008.

[BDD+10] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, A. Marrani, and W. Rubens. Four-qubit entanglement classification from string theory. *Phys. Rev. Lett.*, 105:100507, Sep 2010.

[BDL12] Leron Borsten, Michael J. Duff, and Péter Lévay. The Black-Hole/Qubit Correspondence: an up-to-date review. *Classical and Quantum Gravity*, 29, 2012.

[BMP10] Guillaume Bossard, Yann Michel, and Boris Pioline. Extremal black holes, nilpotent orbits and the true fake superpotential. *Journal of High Energy Physics*, 2010(1), 2010.

[BŻ06] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2006.

[CKW00] Valerie Coffman, Joydip Kundu, and William K. Wootters. Distributed entanglement. *Phys. Rev. A*, 61(5):052306, Apr 2000.

[Deu85] D. Deutsch. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 400(1818):97–117, 1985.

[DiV95] David P. DiVincenzo. Quantum computation. *Science*, 270(5234):255–261, 1995.

[Duf07] M. J. Duff. String triality, black hole entropy, and Cayley's hyperdeterminant. *Phys. Rev. D*, 76:025017, Jul 2007.

[Ehl57] J. Ehlers. *PhD Thesis*. Hamburg University, 1957.

[Fey82] Richard P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6):467–488, 1982.

[FK16] Sergio Ferrara and Renata Kallosh. Seven disk manifold, alpha attractors and b-modes. *arXiv:1610.04163*, 2016.

[Ger71] Robert Geroch. A method for generating solutions of Einstein equations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(6):918–924, 1971.

[JES+11] Markus Johansson, Marie Ericsson, Kuldip Singh, Erik Sjöqvist, and Mark S Williamson. Correlation-induced non-abelian quantum holonomies. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(14):145301, 2011.

[KL06] Renata Kallosh and Andrei Linde. Strings, black holes, and quantum information. *Phys. Rev. D*, 73:104033, May 2006.

[NC00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 1 edition, October 2000.

[RT06] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. Holographic derivation of entanglement entropy from the anti–de Sitter space/conformal field theory correspondence. *Phys. Rev. Lett.*, 96:181602, May 2006.

[Sho99] Peter W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Review*, 41(2):303–332, 1999.