

Válaszok Bántay Péter opponensi véleményére

Szeretném megköszönni Dr. Bántay Péternek a terjedelmes, és a szokatlan matematikai fogalmaktól hemzsegő értekezésem bírálatával kapcsolatos fáradságos munkáját, kritikai megjegyzéseit. A bíráló megjegyzésével összhangban kezdetben magam is úgy gondoltam, hogy az Olvasó matematikai fogalmak közötti tájékozódását célszerű néhány fogalom magyarázó függelék segítségével megkönnyíteni. Ez azonban az értekezés terjedelmét tovább növelte volna. Ezért később célszerűbbnek láttam, a fogalmakkal kapcsolatos információt rögtön a felhasználásukkal kapcsolatos fizikai környezetbe beleszőni. Sajnos ez, mint ezt a bíráló meg is jegyezte, oda vezetett, hogy a releváns matematikai definíciókat csak fáradságos munkával lehet visszakeresni.

A bíráló felmerült kérdéseire a válaszaim az alábbiak.

1. A SLOCC csoport invariáns polinomjaiból származtatott összefonódottsági mérőszámok segítségével osztályozhatók a csoport pályái az állapottéren. Felmerül a gondolat, hogy célszerű lehetne bizonyos esetekben nem-polinomiális invariánsok alkalmazása, ami természetesen más geometriai hátteret adna a kérdéskörnek. Végeztek-e ilyen típusú vizsgálatokat, és ha igen, akkor milyen eredménnyel?

Nem-polinomiális lokális unitér invariánsra példa a híres és sokat használt von Neumann entrópia. Két részrendszer esetén, nem-polinomiális mennyiség a Schmidt dekompozícióval kapható *Schmidt rang* is. Egy $|\psi\rangle$ állapot egy $|\varphi\rangle$ állapotba SLOCC konvertálható akkor és csak akkor ha $|\psi\rangle$ Schmidt rangja nem kisebb mint $|\varphi\rangle$ Schmidt rangja. Ez a mennyiség tehát *monoton* abban az értelemben, hogy a Schmidt rang SLOCC transzformációk hatására nem növekszik.

A Schmidt rang több részrendszeres rendszerekre történő általánosítása a *tenzor rang*. Ez szintén nem-polinomiális mennyiség. Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ ahol a $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots, N$ Hilbert terek. Ekkor a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapot tenzor rangja, $rk(\psi)$, az olyan $\mathcal{H}$ -beli szorzat állapotok számának legkisebbike melyek lineáris burka tartalmazza $|\psi\rangle$ -t. Három és négy qubit esetére a tenzor rang geometriai hátterét először J-L. Brylinski vizsgálta (J-L. Brylinski: quant-ph/0008031). Például az értekezésben sokszor szereplő GHZ és W állapotok tenzor rangja kettő illetve három. Az Schmidt ranghoz hasonlóan a tenzor rang is rendelkezik a fent említett SLOCC transzformációkkal szembeni monotonitási tulajdonsággal: ha egy $|\psi\rangle$ állapot egy $|\varphi\rangle$ állapotba konvertálható akkor $rk(\psi) \geq rk(\varphi)$. Az állítás megfordítása általában nem igaz. Azonban minden d -állapotú N -részrendszeres GHZ állapottal ($|GHZ_d^N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle^{\otimes N}$) SLOCC ekvivalens $|\psi\rangle$ állapot egy $|\varphi\rangle$ állapotba konvertálható akkor és csak akkor ha $|\psi\rangle$ tenzor rangja nem kisebb mint $|\varphi\rangle$ tenzor rangja. (E. Chitambar, R. Duan, and Y. Shi, Phys. Rev. Lett. **101**, 140502 (2008).)

Egyéb, matematikailag bonyolultabb módon definiálható nem-polinomiális mennyiségeket illetően lásd volt PhD hallgatóm Vrana Péter más társszerzőkkel publikált dolgozatának 3. fejezetét (M. Christandl, P. Vrana and J. Zuiddam, arXiv:1709.07851).

Az értekezés eredményei alapján qubit rendszereket beágyazhatunk fermionikus rendszerekbe. Ennek megfelelően a qubit invariánsok fermionikus invariánsok speciális eseteiként állnak elő (lásd a téziszfüzet 11.-es publikációját). Ebből fakad a kérdés: vannak-e a multiqubit rendszerekre definiálható tenzor rangnak olyan fermionikus általánosításai, melyek alternatív (a dolgozatban tárgyalt általánosított SLOCC klasszifikációnál) durvább klasszifikációt tesznek lehetővé? Egy ilyen nem-polinomiális mennyiség a fermionikus állapotokat reprezentáló spinorok úgynevezett *nullitása*.

A spinorok nullitását a fermionikus formalizmusban az alábbi módon definiálhatjuk (A. Trautman és K. Trautman, Journal of Geometry and Physics, 15, 1 (1994)). N fermion esetén N keltő és N eltüntető operátorunk van, melyeket a másodkvantálás során egy nemdegenerált (N, N) szignatúrájú kvadratikus formával ellátott $2N$ dimenziós W vektortérből származtatunk. (Ebbe a kvadratikus formába vannak a szokásos fermionikus antikommutációs relációk bekódolva.) A keltő és eltüntető operátorok azon alterét, melyek egy adott fermionikus $|\psi\rangle$ állapotot (spinort) eltüntetnek, a W vektortér E_ψ annihilátor alterének nevezzük. $|\psi\rangle$ nullitása: az E_ψ altér dimenziója. A nullitás könnyen beláthatóan egy általánosított SLOCC invariáns. A tiszta spinorokra E_ψ a kvadratikus formára nézve maximálisan totálisan izotróp. Ezért ezekre a nullitás N . A tiszta spinorok olyan fermionikus állapotoknak felelnek meg, melyek az általánosított SLOCC értelemben teljesen szeparálhatók. Fizikai szempontból ezek azok az állapotok melyeket a fermionikus módus operátoroknak pontosan a fele eltüntet (kvázi részecske vákuum állapotok). A nullitás tehát egy szám mely $0, 1, 2, \dots, N-1, N$ értékeket vehet fel. Megmutatható, hogy a zérus nullitású állapotok a rögzített kiralitású spinorok (fermionikus összefonódott állapotok) terében sűrűn helyezkednek el.

A tenzor ranghoz legközelebb álló fermionikus invariánst, kissé ironikusan, *tisztasági indexnek* nevezhetnénk. Ez azon tiszta spinorok minimális száma, melyek lineáris kombinációjaként a $|\psi\rangle$ spinort elő tudjuk állítani. Nyilván a tisztasági index kisebb egyenlő 2^{N-1} -nél, hiszen minden királis spinor kifejezhető a tiszta spinorok bázisában (fermionikus Fock tér királis bázisa). A tisztasági index meghatározása (a tenzor ranghoz hasonlóan) komplexitás elméleti szempontból nem egyszerű. A tisztasági index monotonitásának, és esetleges fizikai alkalmazásainak tanulmányozása további vizsgálatokat igényel.

2. Mind a tézisekben, mind az értekezés bevezető részében a szerző hangsúlyozza az összefonódottság, illetve annak mérőszámai "erőforrás" jellegét, például a kvantuminformatikában. Hogyan képzelhetjük ezt el: az összefonódottsági mérőszámok felhasználhatók a kvantum-algoritmusok analízisében, vagy valami közvetett módon kerülnek a képbe? Esetleg más típusú alkalmazásokra kell gondolnunk?

Az összefonódottság mint erőforrás szemlélet illusztrálására a legegyszerűbb példa a kvantum teleportációs protokoll, melynek során Alice egy, a számára ismeretlen, $|\psi\rangle$ állapotú qubitot szeretne Bobnak küldeni (C. H. Bennett et. al., Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993)). A protokoll végrehajtásához három részrendszer kell, három qubit. Kezdetben az első az ismeretlen $|\psi\rangle$, a második és harmadik (Alice és Bob

qubitjei) pedig a maximálisan összefonódott $|\Phi\rangle_{23}$ Bell állapotban van. Az első és második részrendszer Alice a harmadik Bob birtokában van. A teljes kezdeti állapot tehát egy 1(23) típusú biszeparálható három-qubit állapot: $|\psi\rangle_1 \otimes |\Phi\rangle_{23}$. Ezt az állapotot, az értekezés 2.5.1. fejezetében használt $\tau_{123}, \tau_{1(23)}, \dots, \tau_{23}$ összefonódottsági mérőszámokkal jellemezhetjük.

A protokoll során Alice az 1. és 2. rendszereken egy Bell bázisban (lásd 2.4 fejezet) történő mérést hajt végre. Ezt követően a mérési eredményt klasszikus kommunikációs csatornán (postagalamb, telefon stb.) megosztja Bobbal. A mérési eredmény ismeretében Bob a 3. qubiten (Alice 4 lehetséges mérési eredményétől függően, Alice és Bob által korábban egyeztetett szabály szerint) egy elemi (identitás, x,y,z, tengely körüli 180 fokos forgatás) lokális unitér transzformációt hajt végre. Ennek eredményeképpen a végállapot egy $|\Psi\rangle_{12} \otimes |\psi\rangle_3$ általános alakú (12)3 típusú $\tau'_{123}, \tau'_{1(23)}, \dots, \tau'_{23}$ összefonódottsági mérőszámokkal jellemezhető biszeparálható állapot lesz. A protokoll során tehát a 2. és 3. qubit összefonódottságát felhasználva, lokális operációkat és klasszikus kommunikációt felhasználva a $|\psi\rangle$ állapotot Bobnak teleportáltuk. A protokoll alkalmazásának során az erőforrás (az összefonódott három-qubit állapot) összefonódottsági mérőszámai megváltoztak, és a $|\psi\rangle$ állapot Alicétől Bobhoz került. A protokoll alapja az, hogy Alice és Bob között egy összefonódottságot biztosító úgynevezett két-qubit kvantum csatorna üzemelt.

A teleportációs protokollnak számos új változata ismeretes. Lehet például három-qubit kvantum csatornát is használni. Ekkor a protokollt három résztvevő Alice, Bob és Charlie hajtják végre. A három-qubit kvantum csatorna ekkor természetesen többféle összefonódottságot is tartalmazhat: például GHZ vagy W-típusút. Lásd például J. Joo et.al. New Journal of Physics Vol. 5, 136, (2003). Ez esetben a kiindulási és végállapotok speciális összefonódottsági mérőszámokkal jellemzett 1(234) illetve (123)4 típusú négy-qubit állapotok.

Általában a kvantum információs protollokban tiszta állapotok helyett kevert állapotok szerepelnek, és a használt kvantum csatornák is bonyolultabbak. Ekkor az értekezésben használt mennyiségek helyett, fizikai szempontból könnyebben értelmezhető mennyiségeket használnak, például "csatorna kapacitás", "relatív entrópia" stb. Az összefonódottság erőforrás jellegéből adódó viselkedése és a termodinamika törvényei között egy érdekes analógia áll fenn. (M. B. Plenio and V. Vedral, Contemporary Physics, 39, 431 (1998)). Ez az analógia számos érdekes eredményre vezet. Lásd például: F. Brandao és M. B. Plenio, Nature Physics 4, 873 (2008), quant-ph:0810.0026.

3. A "fekete lyuk-qubit" megfeleléssel kapcsolatban szembetűnő, hogy az abban előforduló összefonódottsági mértékek, illetve az azok alapjául szolgáló kvantumrendszerek viszonylag egyszerű szerkezetűek. A vizsgált fekete lyuk megoldások valamilyen tulajdonsága felelős ezért, vagy talán a vizsgált húrkompaktfikációk speciális volta?

A vizsgált húrmodellek speciális $\mathcal{M}$ sokaságokra történő kompaktifikációja felelős ezért. Az értekezés példáinak nagy része IIA illetve IIB típusú húrelméletek hat dimenziós tóruszra ($\mathcal{M} = T^6$) történő kompaktifikálásával kapcsolatos. Ezért azt mondhatjuk, hogy lényegében a T^6 homológiájában rejlő struktúra írható át egyszerű összefonódott kvantumrendszerek struktúrájába. Például: a legegyszerűbb

IIB esetben, a D3 bránok T^6 három ciklusaira csavarodnak. Ez $\binom{6}{3} = 20$ független lehetőséget enged meg. Másrészt, az összefonódottság elméletben a hat egyrészecke állapotos három fermion állapottér a hat dimenziós vektortér három-formáinak 20 dimenziós tere. Ezen háromformák T^6 koordinátaival parametrizált kohomológiája, a Poincaré dualitáson keresztül áll kapcsolatban T^6 homológiájának három-ciklusaival. Amennyiben T^6 helyett $\mathcal{M} = T^2 \times T^2 \times T^2$ -t veszünk (STU modell a IIB képben) a fenti 20 dimenziós vektorterek helyett 8 dimenziósak jelennek meg. Ezt $\mathcal{M}$ szorzat szerkezetével kombinálva a három-qubit rendszerekkel való analógia nyilvánvaló.

Ami ebben a képben nem annyira magától értetődő, az az összefonódottsági mértékek és a szemiklasszikus fekete lyuk entrópia formulák kapcsolata. De ez sem olyan meglepő ha arra gondolunk, hogy az egyik oldalon szereplő SLOCC (rész)csoportok szerkezete, és a másik oldalon felbukkanó dualitási csoportok szerkezete igen hasonló. Például három qubitra a SLOCC (rész)csoport az $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes 3}$, a klasszikus STU szupergravitációra pedig az $SL(2, \mathbb{R})^{\otimes 3}$, illetve az STU kvantumelméletében ennek $SL(2, \mathbb{Z})^{\otimes 3}$ verziója. Mivel az összefonódottsági mértékek SLOCC invariánsok, a szemiklasszikus entrópia formulák pedig dualitási invariánsok ezért már csak azt kell belátnunk, hogy az analóg összefonódott rendszerek annyira speciálisak, hogy egy *egyértelmű invariánssal* rendelkeznek. A fenti két példa esetében pedig ez valóban így is van.

Amennyiben $\mathcal{M}$ egy tetszőleges *kompakt* Calabi-Yau (CY) sokaság, a fenti analógia nem így működik. A IIB kép D3 bránjai esetében ismét $\mathcal{M}$ homológiájának Poincaré duáltjái a meghatározó szó. Ez pedig lokálisan épp a CY sokaságok komplex struktúra modulustere: $H^3(M)$. Ezeket a kohomológia elemeket azonban általában *nem lehet direkt módon*, valamiféle egyszerű összefonódott rendszerekként reprezentálni.

Az összefonódottság elmélettel való kapcsolat ekkor speciális kvantum gravitációs hatásfunkcionálok (Hitchin funkcionálok) szerkezetével való direkt kapcsolatként realizálódik. Ezen funkcionálokban szereplő p-formákat, illetve spinorokat ugyanis *már lehet speciális fermionikus összefonódott rendszerekként interpretálni*. A kapcsolódási pont az előzőekkel: ezen funkcionálok értéke a kritikus pontban éppen azokat a szemiklasszikus entrópiaformulákat szolgáltatja, melyek a toroidális speciális esetben a már ismert összefonódottsági mértékek.

Érdekes, hogy a fentebb említett *egyértelműség* problémája a Calabi-Yau esetben úgy jelenik meg, hogy a Hitchin funkcionálok alapjául szolgáló egyszerű összefonódott rendszerek prehomogén vektorteret alkotnak, ezek pedig egy egyértelmű (relatív) invariánssal, és egy (a Zariski topológiában) sűrű pályával rendelkeznek. Ez teszi lehetővé azt, hogy a funkcionálokat (egy kvantumelmélet alapjául szolgáló) hatásfunkcionálokként használhassuk.

Lévay Péter Pál

Budapest, 2018. április 5.