Válaszok Benedict Mihály opponensi véleményére

Először is szeretném megköszönni Dr. Benedict Mihálynak a hosszúra sikerült értekezésem bírálatával kapcsolatos munkáját, kritikai észrevételeit, kérdéseit.

A bírálat egyik fontos formai észrevétele szerint a tézispontok eredményeinek szövegbeli visszakeresése nehéz. Az értekezésben a tézispontokkal kapcsolatos publikációkra történt hivatkozásokat *számok* az egyéb hivatkozásokat a szerzők nevének rövidítésével kapcsolatos *betűk* jelzik. Továbbá arra törekedtem, hogy a fejezetcímek utáni hivatkozások utaljanak arra, hogy az abban ismertetett eredmények hol jelentek meg először. Így ahol a fejezetcím után *számok* jelennek meg, ezek arra utalnak, hogy a fejezet a tézisfüzet megfelelő eredményeinek részletes tárgyalását tartalmazza. Sajnos ezt a dolgozat elején explicit módon nem hangsúlyoztam, és ez fölöslegesen megnehezítette a Bíráló munkáját.

A felmerült kérdésekre a válaszaim az alábbiak.

1. Ismeretes-e esetleg olyan rendszer, amelynél az összefonódást illetően a harmadik nemtriviális Hopf-fibrálás játszik szerepet, ahol a fibrált nyaláb az S^{15} gömbfelület az S^8 bázistér fölött?

Igen ismeretes. Ez a dolgozatban is tanulmányozott egyszerű három-qubit rendszer. Ezzel kapcsolatosan lásd B. A. Bernevig and H-D. Chen munkáját (J. Phys. A: Math. Gen., 36, 8325 (2003)). Mint azt az értekezésben kifejtem a két-qubit esetben hasznosnak bizonyult az összefonódottság geometriai reprezentánsául a második Hopf-fibrálás topológiai szerkezetét felhasználni. Ekkor ugyanis az egyik qubit a bázistérben, a másik a fibrumban helyezkedik el. Az összefonódottság fizikai jelenségét ilyenkor a bázis és a fibrum egymáshoz viszonyított nemtriviális topológiai "elcsavarodásának" matematikájával kielégítően leírhatjuk. A három-qubit esetben két qubit helyezkedik el a fibrumban és egy a bázistérben (a qubitek elhelyezése nem egyértelmű). A harmadik Hopf-fibrálás elcsavarodása ebben az esetben csak az (A)(B)(C), A(BC), B(AC), C(AB) típusú biszeparábilis összefonódottsági típusokat képes "felismerni". Tehát az igazán lényeges (GHZ és W típusú) valódi háromrészrendszeres összefonódás geometriai leírására a fibrált nyalábos módszer nem alkalmas. Ez a felismerés vezette a Szerzőt a Grassmann-sokaságokon alapuló algebrai geometriai módszerek vizsgálatához.

2. Kevert állapotok összefonódásáról egy rövid szakasz (2.3) szól az értekezésben, de lényegében nincs szó ezek geometriájáról. A kvaterniós Hopf nyalábra vonatkozó meggondolások kiterjesztése az ott föllépő gömbök belsejére (golyókra), adhat-e valamilyen iránymutatást ez irányban?

Két qubit esetében igen, ad némi iránymutatást, de a kapott kép a két-qubit kevert állapoti összefonódottság jelenségének (ugyancsak) nem kielégítő geometriai reprezentánsát adja. Itt a lényeges pont a Wootters konkurrencián alapuló formációs összefonódottság helyes geometriai reprezentációjának megtalálása lenne. Ebben az irányban érdekes eredményeket találhatunk J. E. Avron és O. Kenneth dolgozatában (Annals of Physics 324.2, 470 (2009)). A kevert állapoti két-qubit állapottér kvaterniós Hopf-fibráláson alapuló (az összefonódottság vizsgálatát még nélkülöző) korai tárgyalása megtalálható J. Dittmann és G. Rudolph (Journal of Geometry and Physics 10, 93 (1992)) munkájában. Kettőnél több qubit kevert állapoti összefonódottságának megértésében a kvaterniós Hopf-fibrálás (és általában a divizió algebrákon alapuló tárgyalás) nem ad lényeges iránymutatást.

3. Honnan származik a Borromeo gyűrűk és a W illetve GHZ állapotok összefonódásának analógiája?

Ismereteim szerint az analógia először (kizárólag a GHZ állapot kontextusában) M. Aravind 1997-es dolgozatában bukkant fel. A dolgozat a "Quantum Potentiality, Entanglement and Passion-at-a-Distance: Essays for Abner Shimony" eds. R. S. Cohen, M. Horne and J. Stachel, Kluwer, Dordrecht 53-59 (1997), kötetben található. A dolgozat fonatcsoportokkal, csomóinvariánsokkal és az úgynevezett topologikus összefonódottsággal való kapcsolatát illetően lásd L. H. Kauffmann és S. J. Lomonaco jr. (New Journal of Physics 4, 73.1–73.18 (2002)) cikkét.

4. A twisztorok kapcsolata a háromqubites rendszerrel segíthet-e a twisztorelmélet eredeti célkitűzésének megvalósítása, a téridő kvantálásának irányába tehető lépések felé?

Erre a kérdésre nehéz röviden válaszolni. A Penrose-féle twistor program (1967) kidolgozásában jelentős szerepet kapott Roger Penrose azon elképzelése, hogy a téridő geometriájának kvantumos természetű megértéséhez annak négydimenziós volta alapvető fontosságú. A twisztor elmélet alapkoncepciója szerint ugyanis, a kvantálás elvégzésének érdekében a *négydimenziós* téridő sokaság helyett annak úgynevezett twisztor terét kell használnunk. Ennek során az igen speciális twisztor megfelelés teszi lehetővé azt, hogy a téridővel kapcsolatos szokásos térelméleti formalizmusunkat a szokatlan twisztor képbe transzformáljuk. A négy (komplex) dimenziós komplexifikált és konform kompaktifikált $\mathcal{M}$ Minkowski téridő esetében a megfelelés geometriai alapját az úgynevezett Klein megfelelés biztosítja. A Klein megfelelés $\mathcal{M}$ bizonyos geometriai objektumai (téridő pontok, fénykúpok stb.) és a három (komplex) dimenziós $\mathcal{P}$ projektív twisztortér geometriai objektumai (pontok, egyenesek, síkok) között kölcsönösen egyértelmű megfelelést létesít. Eredetileg Penrose a fenti megfelelés két fontos jellemvonását hangsúlyozta. Az egyik az, hogy a twisztor megfelelés **nemlokális**, a másik pedig az, hogy a megfelelés a szokásos valós téridő sokaságokon alapuló képet a **komplex** geometria világával hozza kapcsolatba. A nemlokalitás ebben a kontextusban azt jelenti, hogy például $\mathcal{P}$ **egyenes**einek kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetjük $\mathcal{M}$ **pont**jait. Penrose ezzel kapcsolatban hangsúlyozza, hogy a fenti két jellemvonás a kvantumelmélet két fontos jellegzetességével létesít kapcsolatot. Az egyik a kvantumállapotok **komplex** szuperponálhatósága, a másik a kvantum részrendszerek **nemlokális** kapcsolatának lehetősége. A fenti jellemvonások hangsúlyozásának ellenére, a nemlokalitás talán legjellegzetesebb formája -a kvantumos összefonódottság- a twisztor program virágzása idején még nem kapott elég figyelmet.

A magasabb dimenziós elméletek sikerei nyomán (húrelméletek) a négydimenzió szerepét hangsúlyozó twisztor program háttérbe szorult, jóllehet az ezredforduló után a twisztor módszerek legfőbb felhasználója paradox módon épp a húrelmélet lett. A kvantum információelmélet előretörése nyomán a twisztorok összefonódottság elméleti aspektusai némi figyelmet kaptak. Például az alábbi két dolgozat (melynek egyik szerzője a Penrose-féle twisztor programon sokat dolgozó L. Hughston) twisztor geometriai módszereket használ a kvantumos összefonódottság és a téridő geometriájának esetleges kapcsolatának feltárására. (D. C. Brody, L. P. Hughston, Theory of quantum space-time, Proc. Roy. Soc. 461, 2679 (2005). D. C. Brody, L. P. Hughston, Twistor cosmology and quantum space-time, 19th Max Born Symposium, Publisher: Amer. Inst. Phys., Page 57 (2005)). A Szerző által vázolt három qubites twisztor geometriai analógia ebbe a vonulatba illeszkedik.

Az analógia a három qubit összefonódottság valamennyi lényeges aspektusát egy egységes képbe foglalja össze. Meglepő, hogy jóllehet a (nyolc komplex dimenziós $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ vektortéren alapuló) három qubit állapottér a hét komplex dimenzióval rendelkező sugarak tere ($\mathbb{C}P^7$), az összefonódottsági típusok helyes geometriai reprezentánsaként mégis a csupán háromdimenziós $\mathbb{C}P^3$ tér geometriai objektumait kell használnunk. Ez a tér pedig pontosan a twisztorelméletben felbukkanó $\mathcal{P}$ tér. A másik furcsaság az, hogy az összefonódottság kontextusban a Klein megfelelést épp fordítva kell használnunk. Ebben a képben a nem szeparálható összefonódott állapotokat mint $\mathcal{M}$ **pontpárjait** látjuk viszont. A fényszerűen szeparált pontpároknak a W, a nem fényszerűen szeparált pontpároknak pedig a GHZ állapotok felelnek meg. A valós amplitúdókkal rendelkező részesetben a GHZ osztály további két osztályra esik szét. Az egyik osztály a térszerű a másik az időszerű szeparációnak felel meg.

A fenti kép szépsége azt a lehetőséget rejti magában, hogy a három-qubit összefonódottság esetleg valamiféle alapvető építőelemként szolgál a konform kompaktifikált és komplexifikált $\mathcal{M}$ Minkowski-téridő szerkezetének megértésében. Amennyiben ezt a lehetőséget precíz matematikai formába öntve igazolni tudnánk, az a $\mathcal{P}$ twisztortér meglepő új fizikai interpretációját adná. Megjegyezzük, hogy az a konform kompaktifikált Minkowski geometria megértésén túlmutató ötlet, miszerint **bármely** téridőszerkezet egy a kvantumos összefonódottságból jövő "származtatott struktúra", a jelenleg folyó "It from Qubit" program vezérmotívuma. A jelen sorok írása idején nem világos számomra, hogy a twisztor megfelelés, és az ehhez csatolható összefonódottsággal kapcsolatos analógia, hogyan illeszthető ezen program AdS/CFT megfeleléssel és a húrelmélettel kombinált imponáló eredményeihez.

5. A második fejezetben a három majd négy qubites megkülönböztethető rendszerekre vonatkozó meggondolásokat követő általános N-qubites rész túlságosan tömör, célszerű lett volna inkább ezt alaposabban részletezni, majd ennek alapján kifejteni részletezni az előző alfejezetek speciális eseteit.

Egyetértek azzal, hogy az N-qubites fejezet a többi fejezethez képest meglehetősen tömör. Ennek az az oka, hogy a részletesen tárgyalt három és négy qubitos eredményeket a húrelméleti alkalmazásokat bemutató későbbi részekben felhasználom, míg az általános N-qubites eredményeket nem.

Az N-qubites rész tárgyalásának alapötlete szerint ha a 2^N darab komplex amplitúdóban rejlő összefonódottsági információt 2^{N-l} darab 2^l komponensű vektorba kódoljuk ($l = 1, 2, 3, \dots$) akkor fizikai szempontból releváns, és elegáns geometriai jelentéssel bíró összefonódottsági mértékeket kapunk. Erre a túl általános tárgyalásra a három és négy qubites esetben nem volt szükség, hiszen itt minden SLOCC invariánsra vonatkozó információ kizárólag az $l = 2$-es eset (2 illetve 4 darab négyesvektor) vizsgálatával kinyerhető. Ezen négyesvektorok sugarainak tere épp az előző kérdés kapcsán tárgyalt $\mathcal{P}$ projektív twisztortér ($\mathbb{C}P^3$). Ezekben a speciális esetekben a SLOCC mértékekkel kapcsolatos minden információt a $\mathcal{P}$ tér pontjainak, egyeneseinek és síkjainak nyelvén tudunk leírni. (Például a négy qubit mértékek esetén lásd a 2.6.6. fejezetet.)

6. Lehetséges-e valamilyen egyszerű magyarázatot adni a fermionos összefonódás esetén a 6 és 7 egyrészecske állapotok kitüntetettnek látszó szerepére? A Fano sík általánosítása adhat-e újabb szempontot az összefonódás kérdésköréhez több egyrészecske állapot esetén?

Valójában a $4, 5, 6, 7, 8$ egyrészecske állapottal rendelkező fermionikus rendszerek kitüntetettek. Az ennél kevesebb egyrészecske állapotos rendszerek triviálisan szeparálhatók. A dolgozatban csak a $4, 6, 7$ egyrészecske állapotos rendszereket vizsgáltam. Számomra csak matematikai természetű "egyszerű magyarázat" ismeretes: ezen rendszerek állapotterei a megfelelő SLOCC csoport hatásra nézve "prehomogén vektorteret" alkotnak. Amennyiben ennél több egyrészecske állapotot tekintünk, a "prehomogenitás" tulajdonsága elveszik.

Kicsit pongyolán fogalmazva ez a matematikai kifejezés azt a fizikai intuíciót takarja, hogy ezekre a fermionikus rendszerekre létezik egy olyan összefonódottsági osztály mely a három-qubit GHZ osztály állapotaihoz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik. Ebben a képben a "prehomogenitás" tulajdonsága azt jelenti, hogy egy alkalmas topológiában tetszőleges fermionikus állapot tetszőlegesen kicsiny környezetében található ilyen "GHZ-szerű" fermionikus összefont állapot. A "GHZ-szerű" állapotok tehát ekkor a fermionikus állapottérben sűrűn helyezkednek el.

A Fano-sík véges geometriai szerkezete az októniószorzás tulajdonságaival kapcsolatos. Mivel a 7 egyrészecske állapotos rendszer "GHZ-szerű" állapotát stabilizáló SLOCC részcsoport az októniószorzás automorfizmus csoportja, ezért a Fano sík megjelenése nem véletlen. Meglepő módon azonban az értekezés egyik eredményéből adódóan a Fano sík a 7 egyrészecske állapotos eset SLOCC osztályszerkezetének leírására is kiválóan alkalmas. Ez felveti azt a lehetőséget, hogy más, a Fano síkot általánosító, véges geometriai struktúrák esetleg információt hordoznak a több egyrészecske állapotos rendszerek SLOCC összefonódottsági osztály-szerkezetéről.

Véges geometriai szempontból szemlélve a Fano sík a két elemű test felett vett projektív sík, projektív geometria: $PG(2, 2)$, mely 7 ponttal és 7 egyenessel rendelkezik. Ennek az objektumnak a legtermészetesebb általánosítása a két elemű test felett vett projektív tér $PG(3, 2)$ és ennek tetszőleges dimenziós általánosításai $PG(n, 2)$, $n \geq 3$. Ezek a terek ismeretes számú ponttal, egyenessel, síkkal és incidencia szerkezettel rendelkeznek. Az $n = 2$-es eset sikerén felbuzdulva, megpróbálkozhatunk az $n = 3$-as esettel. Azonban $PG(3, 2)$ adatainak (15 pont, 35 egyenes, 15 sík) és incidencia szerkezetének ismeretében első ránézésre semmilyen kapcsolatot sem látok a Fano síkot általánosító projektív tér geometriája és a 8 egyrészecske állapotos eset irodalomból ismeretes 23 SLOCC osztálya között. (Az osztályok reprezentánsainak struktúráját illetően lásd G. Sárosi és P. Lévay, Phys. Rev. A89, 042310 (2014), III. táblázat.)

Lévay Péter Pál

Budapest, 2018. június 19.