

Modális dekompozíció vékonyfalú rúdelemek stabilitásvizsgálatában

**(Modal decomposition in the buckling analysis of thin-walled
members)**

Disszertáció

Ádány Sándor, PhD

**Budapest
2017. április**

Háttér

A disszertáció vékonyfalú rúdelemek stabilitását tárgyalja. Vékonyfalú rúdelemek számos mérnöki alkalmazásban előfordulnak, de a legtipikusabb szerkezetépítőmérnöki előfordulások a hidegen hajlított acél termékek, melyeket akár másodlagos teherviselő elemekként (pl. szelemen, falvázoszlop, stb.), akár elsődleges teherviselő elemekként (kisebb csarnokszerkezet kerete, stb.) alkalmaznak. Bár a disszertációban bemutatott munka alapvetően elméleti jellegű, így alapvetően független az alkalmazástól, mégis tagadhatatlan, hogy a munkát a vékonyfalú acél szerkezeti elemek tervezésének szükségletei motiválták, mint ahogy az eredmények legtermészetesebben adódó közvetlen alkalmazási területe is a hidegen hajlított acél elemek tervezése. A hidegen hajlított acél elemek között is elsősorban a rúdszerű, sík lemezekből álló elemek vannak a munka fókuszában (mint pl. hidegen hajlított acél Z- és C-szelvények). Ilyenekre mutat példát az 1. ábra. Alapfeltevés, hogy a rúdelemek prizmatikusak, és hogy a sík alkotólemezek egymáshoz közvetlenül, lekerekítés nélkül kapcsolódnak (ami sok esetben csak közelítőleg teljesül).

A vékonyfalú rúdelemek általában karcsúak, ezért általában a stabilitásvesztés a legfontosabb tönkremeneteli mód. Bár a 'stabilitásvesztés' kifejezést több, egymástól némileg eltérő értelemben szokták használni, jelen munkában a 'stabilitásvesztés'-t egy idealizált (vagyis tökéletesen egyenes tengelyű, kezdeti feszültségektől mentes, stb.) rúdelem egyensúlyának elágazásaként értelmezzük. Ezt a jelenséget szokás *lineáris stabilitásvesztés*nek is nevezni. Az a teher, amelynél az egyensúlyelágazás bekövetkezik, a *kritikus teher*, vagy stabilitásvesztési teher. A kritikus teherszinten a másodlagos egyensúlyi úthoz tartozó deformált alak a *stabilitásvesztési alak*. A kritikus állapot (azaz: kritikus teher és stabilitásvesztési alak) meghatározásának folyamata a *lineáris stabilitásvizsgálat*, amely esetünkben egy általánosított sajátértékfeladat megoldását jelenti, ahol a sajátértékek a kritikus teherszorzők, míg a sajátvektorok a stabilitásvesztési alakok reprezentációi (azaz a stabilitásvesztési alakokhoz tartozó csomóponti elmozdulások vektorai).

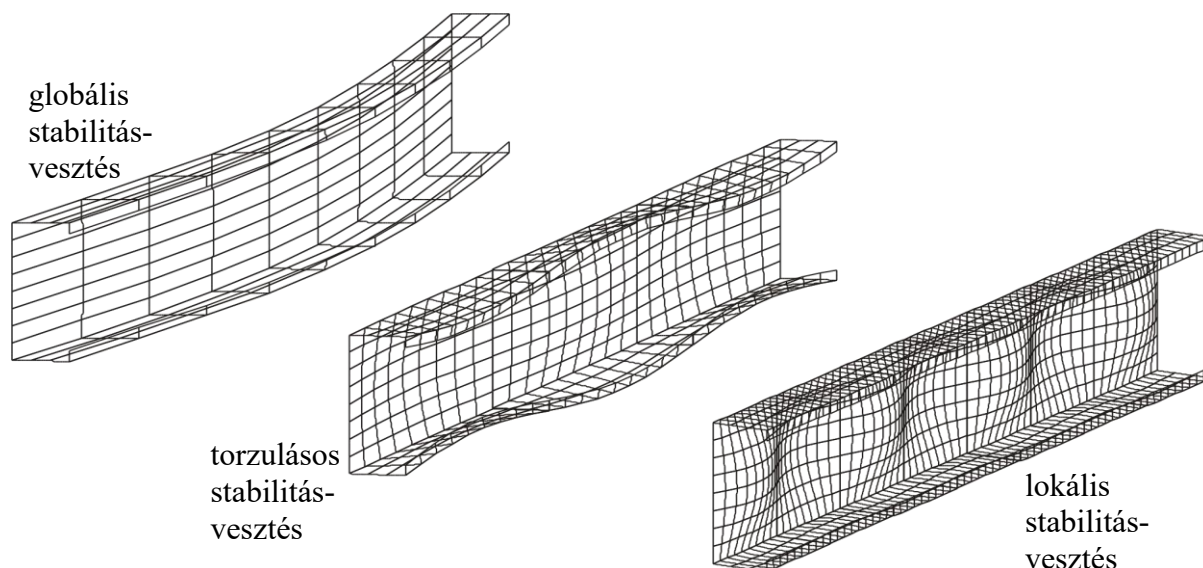


1. ábra: Példa vékonyfalú hidegen hajlított acél szelvényekből épített szerkezetre

A kritikus teher értékét legközvetlenebbül a *stabilitásvesztési teherbírás* számításában lehet felhasználni. A stabilitásvesztési teherbírás fogalma a valóságos, imperfekt szerkezethez tartozik, és úgy értelmezendő, mint az a maximális teher, amelyet a szerkezet stabilitásvesztési tönkremenetel nélkül képes elviselni. Amennyiben biztonsági tartalékot is figyelembe veszünk (pl. valamely tervezési szabvány szerinti biztonsági tényezővel), tervezési (stabilitásvesztési) ellenállásról beszélhetünk.

A hidegen hajlított acél elemek – tipikus alkalmazás esetén – normálerő és/vagy hajlítónyomatéki igénybevétellel terheltek. Mindkettőből hosszirányú normálfeszültségek keletkeznek. A stabilitásvesztés elsődleges oka a nyomó normálfeszültségek jelenléte, melyek hatására bekövetkező stabilitásvesztést általában háromféle típusba sorolják: lokális (L), torzulásos (D), és globális (G). (Természetesen, stabilitásvesztés nem csak hosszirányú

nyomófeszültség hatására következhet be, hanem létezik pl. nyírási horpadás, gerinclemez beroppanása, stb., de ezeket jelen disszertáció nem tárgyalja.) Lineáris stabilitásvizsgálatot végezve az tapasztalható, hogy a stabilitásvesztési típusok általában nem tisztán, hanem egymással kombinálódva jelentkeznek, azaz a stabilitásvesztési alak általában a különféle típusokhoz tartozó deformált alakok kombinációja. Amikor a stabilitásvesztési alakban nincs ez a kombinálódás, *tiszta stabilitásvesztési mód*ról beszélünk. A 2. ábra példákat mutat egy C-keresztmetszetű nyomott rúd tiszta módjaira.



2. ábra: A globális, torzulásos és lokális stabilitásvesztési módok illusztrációja

Bár a kutatók és szakemberek között egyetértés mutatkozik a globális-torzulásos-lokális stabilitásvesztési típusok létezésében, hosszú ideig nem létezett formális definíció a típusokra, és még manapság sincs konszenzus a különféle típusok pontos mibenlétében. Ettől függetlenül a típusok megkülönböztetése igen fontos, mert mindegyikhez más posztkritikus viselkedés tartozik. A lokális stabilitásvesztésnek jelentős posztkritikus tartaléka lehet. A torzulásos stabilitásvesztésnek is lehet posztkritikus tartaléka, de kisebb, mint a lokálisnak. A globális stabilitásvesztésnek (pl. síkbeli kihajlás) nincs posztkritikus tartaléka, azaz a teherbírás kisebb, mint a rugalmas kritikus teher. Emiatt fontos a stabilitásvesztési módok helyes kategorizálása, mert ez az előfeltétele a tervezési teherbírás reális meghatározásának.

A jelenlegi tervezési szabványok [C1-C7] is egyértelműen mutatják, hogy a tervezési teherbírás függ a stabilitásvesztés módjától. A kritikus teher értéke közvetlenül szerepel a teherbírás számításában, de az alkalmazandó képletek a stabilitásvesztés típusától függően különböznek. A G, D és L típusokhoz tartozó kritikus teher számítására léteznek analitikus vagy szemianalitikus megoldások, de ezek jellemzően csak egyszerűbb esetekre alkalmazhatóak, így a kritikus teher meghatározására numerikus módszereket (is) kell használnunk. A legnépszerűbb numerikus módszerek: a héj végeleemes módszer (FEM), a véges sávok módszere (FSM), és az általánosított gerendaelmélet (GBT).

A FEM a legnépszerűbb és legáltalánosabb, melyet szinte tetszőleges szerkezeti elem és tetszőleges megtámasztás és terhelés esetén lehet alkalmazni. A módszer könnyen hozzáférhető, hiszen nagy számban elérhetőek FEM szoftverek (pl. Ansys, [C8]). Ha vékonyfalú elemekre alkalmazzuk, nagyszámú héj végeleemre van szükség, ami nagyszámú szabadságfokot (DOF) is jelent. A kritikus teher nem határozható meg a G, D, L típusokra külön-külön, hanem: (i) először meg kell határozni a legkisebb kritikus teherértékkel rendelkező stabilitásvesztési módokat, (ii) aztán szemrevételezni a stabilitásvesztési alakokat, (iii) majd kiválasztani azokat, amelyek a legkisebb teherszorzóval rendelkező L, D és G

típusnak tekinthetők. A gyakorlati tapasztalat az, hogy minimum több tíz, de olykor több száz stabilitásvesztési alakot kell meghatározni és szemrevételezni, és sok esetben nem egyértelmű, hogy melyik alak tekintendő első (azaz legkisebb teherszorójú) módnak a különféle típusokból. Ha csak egy elemet vizsgálunk, a több száz mód szemrevételezése – fárasztó és nem túl hatékony ugyan, de – kivitelezhető, de az eljárás nem alkalmazható, ha a stabilitásvizsgálat automatikus végrehajtása elengedhetetlen (pl. optimalizálás során).

A vékonyfalú elemek stabilitásvizsgálatában az ún. szemianalitikus FSM (azaz: hosszirányban trigonometrikus bázisfüggvényekkel, keresztirányban Lagrange és/vagy Hermite polinomokkal) hatékonyan alkalmazható. A módszert Cheung javasolta [C9-C11], később Hancock népszerűsítette [C12]. Ő volt, aki az FSM-et formálisan is beépítette a vékonyfalú acél elemek tervezésébe, és ő fejlesztette az első publikus végessávós szoftvert (THIN-WALL) [C13-C15]. A módszert tovább népszerűsítette Schafer [C16], aki a szabadon hozzáférhető CUFSM szoftvert is fejlesztette [C17-C18]. Schafer javasolta a Direct Strength Method (DSM) nevű méretezési eljárást [C7], amely teljes mértékben egy végessávós lineáris stabilitásvizsgálatra támaszkodik. (Megjegyzendő, hogy az FSM-nek egyéb variációi is léteznek, de jelen munka mindig a [C9-C11] szerinti eljárást hivatkozza FSM-ként.) Az FSM a FEM-hez képest sokkal kevesebb szabadságfokkal dolgozik, de korlátozott az alkalmazhatósága is: csak prizmatikus elemeket képes kezelni. A G, D és L típusú stabilitásvesztési módok meghatározása szempontjából az FSM elvileg hasonló a FEM-hez, de a kifejlesztett FSM szoftverek azzal igyekeznek orvosolni ezt a nehézséget, hogy automatikusan előállítják a kritikus teher értékeket nagyszámú félhullámhosszra (azaz: a hosszirányú trigonometrikus bázisfüggvények fél hullámhosszát szisztematikusan változtatva), mert az így előálló görbe nagymértékben segítheti a G, D és L típusokhoz tartozó kritikus terhek meghatározását.

Hosszú ideig a GBT volt az egyetlen módszer, mely közvetlenül meg tudta határozni a kritikus terhet külön-külön bármelyik stabilitásvesztési típusra, a gyakorlati esetek széles körére [C19-C28]. Hosszú ideig (beleértve azt az időpontot is, amikor az itt bemutatott kutatás kezdődött, körülbelül 2003-ban,) jelentős nehezítő körülmény volt, hogy nem volt publikusan elérhető GBT szoftver. Később a GBTUL szoftver [C29-C30] megjelenése ezt a problémát megoldotta. A GBT az FSM-hez hasonló előnyökkel és hátrányokkal rendelkezik: elegánsan, kevés szabadságfokkal kezel egyenes tengelyű prizmatikus rúdelemeket, de nehezen (ha egyáltalán) általánosítható bonyolultabb esetekre (pl. változó keresztmetszetű rudak, lyukas elemek, vékonyfalú elemekből felépülő keretek, stb.).

A különféle típusokhoz tartozó kritikus terhek számításának témakörében két alapvető feladat különböztethető meg. Az egyik a *tiszta stabilitásvesztési módok számítása*, amikor a számítás célja a G, D vagy L típusú stabilitásvesztéshez tartozó kritikus teher számítása. Ez úgy valósítható meg, ha a szerkezeti elemet kényszerítjük a kívánt típusnak megfelelő deformációra (azaz a deformációkat *korlátozzuk* az adott típusú deformációra). Egy ilyen korlátozott stabilitásvizsgálatból származó kritikus teher tekinthető az adott típusú tiszta stabilitásvesztési kritikus tehernek. A másik alapeladat a stabilitásvesztési mód identifikációja, amikor a stabilitási analízist a deformációk előzetes korlátozása nélkül végezzük el, (ahogy ez egy általános FEM vagy FSM számítás során történni is szokott,) de a kiadódó stabilitásvesztési alakot utólag identifikáljuk, azaz meghatározzuk, hogy az adott alak melyik típusba sorolható. Minthogy a (korlátozatlan) stabilitásvizsgálattal meghatározott stabilitásvesztési alakok ritkán tekinthetők tiszta módoknak, az identifikáció a gyakorlatban annak meghatározását jelenti, hogy a vizsgált deformált alakban mekkora a G, D és L módok részvétele (pl. százalékosan). Egy tervezési feladat esetén pl. az a kritikus teher tekinthető a torzulásos stabilitásvesztés kritikus terhének, amelyikhez tartozó stabilitásvesztési alakban a D típusú deformáció domináns.

A disszertációban összefoglalt kutatások általános célja olyan numerikus eljárás kifejlesztése, mely lehetővé teszi a modális dekompozíciót (azaz: akár a tiszta stabilitásvesztési módokhoz tartozó kritikus terhek számítását, akár általános deformált alakok modális identifikációját) a gyakorlati esetek széles körére.

1. tézis: Elmozduláskorlátozott végessávós módszer nyitott keresztmetszetű rúdelemekre

Amikor az FSM-et lineáris stabilitásvizsgálatra alkalmazzuk, először a rugalmas és geometriai merevségi mátrixot kell előállítanunk, a végeleemes módszerben megszokott módon, lásd pl. [C16]. A stabilitásvizsgálat az alábbi általánosított sajátérték-feladat megoldását jelenti:

$$\mathbf{K}_e \Phi = \Lambda \mathbf{K}_g \Phi \quad (1)$$

ahol $\mathbf{K}_e$ a rúdelem rugalmas merevségi mátrixa, Φ a sajátvektorokból (mint oszlopvektorokból) alkotott mátrix, Λ egy olyan diagonálmátrix, melynek főátló elmei a sajátértékek, és $\mathbf{K}_g$ a rúdelem geometriai merevségi mátrixa.

Az ún. elmozduláskorlátozott végessávós módszer (cFSM, az angol név alapján: constrained finite strip method) esetén mechanikai kényszereket alkalmazunk, melyek olyan deformációkra (pl. stabilitásvesztési alakra) kényszerítik a rúdelemet, melyek a globális (G), torzulásos (D), lokális (L), vagy egyéb (O) típusoknak megfelelőek, lásd [A1-A8]. A cFSM leglényegesebb része tehát az ún. *kényszermátrix* definíciója minden egyes típusra. Amikor egy kényszermátrixot alkalmazunk, a csomóponti elmozdulási szabadságfokokkal meghatározott általános elmozdulásmezőt redukáljuk (azaz: korlátozzuk) egy olyan, kisebb szabadságfokú elmozdulási mezőre, amelyben minden lehetséges elmozdulás kielégíti az adott típusra jellemző feltételeket. Az általános és korlátozott elmozdulások közötti összefüggés kifejezhető az alábbi egyenlettel:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_M \mathbf{d}_M \quad (2)$$

ahol $\mathbf{d}$ az általános (korlátozatlan) elmozdulásvektor, $\mathbf{d}_M$ a redukált elmozdulási mező elmozdulásvektora, és $\mathbf{R}_M$ a kényszermátrix az adott típusra. Az 'M' index utal az adott típusra, vagyis, 'M' kicserélhető 'G'-vel (globális), 'D'-vel (torzulásos), stb., vagy a típusokat jelölő karakterek bármely kombinációjával, pl. 'GD', 'GDL', stb. Megjegyzendő, hogy a $\mathbf{d}_M$ vektor elemei, minthogy $\mathbf{d}_M$ a redukált szabadságfokú elmozdulásmezőben van értelmezve, nem feltétlenül feleltethetők meg az eredeti csomóponti elmozdulásoknak, hanem inkább általánosított elmozdulásoknak tekintendők.

A (2)-es egyenleten keresztül az $\mathbf{R}_M$ kényszermátrix az eredeti FSM elmozdulási mezőnek azon alterét jelöli ki, amely megfelel az 'M' típusra jellemző feltételeknek. Vagyis, $\mathbf{R}_M$ oszlopai az 'M' altér bázisvektorainak is tekinthetők. Az altérben belül lineáris transzformáció lehetséges, azaz $\mathbf{R}_M$ nem unikális. Az 'M'-hez tartozó bázisvektorok által meghatározott vektor tereket G, D, L vagy O tereként is hivatkozunk, mint ahogy beszélhetünk GD térről (mint a G és D terek uniója), stb.

A stabilitásvesztési alak (azaz: Φ bármely oszlopvektora) maga is egy elmozdulásvektor, amire tehát a kényszermátrix alkalmazható. Behelyettesítve (2)-t az (1)-be, majd balról megszorozva $\mathbf{R}_M^T$ -vel, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_e \mathbf{R}_M \Phi_M = \Lambda_M \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_g \mathbf{R}_M \Phi_M \rightarrow \mathbf{K}_{e,M} \Phi_M = \Lambda_M \mathbf{K}_{g,M} \Phi_M \quad (3)$$

amelyben egy új általánosított sajátérték-feladat ismerhető fel, de most a redukált elmozdulásmezőben. Fenti egyenletben $\mathbf{K}_{e,M}$ és $\mathbf{K}_{g,M}$ az 'M' térben értelmezett (korlátozott) rugalmas és geometriai merevségi mátrix, $\mathbf{\Lambda}_M$ az 'M' térben meghatározott sajátértékekből alkotott diagonálmátrix, míg $\mathbf{\Phi}_M$ az 'M' térre korlátozott feladat sajátvektoraiból (azaz stabilitásvesztési módjaiból) alkotott mátrix. Megjegyzendő, hogy a korlátozott problémának általában (sokkal) kevesebb szabadságfoka van a korlátozatlan problémához képest, vagyis a kényszmátrix alkalmazása a modell redukcióját is jelenti.

Az $\mathbf{R}_M$ mátrixok levezetése típusfüggő. Némelyik közvetlenül meghatározható (pl. $\mathbf{R}_L$ és $\mathbf{R}_O$), más esetben hosszabb levezetések szükségesek (pl. $\mathbf{R}_D$ és $\mathbf{R}_G$). Bizonyos esetekben csak egyféle eljárás ismert a mátrix levezetésére, (pl. $\mathbf{R}_D$), más esetekben többféle módon juthatunk el a kényszmátrixhoz. A leglényegesebb része a levezetéseknek a típusra jellemző mechanikai feltételek alkalmazása az FSM bázisfüggvényeire. A feltételek az alábbiak:

- 1. feltétel: (a) nincs nyírási alakváltozás a lemezek síkjában, (b) nincs keresztirányú nyúlás a lemezek síkjában, (c) az öblösödési deformáció keresztirányban lineáris bármely sík lemezelem középvonalában.
- 2. feltétel: (a) az öblösödési deformáció nem zérus a teljes keresztmetszet középvonalában, (b) a keresztmetszet (mint hajlított gerenda) egyensúlyban van.
- 3. feltétel: nincs keresztirányú hajlítási deformáció.

Minden egyes típusra meghatározható, hogy mely feltétel 'teljesül', 'nem teljesül', vagy 'irreleváns'. (Pl. a G tér esetén mindhárom feltételnek teljesülnie kell.)

Fenti feltételeket az általánosított gerendaelmélet (GBT) inspirálta, amely a cFSM kifejlesztése előtt az egyetlen olyan ismert eljárás volt, mely képes volt vékonyfalú rúdelemek G, D és L módjainak szeparálására. Hangsúlyozni kell azonban, hogy fenti teljes feltételrendszer soha nem szerepelt egyetlen ismert GBT publikációban sem. Valójában a GBT nem is igényli ezt a feltételrendszert, minthogy a GBT-ben nem létezik egy előre definiált (korlátozatlan) elmozdulásmező, melyet később bizonyos típusokra bontanánk, hanem az elmozdulásmező – intuíció, vagy előzetes vizsgálatok/tapasztalatok alapján – a felhasználó által a különféle elmozdulási típusokból kiválasztott módokból épül fel.

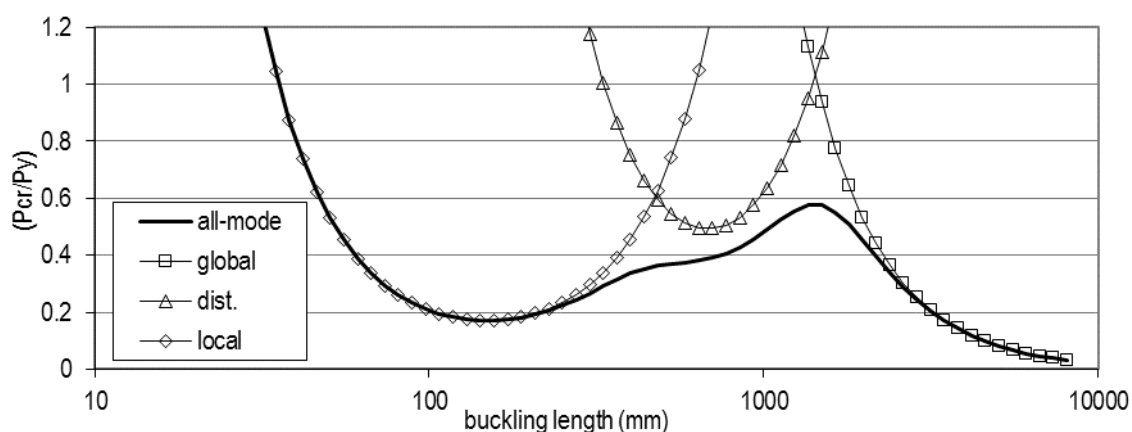
Ha a kényszmátrixok definiálása megtörtént minden egyes (szükséges) elmozdulási térre, a modális dekompozíció két alapeladata könnyen végrehajtható. Egy adott típushoz tartozó stabilitási analízishez (vagyis a stabilitásvesztési alakok és kritikus terhek meghatározásához) a korlátozott sajátérték-feladatot kell megoldani, azaz (3)-as egyenletet. A feladat megoldható a G, D, L és O terek altereiben is. Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy a teljes $\mathbf{R}_M$ mátrix alkalmazása helyett annak oszlopvektoraiból alkotott tetszőleges kombinációt is alkalmazhatjuk bázisrendszernek. Ily módon eljuthatunk olyan klasszikus feladatokhoz, mint pl. a *síkbeli kihajlás* vagy *tisztán elcsavarodó kihajlás* (egyetlen bázisvektor alkalmazásával).

A modális megoldást egy [A1]-ből vett példával illusztráljuk. Egy C-keresztmetszetű acél oszlopot vizsgálunk. A kritikus terheket különféle félhullámhosszakra számítjuk a következő opciókban: korlátozatlan 'all-mode' megoldás (a klasszikus FSM alkalmazásával), valamint tiszta globális, tiszta torzulásos, és tiszta lokális stabilitásvesztési megoldás. Az eredményeket (azaz: kritikus teherszorzó a keresztmetszet folyási terhéhez képest) a 3. ábra mutatja.

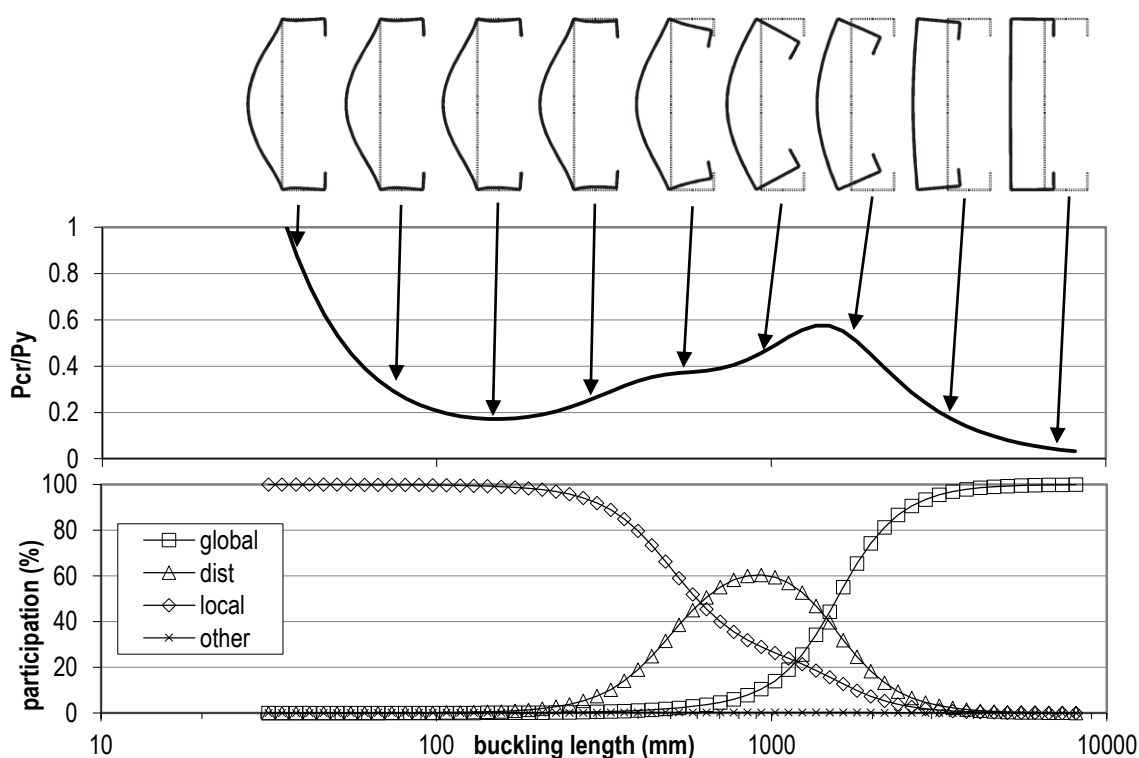
Ha a korlátozott sajátérték-problémát oldjuk meg egy adott (pl. G, D, L vagy O) altérben, nyilvánvaló, hogy az így adódó sajátvektorok, mint bázisvektorok, kifeszítik az adott alteret. Vagyis tekinthetők úgy, mint az altér egy másik, (bizonyos értelemben) *ortogonális* bázisrendszere. Ha egymás után megoldjuk a korlátozott sajátérték-feladatokat mindegyik altérre, egy olyan bázisrendszert kapunk, amely az eredeti (korlátozatlan) elmozdulásmezőt feszíti ki, de amelyben a különféle típusú elmozdulások elkülönülnek. Továbbá a

bázisvektorok az egyes fő alterekben belül ortogonálisak. Ezzel a bázisrendszerrel a rúdelem tetszőleges elmozdulása kifejezhető, mint a bázisvektorok lineáris kombinációja. Amennyiben a bázisvektorokat *normáljuk* is, lehetővé válik egy adott elmozdulásvektorban a különféle típusú elmozdulások részvételének objektív mérése. Más szóval egy tetszőleges elmozdulásvektor, beleértve egy stabilitásvesztési alakot is, *identifikálható*. (Megjegyzendő, hogy a normálás sokféleképpen végrehajtható, pl. maximum norma vagy euklidészi norma alkalmazásával, vagy a vektor által reprezentált alak energiatartalma is skálázható, stb.)

A mód identifikációt egy példával illusztráljuk. Az előző feladatban szereplő elemet vizsgáljuk, a stabilitásvesztési alakokat meghatározzuk (modális kényszerek nélkül), majd identifikáljuk: kiszámítjuk a G, D, L és O (egyéb) típusok részvételét. A százalékos részvételt, valamint néhány deformált alakot mutat a 4. ábra.



3. ábra: Kritikus erők: korlátozatlan és korlátozott megoldások



4. ábra: Deformációs mód típusok részvétele stabilitásvesztési alakokban

2. tézis: Elmozduláskorlátozott végecsávos módszer sík alkotólemezekből álló tetszőleges keresztmetszetű rúdelemekre

A fent bemutatott cFSM fontos lépésnek tekinthető a vékonyfalú rúdelemek modális dekompozíciójának alkalmazásában, hiszen a cFSM a tervezést objektívabbá, és (potenciálisan) teljesen automatizálhatóvá teszi. A GBT-vel ellentétben a cFSM széleskörűen elérhető volt a kutatók és szakemberek számára, hiszen beépítésre került a szabad hozzáférésű CUFSM szoftverbe (mely MatLab programban [C31] íródott). Az eredetileg kifejlesztett cFSM-nek azonban volt egy jelentős alkalmazási korlátja: csak nyitott keresztmetszetű elemeket kezelt. Ez a limitáció alapvetően a keresztmetszet csavarásával van összefüggésben: a valóságban a keresztmetszet elcsavarodhat (a keresztmetszeti alaktól függetlenül), miközben a cFSM-ben alkalmazott mechanikai feltételek nem teszik lehetővé az elcsavarodást (a G altérben), ha a keresztmetszet zárt, vagy zárt rész(ek)e)t is tartalmaz. Ennek gyakorlati következménye az, hogy olyan klasszikus problémák, mint az elcsavarodó kihajlás vagy kifordulás, nem számíthatóak megfelelően az eredeti cFSM-mel zárt keresztmetszetű rúdelemek esetén.

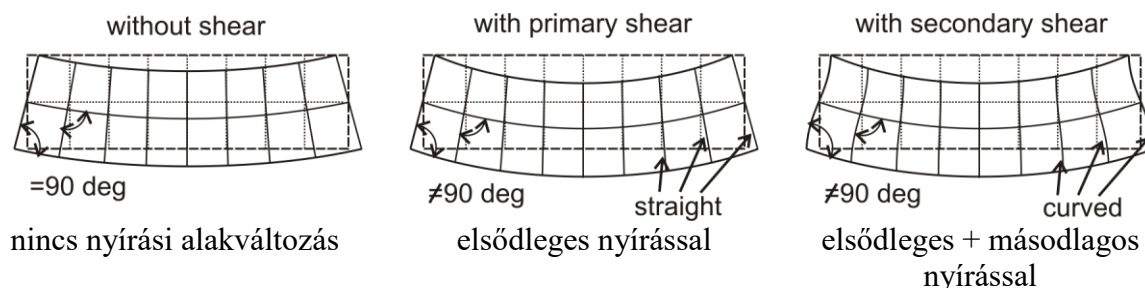
Még konkrétabban a nyírásmentességi feltétel az, amelyik inkompatibilis a zárt keresztmetszetek csavarásával. Ha tehát egy zárt keresztmetszet elcsavarodik, ez a deformáció egy olyan elmozdulási altérbe tartozik, amelyikben az alkotólemezek síkjában bekövetkező nyírási szögtorzulás megengedett. A cFSM terminológiája szerint ez az altér az 'egyéb', azaz O altér, mely nyilvánvalóan két altérre bontható: egy nem-nulla nyírási alakváltozásokkal jellemezhető altérre (a továbbiakban egyszerűen *nyírási* (S) altér), és egy nem-nulla keresztirányú nyúlásokkal jellemezhető altérre (a továbbiakban *keresztalakváltozási* (T) altér).

A cFSM kiterjesztése zárt (valójában: tetszőleges) keresztmetszetekre tehát mindenekelőtt a deformációs terek pontosabb definícióját szükségelteti. Emellett ugyanakkor néhány más újdonság is bekerült az *általánosított cFSM* eljárásba [A9-A13], az alábbiak szerint.

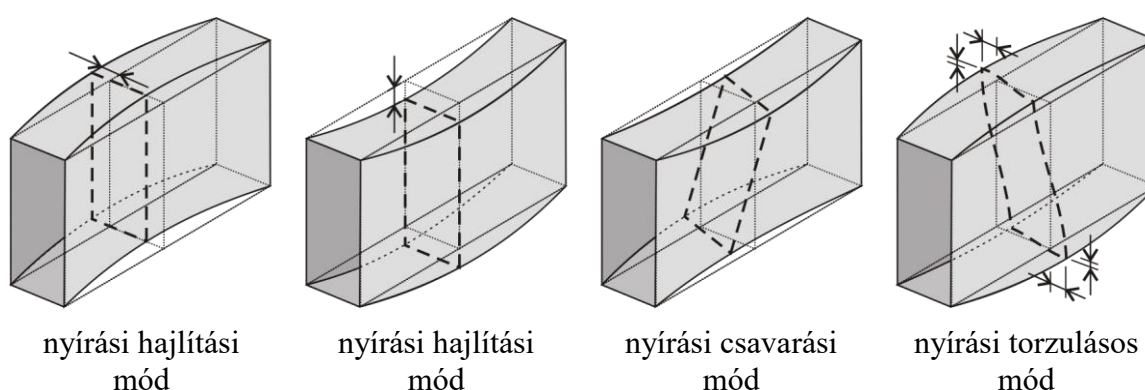
- Egy egyszerű, de gyakorlati szempontból hasznos újdonság a deformációs terek *elsődleges* és *másodlagos* terekbe való csoportosítása. Az elsődleges terek azok, amelyek akkor is léteznek, ha a legminimálisabb keresztmetszeti diszkretizációt alkalmazzuk, azaz amikor mindegyik sík alkotólemezt egyetlen véges sávval modellezzük. (Pl. a G és D terek mindenképpen elsődleges terek, míg az L téren belül megkülönböztethető elsődleges és másodlagos L tér.)
- Egy lényeges újdonság a nyírási terek rendszerezése, mellyel együtt a G és S tereken belül kisebb, de a gyakorlatban értelmezhető és hasznosítható alterek kerültek bevezetésre. Ez a deformációs terek pontosabb leírását igényelte.
- Végül pedig bevezetésre került egy olyan automatizált eljárás, mely az altereken belül a bázisvektorokat – gyakorlati szempontból hasznos módon – sorba rendezi.

Az 5. ábra illusztrálja az elsődleges és másodlagos deformációs tereket: egyetlen sík hajlított lemezelem (azaz: tárcsa) elsődleges és másodlagos nyírási deformációi láthatóak. A 6. ábra egy téglalap alakú zárt szelvény nyírási terének egy lehetséges bázisrendszerét mutatja. A javasolt nyírási bázisrendszer egyik gyakorlati előnye, hogy a keresztmetszet merevtest-szerű elcsavarodásával járó deformáció közvetlenül megjelenik a bázisvektorok között, ezzel lehetővé válik a keresztmetszet csavarodásával járó jelenségek (pl. tisztán elcsavarodó vagy térbeli elcsavarodó kihajlás, kifordulás) egyszerű kezelése olyan rúdelemeknél is, amelyek zárt keresztmetszettel (vagy zárt keresztmetszeti részekkel) rendelkeznek. Továbbá egyszerűen figyelembe vehető a nyírási alakváltozások hatása a lineáris stabilitásvizsgálatban (pl. hasonlóan a Timoshenko gerendaelmélethez), mely különösen olyan esetekben fontos, amikor a nyírási merevség kicsi.

Az új, általánosított cFSM az eredeti cFSM-hez hasonlóan alkalmazható: egyszerűen számíthatók a tiszta stabilitásvesztési módok, és az általános elmozdulások is identifikálhatóak. Azonban mindezek tetszőleges keresztmetszet esetén elvégezhetőek.



5. ábra: Az elsődleges és másodlagos nyírási deformáció illusztrálása



6. ábra: Egy zártszelvényű rúd lehetséges elsődleges nyírási módjai

3. tétel: Héj-végeleemes módszerrel számított elmozdulások modális identifikációja

A tervezési szabványok a stabilitásvesztési ellenállás meghatározásához igénylik a rugalmas kritikus erő ismeretét. Amennyiben egy probléma nem kezelhető GBT-vel vagy cFSM-mel, a tiszta stabilitásvesztéshez tartozó kritikus erő meghatározása problematikus. Ilyen esetekben is (pl. hidegen hajlított acél szelemen, bizonyos helyeken rugalmasan megtámasztva, és keresztirányú erővel terhelve) elvégezhető a lineáris stabilitási analízis héj-végeleemes módszerrel, de a számított stabilitásvesztési alakokat utána valahogyan identifikálni kell, hogy a kívánt, tiszta stabilitásvesztéshez tartozó kritikus teherérték (legalább közelítőleg) meghatározható legyen. Tipikusan több tíz vagy néhány száz alakot kell identifikálni. Matematikai módszer nélkül az identifikáció szubjektív, mert a FEM-ből adódó alakok ritkán hasonlítanak valamely tiszta módra, ahogy ezt a 7. ábra példái is szemléltetik.

Végeleemes analízissel meghatározott elmozdulások közelítő identifikációjára tett javaslatot a Szerző (melyet később mások is alkalmaztak és továbbfejlesztettek). A módszer, mely eredetileg [A14-A16]-ban került bemutatásra, a cFSM bázisfüggvényeit használja a FEM-mel számított elmozdult alak közelítésére. Ehhez elengedhetetlen a bázisfüggvények ortogonalizálása és normálása. Minthogy egy adott (al)térben meghatározott sajátvektorok (bizonyos értelemben) ortogonálisak, a tiszta nyomáshoz tartozó G, D, L és O stabilitásvesztési alakok alkalmazhatóak ortogonális bázisrendszerként. A normálás többféleképpen végrehajtható, pl. maximum norma vagy euklidészi norma alkalmazásával, vagy a bázisvektor által reprezentált alak alakváltozási energiája állítható egységnyire, stb.)

Az identifikáció alapja a közelítés hibájának minimalizálása:

$$\min \left((\mathbf{d}_{FE} - \Phi \mathbf{c})^T (\mathbf{d}_{FE} - \Phi \mathbf{c}) \right) \quad (4)$$

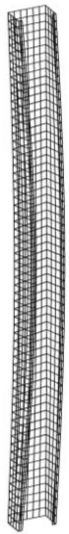
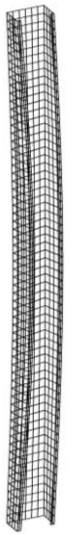
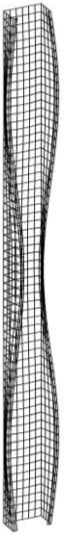
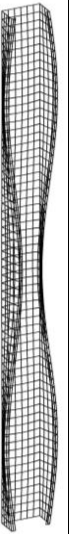
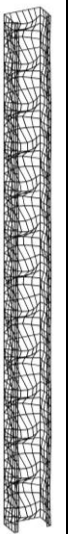
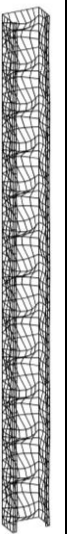
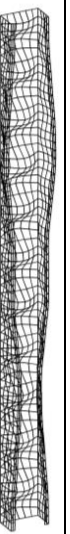
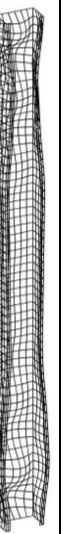
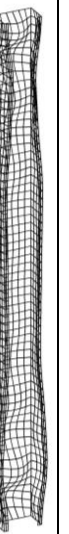
ahol $\mathbf{d}_{FE}$ az identifikálandó FEM-elmozdulásvektor, $\Phi \mathbf{c}$ a közelítő elmozdulásvektor, amely a cFSM Φ bázisvektorainak lineáris kombinációja, és $\mathbf{c}$ elemei a kombinációs tényezők. Ez a minimalizálási feladat végül egy lineáris egyenletrendszerre vezet, amely megoldható $\mathbf{c}$ -re:

$$\Phi^T \Phi \mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{d}_{FE} \quad (5)$$

$\mathbf{c}$ elemeinek nagysága arányos lesz az adott bázisvektor részvételének nagyságával, és minthogy a bázisvektorok (azaz Φ oszlopai) egyértelműen a G, D, L és O (O=S+T) alterekhez vannak rendelve, egyértelműen mérhetővé válik, hogy a $\mathbf{d}_{FE}$ által reprezentált deformált alak mennyiben globális, torzulásos, lokális vagy egyéb.

A módszert egy példán szemléltetjük. Egy C-keresztmetszetű oszlopot vizsgálunk, a lineáris stabilitási analízist héj-végeselemes módszerrel végezzük el, Ansys programmal [C8], melynek során az első 50 stabilitásvesztési módot határozzuk meg. Ezután a módokat identifikáljuk a cFSM bázisfüggvényeinek segítségével. Az eredményeket a 7. ábra mutatja, amelyen mind a FEM-ből adódó $\mathbf{d}_{FE}$ stabilitásvesztési alakok, mind azok $\Phi \mathbf{c}$ közelítése (cFSM bázisfüggvények lineáris kombinációja) látható néhány kiválasztott módra. A kiválasztott módokban a G, D, L és O módtípusok részvételének százalékos aránya szintén meg van adva.

Minthogy a számításban szereplő $\Phi^T \Phi$ mátrix egy viszonylag nagyméretű teli mátrix, előnyös, ha a közelítésben felhasznált bázisfüggvények számát redukálni tudjuk. Kétféle javaslat született a bázisfüggvények megfelelő (szűkebb) csoportjának kiválasztására, és a numerikus eredmények igazolják, hogy a bázisfüggvények egy alkalmasan választott csoportja pontos identifikációra vezet, miközben a számítások lényegesen gyorsabbá válnak.

	mode 1		mode 2		mode 24		mode 18		mode 48		mode 5	
G %	85.9		1.0		0.8		0.7		9.8		0.5	
D %	5.5		91.3		7.6		39.4		46.0		37.7	
L %	0.2		4.7		89.6		57.5		39.2		58.9	
O %	8.4		3.0		2.0		2.4		5.0		2.9	
												
	$\Phi \mathbf{c}$	$\mathbf{d}_{FE}$	$\Phi \mathbf{c}$	$\mathbf{d}_{FE}$	$\Phi \mathbf{c}$	$\mathbf{d}_{FE}$	$\Phi \mathbf{c}$	$\mathbf{d}_{FE}$	$\Phi \mathbf{c}$	$\mathbf{d}_{FE}$	$\Phi \mathbf{c}$	$\mathbf{d}_{FE}$

7. ábra: Végeselemes sajátvektorok ($\mathbf{d}_{FE}$) cFSM közelítése ($\Phi \mathbf{c}$)

4. tézis: Héj-modell alapú analitikus képletek globális stabilitásvesztésre

A cFSM megszületése megalapozta, a CUFSM szoftver pedig egyszerűvé tette a klasszikus globális stabilitásvesztési problémákhoz (pl. síkbeli kihajlás) tartozó kritikus terhek számítását és összehasonlítását klasszikus analitikus képletekkel (pl. Euler-képlet síkbeli kihajláshoz). Az összehasonlítás rávilágított két fontos eltérésre: (i) a cFSM-mel számított kihajlási/kifordulási kritikus terhek néhány százalékkal nagyobbak a klasszikus analitikus formulákból számítottaknál, (ii) és a cFSM-mel számított globális kritikus terhek általában (bár nem mindig) egy véges értékhez konvergálnak, ha az elem hossza nullához tart, míg az analitikus képletek végtelen nagy kritikus terhet jósolnak nullához tartó elemhossz esetén.

A tapasztalt eltérések okainak feltárása érdekében a Szerző – különféle globális stabilitásvesztési problémákra – analitikus képleteket vezetett le olyan feltételrendszerből kiindulva, amelyik megegyezik a szemianalitikus FSM feltételeivel (és nagyon hasonló a héj-végeselemes módszer feltételeihez). Konkrétan: (i) a rúdelemet sík felületelemekkel modellezzük, (ii) a felületelem síkjában és arra merőlegesen is létrejöhetnek elmozdulások, (iii) a síkban bekövetkező elmozdulások síkbeli feszültségállapotot hoznak létre, (iv) a síkra merőleges elmozdulásokat a Kirchhoff-féle lemezelmélettel vesszük figyelembe, (v) és az elmozdulásokat úgy korlátozzuk, hogy csak globális stabilitásvesztés jöhessen létre.

A levezetések néhány klasszikus esetre hajtottuk végre az alábbiak szerint: (i) nyomott rúdelemeket vizsgáltunk, (ii) a rúdelem prizmatikus, (iii) a rúdvégek globálisan és lokálisan csuklósak, öblösödés szabadon létrejöhet, (iv) a rúdelemet terhelő nyomóerő a keresztmetszet mentén egyenletesen megoszló, (v) az anyag lineárisan rugalmas, (vi) nincsenek kezdeti imperfekciók (maradó feszültség, anyagi inhomogenitás, stb.)

A levezetésekhez az energiamódszert használtuk: a rúdelem teljes potenciálját felírva egyensúly akkor lehetséges, ha a potenciális energia függvénye stacionárius.

Konzervatív terhek esetén a külső terhek potenciálja megegyezik a terhek által az elmozdulásokon végzett munka ellentettjével. Minthogy stabilitásvizsgálatról van szó, a munka számításánál az elmozdulás-alakváltozás összefüggés nemlinearitását figyelembe kell venni, melyre – a leggyakrabban alkalmazott módon – másodrendű közelítést alkalmazunk. Továbbá, minthogy (i) a terhelő erő hosszirányban működik, (ii) a rúdelem keresztirányú alakváltozásai a G térben ki vannak zárva, (iii) és a lemezsíkra merőleges alakváltozásokat-feszültségeket elhanyagoljuk, elegendő a hosszirányú alakváltozásokkal foglalkozni. Hasonló esetekben az irodalomban kétféle opció fordul elő. A gerenda-modelleken alapuló klasszikus megoldások a hosszirányú eltolódások másodrendű hatását általában elhanyagolják, míg az általánosabb (pl. héj-végeselemes) megoldások figyelembe veszik. Szintén opcionális, hogy a hosszirányú eltolódások (öblösödés) lemezelemek vastagsága menti változását figyelembe vesszük-e, vagy közelítően konstansnak feltételezzük (azaz egyenlőnek vesszük a lemez középsíkjában érvényes értékkel). Mindkét opciót széleskörűen alkalmazzák. (Gondoljunk például arra, hogy vékonyfalú keresztmetszetek esetén az inercianyomatékot szokás a lemezelemek saját inerciájának figyelembe vételével vagy elhanyagolásával is számítani.) Ezen opciókat szisztematikusan kombinálva a kritikus teher számítására 8 opció definiálható.

A cél tehát a kritikus terhek meghatározása globális stabilitásvesztés esetén. A klasszikus megoldások gerendaelméleten alapulnak, azaz a feltételezett elmozdulásokat a rúdelem tengelyvonalában értelmezett keresztmetszetekhez rendeljük. Ez nem jelenti azt, hogy a keresztmetszetek nem deformálódhatnak, de jelenti, hogy a keresztmetszetek deformációit elhanyagolhatóan kicsinynek feltételezzük. Ha a rúdelemet egymáshoz kapcsolódó felületelemekkel modellezzük, (röviden: *héjmodellt* alkalmazunk,) a gerendaelmélet feltételeinek pontos reprodukálása általában nem lehetséges, mert általában nem lehetséges

olyan peremfeltételeket megadni, amelyek a rúdelem tengelyvonalát a globális stabilitásvesztésnek megfelelő alakra kényszerítik, miközben minden más elmozdulási szabadságfokot szabadon hagynak. A globális stabilitásvesztést tehát általánosan úgy definiáljuk, hogy a stabilitásvesztés globális típusú, ha minden *lehetséges* keresztmetszeti deformáció kivan zárva. Héjmodell esetén ez tehát azt jelenti, hogy a stabilitásvesztés globális, ha a keresztmetszetek középvonala (mint síkbeli geometriai alakzat) nem torzul.

A klasszikus kihajlási-kifordulási megoldások az Euler-Bernoulli-Navier hipotézisen alapulnak. Ez két lényeges feltételezést jelent: (i) a keresztmetszeti síkok síkok maradnak (ii) a rúd tengelyvonalának normálisai a deformációk során is normálisok maradnak a tengelyvonalra. Ha a rúdelem normálirányú és/vagy hajlítási deformációkat szenved, fenti feltételek közvetlenül alkalmazhatóak vékonyfalú rúdelemekre is. Ha azonban csavarás is felléphet, a feltételek úgy általánosítandók, hogy: a két alapfeltevésnek teljesülnie kell a vékonyfalú rúdelem minden egyes sík alkotólemezeire. (Továbbá azt is feltételezni kell, hogy a hosszirányú eltolódások a keresztmetszet középvonala mentén folytonosak, de ez a feltételezés lényegében triviális.)

Fentiek alapján kritikus teherre vonatkozó képleteket kerültek levezetésre [A17-A20] a következő esetekre: síkbeli kihajlás, tisztán elcsavarodó kihajlás (nyitott keresztmetszetű rudakra), és térbeli elcsavarodó kihajlás (nyitott keresztmetszetű rudakra).

A megoldások szemléltetésére álljon itt egy síkbeli kihajlásra vonatkozó képlet egy olyan opcióban, amelyik (gyakorlatilag) megfelel a létező FSM és héj-FEM számításoknak:

$$F_{cr,Z}^{yny} = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 E A I_Z}{L^2 A + \pi^2 I_{Z,r}} \quad (6)$$

ahol E rugalmassági modulusz, ν a Poisson tényező, L a rúdelem hossza, és a keresztmetszeti jellemzők a következők: A a terület, I_Z a globális Z -tengelyre vonatkozó másodrendű nyomaték az alkotólemezek saját inerciájának figyelembe vételével, és $I_{Z,r}$ a globális Z -tengelyre vonatkozó (redukált) másodrendű nyomaték az alkotólemezek saját inerciájának elhanyagolásával. Fenti képlet és a hasonló képletek egyértelmű magyarázatot adnak a cFSM eredmények és klasszikus analitikus képletek között tapasztalt eltérésekre.

A levezett képleteket számos numerikus összehasonlító vizsgálatban is teszteltük, melyek során tipikus és szokatlan keresztmetszeteket is alkalmaztunk. A numerikus eredmények (i) igazolják, hogy a levezetett képletek helyesek, (ii) és szemléltetik a különféle opciók potenciális hatását a kritikus terhekre.

Síkbeli kihajláshoz tartozó kritikus teherre vonatkozó képletek levezetésre kerültek (a lemezelemek síkjában) a nyírási szögtorzulások megengedésével is [A21]. Vagyis az Euler-Bernoulli-Navier hipotézis első feltételét érvényesnek elfogadva, de a második feltételt nem: azaz *a rúd tengelyvonalának normálisai a deformációk során nem feltétlenül maradnak normálisok a tengelyvonalra*. A nyírási alakváltozások fellépése során is feltételezzük azonban, hogy a hosszirányú eltolódások (öblösödés) keresztirányban lineárisak az egyes lemezelemek középvonalában. A cFSM terminológia szerint tehát csak elsődleges nyírási módot feltételezünk (a globális módok mellett).

Síkbeli kihajlás esetén tehát ez a probléma megegyezik egy nyírási alakváltozásra képes rúd kihajlásával. A megoldásnál azonban a héj-modell feltételezéseit alkalmaztuk, és a képleteket 8 opcióban vezettük le. Numerikus vizsgálatokat is végeztünk, az eredmények (i) igazolják, hogy a levezetett képletek helyesek, (ii) szemléltetik a különféle opciók potenciális hatását a kritikus terhekre, (iii) és mutatják a nyírási alakváltozások hatását.

Új tudományos eredmények

Ez a disszertáció a Szerző 2003-2014 közötti tudományos eredményeit foglalja össze. A disszertációban azon eredmények vannak kiemelve, amelyekben a Szerző közreműködése meghatározó volt, de fontos megemlíteni, hogy más kutatók számos eredményt továbbfejlesztettek vagy általánosítottak, illetve akár az eredmények akár az eredmények mögötti ötletek felhasználásra kerültek, bizonyos esetekben a Szerző aktív közreműködésével [B1-B30], máskor a Szerzőtől függetlenül [C32-C54].

A Szerző új tudományos eredményei a következő tézisekben fogalmazódnak meg.

1. tézis: Benjamin W. Schaferrel közösen kifejlesztettem az elmozduláskorlátozott végessávós módszert (cFSM) vékonyfalú, sík alkotólemezekből összetett, nyitott keresztmetszetű, végein csuklós megtámasztású rúdelemek lineáris stabilitásvizsgálatára. [A1-A8]

Azon eredmények, melyekben saját közreműködésem meghatározó, az alábbiak:

- Megadtam a globális, torzulásos és lokális stabilitásvesztési módokhoz tartozó elmozdulási terek mechanikai feltételeit.
- Levezettem a globális, torzulásos és lokális elmozdulási terekre vonatkozó kényszermátrixokat a mechanikai feltételeknek a szemianalitikus végessávós módszer bázisfüggvényeire való alkalmazásával.

2. tézis: Kiterjesztettem az elmozduláskorlátozott végessávós módszert vékonyfalú, sík alkotólemezekből összetett, tetszőleges keresztmetszetű, végein különféle megtámasztású rúdelemek lineáris stabilitásvizsgálatára. [A9-A13]

Az új eredmények részletesen az alábbiak:

- Javaslatot tettem a lokális, nyírási és keresztalakváltozási elmozdulási terek dekompozíciójára. Megadtam a javasolt alterek mechanikai jellemzőit.
- Javaslatot tettem a nyírási elmozdulási tér bázisvektoraira.
- Levezettem a kényszermátrixokat minden egyes alterre.
- Javaslatot adtam az alterek bázisvektorainak egy lehetséges ortogonalizálására és sorba állítására, mely egy olyan bázisrendszerre vezet, amely mérnöki jól értelmezhető és független a végessávós módszer hosszirányú bázisfüggvényeitől.

3. tézis: Kidolgoztam egy olyan módszert, mely alkalmas vékonyfalú, sík alkotólemezekből összetett rúdelemek héj-végeselemes módszerrel számított elmozdulásainak modális identifikációjára. [A14-A16]

Az új eredmények részletesen az alábbiak:

- Levezettem a modális identifikációhoz szükséges képleteket.
- Javaslatot tettem a modális identifikáció pontosságának mértékére.
- Módszert javasoltam a megoldandó egyenletrendszer méretének csökkentésére, amely által a modális identifikáció számítási igény szempontjából hatékonyabbá válik.

4. tézis: Héjmodell-alapú analitikus képleteket vezettem le nyomott rudak kritikus terhének számítására. [A17-A21]

Az új eredmények részletesen az alábbiak:

- Képleteket vezettem le vékonyfalú, végein csuklós megtámasztású, nyírási alakváltozásoktól mentes nyomott rudak síkbeli kihajlására, tisztán elcsavarodó kihajlására, és térbeli elcsavarodó kihajlására.
- Képleteket vezettem le vékonyfalú, végein csuklós megtámasztású nyomott rudak síkbeli kihajlására a nyírási alakváltozások figyelembe vételével.
- Megmutattam, hogyan befolyásolják az eredményeket a levezetésekben alkalmazott különféle feltételezések.

A Szerző azon publikációi, melyek az új tudományos eredményeket tartalmazzák

- [A1] Ádány, S. (2004), „Buckling mode classification of members with open thin-walled cross-sections by using the Finite Strip Method”, *Research Report*, Johns Hopkins University, 2004. (at <http://www.ce.jhu.edu/bschafer>)
- [A2] Ádány, S., Schafer, B.W. (2004), „Buckling Mode Classification of Members with open Thin-Walled Cross-Sections”, *Proceedings of the Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS '04)*, Rome, Italy, Sept 27-29, 2004, pp. 467-476.
- [A3] Schafer, B.W., Ádány, S. (2006), „Understanding and classifying local, distortional and global buckling in open thin-walled members”, *Proceedings of the Annual Technical Session and Meeting*, Structural Stability Research Council, Montreal, Quebec, Canada, May 2005, pp 27-46.
- [A4] Ádány, S., Schafer, B.W. (2006), „Buckling mode decomposition of unbranched open cross-section members via Finite Strip Method: derivation”, *Thin-Walled Structures* 44(5), pp. 563-584.
- [A5] Ádány, S., Schafer, B.W. (2006), „Buckling mode decomposition of unbranched open cross-section members via Finite Strip Method: application and examples”, *Thin-Walled Structures*, 44(5), pp. 585-600.
- [A6] Schafer, B.W., Ádány, S. (2006), „Modal decomposition for thin-walled member stability using the finite strip method”, *Proceedings of the Conference on Advances in Engineering Structures, Mechanics and Construction*, May 14-17, 2006, Waterloo, Canada.
- [A7] Schafer B.W., Ádány S. (2006), “Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods”, *Proceedings of 18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, October 26-28, 2006, Orlando, USA, pp. 39-54.
- [A8] Ádány, S., Schafer, B.W. (2008), “A full modal decomposition of thin-walled, unbranched open cross-section members via the constrained finite strip method”, *Journal of Constructional Steel Research*, 64 (1), pp. 12-29.
- [A9] Ádány S. (2012), “Decomposition of Shear Modes in Constrained Finite Strip Method”, *Proceeding of the 6th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Glasgow, Scotland, Dec 3-5, 2012. (Eds: J Loughlan, D H Nash, J Rhodes), pp 483-490.
- [A10] Ádány S. (2013), “Decomposition of in-plane shear in thin-walled members”, *Thin-Walled Structures*, vol. 73, pp. 27-38.
- [A11] Li Z., Batista Abreu J. C., Leng J., Ádány S., Schafer B. W. (2013), “Review: Constrained Finite Strip Method Developments and Applications in Cold-formed Steel Design”, *Thin-Walled Structures*, vol 81, pp. 2-18.
- [A12] Ádány S., Schafer B. W. (2014), “Generalized constrained Finite Strip Method for thin-walled members with arbitrary cross-section: primary modes”, *Thin-Walled Structures*, vol. 84, pp. 150-169.
- [A13] Ádány S, Schafer B W (2014), “Generalized constrained finite strip method for thin-walled members with arbitrary cross-section: Secondary modes, orthogonality, examples”, *Thin-Walled Structures*, vol. 84: pp. 123-133.
- [A14] Ádány S., Joó A. L., Schafer B.W. (2006), “Approximate identification of the buckling modes of thin-walled columns by using the cFSM modal base functions”, *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*

- (eds: D. Camotim, N. Silvestre, P.B. Dinis), September 6-8, 2006, Lisbon, Portugal, pp. 197-204.
- [A15] **Ádány S.**, Joó A. L., Schafer B.W. (2008), "Identification of FEM buckling modes of thin-walled columns by using cFSM base functions", *Proceedings of the Fifth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS 2008)*, June 23-25, 2008, Sydney, Australia, pp. 265-272.
- [A16] **Ádány S.**, Joó A. L., Schafer B. W. (2010), „Buckling Mode Identification of Thin-Walled Members by using cFSM Base Functions”, *Thin-Walled Structures*, 48(10-11), pp. 806-817.
- [A17] **Ádány S.** (2006), "Flexural buckling of thin-walled columns: discussion on the definition and calculation", *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures* (eds: D. Camotim, N. Silvestre, P.B. Dinis), September 6-8, 2006, Lisbon, Portugal, pp. 249-258.
- [A18] **Ádány, S.** (2008), "Torsional Buckling of Thin-Walled Columns: Analytical Solution Based on Shell Model", *Proceedings of the Fifth International Conference on Thin-Walled Structures (ICTWS 2008)*, June 18-20, 2008, Brisbane, Australia, pp. 1113-1120. (in Vol 2)
- [A19] **Ádány S.** (2012), "Global Buckling of Thin-Walled Columns: Analytical Solutions based on Shell Model", *Thin-Walled Structures*, vol 55, pp 64-75.
- [A20] **Ádány S.**, Visy D. (2012), "Global Buckling of Thin-Walled Columns: Numerical Studies", *Thin-Walled Structures*, vol 54, pp 82-93.
- [A21] **Ádány S.** (2014), "Flexural buckling of simply-supported thin-walled columns with consideration of membrane shear deformations: analytical solutions based on shell model", *Thin-Walled Structures*, vol 74, pp. 36-48.

A Szerző további, a disszertáció témájába tartozó publikációi

- [B1] Li, Z., Hanna, M.T., **Ádány, S.**, Schafer, B.W. (2011), "Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained Finite Strip Method for stability solutions of open thin-walled members", *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 9, pp. 1108-1122.
- [B2] **Ádány, S.**, Silvestre, N., Schafer, B.W., Camotim, D. (2006), "Buckling Analysis of Unbranched Thin-Walled Columns: Generalised Beam Theory vs. Constrained Finite Strip Method", *Proceedings of the III European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2006)*, June 5-8, 2006, Lisbon, Portugal. (available on CD-ROM)
- [B3] **Ádány S.**, Silvestre N., Schafer B.W. and Camotim D. (2006), "Buckling analysis of unbranched thin-walled members using cFSM and GBT: a comparative study", *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures* (eds: D. Camotim, N. Silvestre, P.B. Dinis), September 6-8, 2006, Lisbon, Portugal, pp. 205-212.
- [B4] **Ádány, S.**, Silvestre, N., Schafer, B.W., Camotim, D. (2007), "On the Identification and Characterisation of Local, Distortional and Global Buckling Modes in Thin-Walled Members Using the cFSM and GBT Approaches", *Proceedings of the 6th International Conference on Steel and Aluminium Structures (ICSAS 2007)*, July 24-27, 2007, Oxford, UK, pp. 760-767.
- [B5] **Ádány, S.**, Silvestre, N., Schafer, B.W., Camotim, D. (2009), "GBT and cFSM: two modal approaches to the buckling analysis of unbranched thin-walled members", *Int. Journal Advanced Steel Construction*, Vol. 5, No. 2, pp. 195-223.
- [B6] **Ádány, S.**, Beregszászi, Z. (2008), "Local and Distortional Buckling of Thin-Walled Members: Numerical Study to Compare Conventional and Constrained Finite Strip

- Method”, *Proceedings of the Fifth International Conference on Thin-Walled Structures (ICTWS 2008)*, June 18-20, 2008, Brisbane, Australia, pp. 1121-1128. (in Vol 2)
- [B7] Ádány, S., Beregszászi, Z. (2008), “The Effect of Mode Coupling on the Design Buckling Resistance of Cold-Formed Members Calculated via the Direct Strength Method”, *Proceedings of the Eurosteel 2008 Conference (Eurosteel 2008)*, Sept 3-5, 2008, Graz, Austria, pp. 117-122. (in Vol A)
- [B8] Beregszászi Z., Ádány S. (2009), “The effect of rounded corners of cold-formed steel members in the buckling analysis via the direct strength method“, *The Twelfth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, Funchal, Madeira, Portugal, 1-4 Sept, 2009. (paper #36 on CD-ROM, p. 14)
- [B9] Beregszászi Z., Ádány S. (2011), „Application of the constrained finite strip method for the buckling design of cold-formed steel members via the direct strength method” *Computers and Structures*, 89 (2011), pp. 2020-2027.
- [B10] Ádány S , Beregszászi Z. (2014), “Constrained finite strip method for thin-walled members with rounded corners”, *Proceedings of the 7th European Conference on Steel and Composite Structures, Eurosteel 2014*, (eds: R. Landolfo , F. Mazzolani) Sept 10-12, 2014. Napoli, Italy, #405, p. 6.
- [B11] Ádány S , Beregszászi Z. (2015), “Modal Decomposition for Thin-walled Members with Rounded Corners: an Extension to cFSM by using Elastic Corner Elements”, *Proceedings of the Eighth International Conference on Advances in Steel Structures*, July 22-24, 2015, Lisbon, Portugal, p. 13.
- [B12] Visy D., Ádány S. (2014), “Local stiffness matrices for the semi-analytical Finite Strip Method in case of various boundary conditions”, *Periodica Polytechnica ser. Civil Engineering* Vol 58(3), pp. 187-201.
- [B13] Ádány S., Schafer B. (2014), “Constrained Finite Strip Method Stability Analysis of Thin-walled Members with Arbitrary Cross-section”, *Proceedings of the Annual Stability Conference of the Structural Stability Research Council*, March 25-28, 2014, St. Louis, USA, pp. 346-365.
- [B14] Ádány S , Schafer B. W. (2014), “Modal decomposition for thin-walled column and beam members with arbitrary cross-sections”, *Proceedings of the 7th European Conference on Steel and Composite Structures, Eurosteel 2014*, (eds: R. Landolfo , F. Mazzolani) Sept 10-12, 2014. Napoli, Italy, #407, p. 6.
- [B15] Ádány S. (2014), “Constrained finite element method: demonstrative examples on the global modes of thin-walled members”, *Proceedings of the 22nd International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures: Recent research and developments in cold-formed steel design and construction* (eds: R. LaBoube, W.W. Yu), Nov 5-6, 2014, St. Louis, USA, pp. 67-82.
- [B16] Ádány S. (2016), “Shell element for constrained finite element analysis of thin-walled structural members”, *Thin-Walled Structures*, vol. 105, pp. 135-146.
- [B17] Ádány S. (2016), “Constrained finite element method for the modal analysis of thin-walled members with holes”, *Proceedings of the Annual Stability Conference of the Structural Stability Research Council*, April 12-15, 2016, Orlando, USA, pp. 618-637.
- [B18] Ádány S., Visy D., Nagy R. (2016), “Buckling solutions for thin-walled members by using the constrained finite element method: demonstrative examples”, *Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*, May 30-June 1, 2016, Temesvár, Románia, pp. 51-58.
- [B19] Ádány, S. (2016), „Understanding the buckling behavior of thin-walled members by using the constrained finite element methods”, *Proceedings of the 7th International*

- Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, Baltimore, USA, Nov 7-8, 2016, p. 20.
- [B20] Ádány S. (2016), "Constrained finite element method for the analysis of shear buckling of thin-walled members", *Proceedings of the 8th International Conference on Steel and Aluminium Structures* (eds: B. Young, Y. Cai), Dec 7-9, 2016, Hong Kong, p. 18.
- [B21] Visy D., Ádány S., "Local elastic and geometric stiffness matrices for the shell element applied in cFEM", *Periodica Polytechnica ser. Civil Engineering*, In Press
- [B22] Ádány S. (2017), "Constrained shell Finite Element Method for thin-walled members, Part 1: constraints for a single band of finite elements", *Thin-Walled Structures*, In Press
- [B23] Ádány S., Visy D., Nagy R. (2017), "Constrained shell Finite Element Method for thin-walled members, Part 2: application to linear buckling analysis of thin-walled members", *Thin-Walled Structures*, In Press
- [B24] Li Z., Joó A. L., Ádány S., Schafer B. W. (2011): "Modal identification for finite element models of thin-walled members", *Proceedings of the Sixth International Conference on Thin-Walled Structures (ICTWS 2011)*, Sept 5-7, 2011, Timisoara, Romania, (Eds. Dubina D & Ungureanu V., ISBN 978-92-9147-102-7, published by ECCS in Portugal), pp.189-196.
- [B25] Joó A L, Ádány S. (2009), "FEM-based approach for the stability design of thin-walled members by using cFSM base functions", *Periodica Polytechnica ser. Civil Engineering*, Vol. 53, No. 2, pp. 61-74.
- [B26] Li, Z., Joó, A.L., Ádány, S., Schafer, B.W. (2011), "Modal identification in nonlinear collapse analysis of thin-walled members", *Proceedings of the Structural Stability Research Council Annual Stability Conference 2011, ASC*, pp. 168.
- [B27] Li Z., Ádány S., Schafer B. W. (2012), "Modal identification of cold-formed steel members in shell finite element models", *Proceedings of the 21st International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Saint Louis, Missouri, USA, Oct 24-25, 2012, (Eds: R A LaBoube, W W Yu) pp 1-16.
- [B28] Li, Z., Ádány S., Schafer B.W. (2013), „Modal identification for shell finite element models of thin-walled members in nonlinear collapse analysis to thin-walled structures”, *Thin-Walled Structures*, vol 67, pp. 15-24.
- [B29] Ádány S., Visy D. (2011), "Lateral-torsional buckling of thin-walled beams: an analytical solution based on shell model", *Proceedings of the Sixth International Conference on Thin-Walled Structures (ICTWS 2011)*, Sept 5-7, 2011, Timisoara, Romania, (Eds. Dubina D & Ungureanu V., ISBN 978-92-9147-102-7, published by ECCS in Portugal), pp.125-132.
- [B30] Ádány S. (2012), "Analytical Solution for the Pure Torsional Buckling of Thin-Walled Column with considering Shear Deformations", *Proceeding of the 6th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Glasgow, Scotland, Dec 3-5, 2012. (Eds: J Loughlan, D H Nash, J Rhodes), pp 95-102.

További hivatkozások

- [C1] CEN, EN 1993-1-1:2005 - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2005.
- [C2] CEN, EN 1993-1-3:2006 - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-3: General rules, Supplementary rules for cold-formed members and sheeting, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2006.

- [C3] CEN, EN 1993-1-5:2006 - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-5: Plated structural elements, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2006.
- [C4] CEN, EN 1993-1-6:2007 - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-6: General rules - Strength and stability of shell structures, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2007.
- [C5] NAS, North American specification for the design of cold-formed steel structural members. 2007 ed. Washington DC, USA, American Iron and Steel Institute, 2007.
- [C6] Standards Australia, AS/NZS 4600 Cold-Formed Steel Structures (2005).
- [C7] DSM (2006), American Iron and Steel Institute. Direct strength method design guide. Washington, DC, USA, 2006.
- [C8] ANSYS Inc., ANSYS Mechanical, Release 17.1.
- [C9] Cheung Y.K. (1968), "Finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite ends simply supported", *Proc Inst Civ Eng*, 40, 1-7, 1968.
- [C10] Cheung Y.K. (1977), "Finite strip method in structural analysis", Pergamon Press, 1976.
- [C11] Cheung Y.K., Tham L.G., (1997), *The Finite Strip Method*. CRC.
- [C12] Hancock, G.J. (1978), "Local, Distortional, and lateral buckling of I-beams", *ASCE Journal of structural engineering*, 104(11), pp. 1787-1798.
- [C13] Papangelis, J.P., Hancock, G.J. (1995). "Computer analysis of thin-walled structural members." *Computers & Structures*, 56(1)157-176.
- [C14] THIN-WALL (1995), School of Civil Engineering, University of Sydney, Sydney, Australia, 1995.
- [C15] THIN-WALL (2006): A computer program for cross-section analysis and finite strip buckling analysis and direct strength design of thin-walled structures, Version 2.1, School of Civil Engineering, University of Sydney, Sydney, Australia, 2006.
- [C16] Schafer, B.W. (1997), "Cold-Formed Steel Behavior and Design: Analytical and Numerical Modeling of Elements and Members with Longitudinal Stiffeners", *Ph.D. Dissertation*, Cornell University, Ithaca, NY, USA.
- [C17] CUFSM (2006): Elastic Buckling Analysis of Thin-Walled Members by Finite Strip Analysis. CUFSM v3.12, <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>
- [C18] CUFSM (2012): Elastic Buckling Analysis of Thin-Walled Members by Finite Strip Analysis. CUFSM v4.05, <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>
- [C19] Schardt, R. (1989), "Verallgemeinerte Technische Biegetheorie", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [C20] Davies, J.M., Leach, P. (1994). "First-order generalised beam theory." *J. of Constructional Steel Research*, 31(2-3), pp. 187-220.
- [C21] Davies, J.M., Leach, P., Heinz, D. (1994). "Second-order generalised beam theory." *J. of Constructional Steel Research*, 31(2-3), pp. 221-241.
- [C22] Silvestre, N., Camotim, D. (2002a). "First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials." *Thin-Walled Structures*, 40(9), pp. 755-789.
- [C23] Silvestre, N., Camotim, D. (2002b). "Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials." *Thin-Walled Structures*, 40(9), pp. 791-820.
- [C24] Silvestre, N., Camotim, D. (2003). "Nonlinear Generalized Beam Theory for Cold-formed Steel Members." *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 3(4) pp. 461-490.
- [C25] Dinis P. B., Camotim D., Silvestre N. (2006), "GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily 'branched' open cross-sections", *Thin-Walled Structures*, vol 44(1), January 2006, pp. 20-38.

- [C26] Gonçalves R., Ritto-Corrêa M., Camotim D. (2010), "A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory", *Computational Mechanics*, 46(5), 2010, pp. 759-781.
- [C27] Silvestre N., Camotim D., Silva N.F. (2011), „Generalized Beam Theory revisited: from the kinematical assumptions to the deformation mode determination”, *Int. Journal of Structural Stability and Dynamics*, 11(5), Oct 2011, pp. 969-997.
- [C28] Bebiano R., Gonçalves R., Camotim D. (2015), „A cross-section analysis procedure to rationalise and automate the performance of GBT-based structural analyses”, *Thin-Walled Structures*, vol 92, July 2015, pp. 29-47.
- [C29] GBTUL (2008): Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members. GBTUL 1.0β. DECivil/IST, 2008. Technical University of Lisbon (<http://www.civil.ist.utl.pt/gbt>)
- [C30] GBTUL 2.0 (2013): Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members. DECivil/IST, 2013. Technical University of Lisbon (<http://www.civil.ist.utl.pt/gbt>)
- [C31] Mathworks: Matlab, <http://www.mathworks.com>
- [C32] Li, Z., Schafer B.W. (2009), „Finite Strip Stability Solutions for General Boundary Conditions and the Extension of the Constrained Finite Strip Method”, in *Trends in Civil and Structural Engineering Computing*. 2009. Stirlingshire, UK: Saxe-Coburg Publications.
- [C33] Li, Z., Schafer, B.W. (2010), "Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: Conventional and constrained finite strip methods", *Proceedings of the 20th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures - Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, pp. 17.
- [C34] Li, Z. (2011), „Finite strip modeling of thin-walled members”, *Phd Dissertation*, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, USA, p. 240.
- [C35] Djafour M., Djafour N., Megnounif A., Kerdal D.E. (2010), „A constrained finite strip method for open and closed cross-section members”, *Thin-Walled Structures*, 48(12), Dec 2010, pp. 955-965.
- [C36] Djafour N., Djafour M., Megnounif A., Matallah M., Zendagui D.: „A constrained finite strip method for prismatic members with branches and/or closed parts”, *Thin-Walled Structures*, Vol 61, Dec 2012, pp 42-48.
- [C37] Djafour M., Dib H., Djelli M., Djafour N., Matallah M., Zendagui D. (2012), „Buckling Mode Decomposition of Thin-Walled Members using a Constrained Spline Finite Strip Method”, *Proceeding of the 6th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Glasgow, Scotland, Dec 3-5, 2012. (Eds: J Loughlan, D H Nash, J Rhodes), pp 467-474.
- [C38] Casafont M., Marimon F., Pastor M.M.: „Combined GBT-FEM procedure for the determination of pure distortional buckling loads”, *Proceedings of the Fifth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS 2008)*, June 23-25, 2008, Sydney, Australia, pp. 273-280. (in Vol 1
- [C39] Casafont M., Marimon F., Pastor M.M.: „Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the finite element method”, *Thin-Walled Structures*, 47(6-7), June-July 2009, pp. 701-729.
- [C40] Casafont M., Marimon F., Pastor M.M., Ferrer M.: „Linear buckling analysis of thin-walled members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method”, *Computers and Structures*, 89(21-22), Nov 2011, pp. 1982-2000.
- [C41] Zeinoddini, V., Schafer, B.W. (2010), "Impact of corner radius on cold-formed steel member strength", *Proceeding of the 20th International Specialty Conference on*

- Cold-Formed Steel Structures - Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction, pp. 1.
- [C42] Li, Z., Schafer, B.W. (2010), "Application of the finite strip method in cold-formed steel member design", *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 66, no. 8-9, pp. 971-980.
- [C43] Gilbert, B.P., Savoyat, T.J.-M., Teh, L.H. (2012). "Self-shape optimisation of cold-formed steel columns", *Proceedings of the 21st International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures - Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, Saint Louis, Missouri, USA, Oct 24-25, 2012, (Eds: R A LaBoube, W W Yu), pp. 75-89.
- [C44] Gilbert, B.P., Teh, L.H., Guan, H. (2012), "Self-shape optimisation principles: Optimisation of section capacity for thin-walled profiles". *Thin-Walled Structures*, vol 60, pp. 194-204.
- [C45] Gilbert, B.P., Savoyat, T.J.-M., Teh, L.H. (2012). "Self-shape optimisation application: Optimisation of cold-formed steel columns". *Thin-Walled Structures*, vol 60, pp. 173-184.
- [C46] Moharrami, M., Louhghalam, A., Tootkaboni M. (2014), "Optimal folding of cold formed steel cross sections under compression". *Thin-Walled Structures*, vol 76, pp. 145-156.
- [C47] Zeinoddini, V.M., Schafer, B.W. (2012), "Simulation of geometric imperfections in cold-formed steel members using spectral representation approach", *Thin-Walled Structures*, vol. 60, pp. 105-117.
- [C48] Rendall M.A., Hancock G.J., Rasmussen K.J.R. (2016), "Extension of the generalised constrained finite strip method to members under general loading including shear", *Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Baltimore, USA, Nov 7-8, 2016, p. 18.
- [C49] Rendall M.A., Hancock G.J., Rasmussen K.J.R. (2016), "Modal participation for elastic buckling of polygonal tubes in torsion using the generalised cFSM", *Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Baltimore, USA, Nov 7-8, 2016, p. 14.
- [C50] Rendall M.A., Hancock G.J., Rasmussen K.J.R. (2016), "Identifying shear buckling coefficients for channels with rectangular web stiffeners using the generalized cFSM", *Proceedings of the 22nd International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures: Recent research and developments in cold-formed steel design and construction* (eds: R. LaBoube, W.W. Yu), Nov 5-6, 2014, St. Louis, USA, pp. 339-354.
- [C51] Rendall M.A., Hancock G.J., Rasmussen K.J.R. (2016), "Modal analysis of lipped channel sections with rectangular web-stiffener in shear", *Proceedings of the 8th International Conference on Steel and Aluminium Structures* (eds: B. Young, Y. Cai), Dec 7-9, 2016, Hong Kong, p. 15.
- [C52] Li, Z. (2016), „ Stochastic mode interaction of thin-walled cold-formed steel members using modal identification", *Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Baltimore, USA, Nov 7-8, 2016, p. 16.
- [C53] Nedelcu, M. (2012), "GBT-based buckling mode decomposition from finite element analysis of thin-walled members", *Thin-Walled Structures*, vol. 54, pp. 156-163.
- [C54] Nedelcu, M., Cucu, H.L. (2012), „Buckling modes identification from FEA of thin-walled members using only GBT cross-sectional deformation modes", *Proceeding of the 6th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, Glasgow, Scotland, Dec 3-5, 2012. (Eds: J Loughlan, D H Nash, J Rhodes), pp 475-482.