Bírálói vélemény
Hegyvári Norbert
Topics in Combinatorial Number Theory
című értekezéséről

BEVEZETŐ

Az additív kombinatorika a számelmélet egyik kifejezetten fiatal, de rendkívül divatos és gyorsan fejlődő ága. Az egész terület megszületésében és népszerűsítésében jelentős szerepe volt Erdős Pálnak, talán ennek is köszönhető, hogy Magyarországon nagy hagyománya van. Ebbe illeszkedik Hegyvári Norbert munkássága is.

Hegyvári Norbert doktori értekezésében az elmúlt bő két évtizedben elért eredményeit foglalja össze. Ez a tézisfüzet felépítésében 21 tételt jelent, melyek *mindegyikét elfogadom új tudományos eredmény*ként. A bizonyított tételek 18 dolgozatban jelentek meg, ezek egyikét a Crelle közölte.

Az alábbiakban részletesen áttekintem a doktori értekezést.

AZ ÉRTEKEZÉS RÉSZLETES ÁTTEKINTÉSE

Az értekezés első fejezete egy rövid bevezető.

2. fejezet. Az értekezés második (leghosszabb) fejezete Hilbert-kockákkal kapcsolatos eredményeket tárgyal. Adott Abel-csoportban (vagy a természetes számok között) d-dimenziós, r-rendű Hilbert-kocka alatt azokat a halmazokat értjük, melyek, valamilyen rögzített $x_0, a_1, \ldots, a_d$ elemek mellett,

$$\left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i a_i : \varepsilon_i \in \{0, 1, \ldots, r\} \right\}$$

alakúak. Az alábbiakban, ha a művelet nem egyértelmű (például $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{F}_p$ esetében), ha nem hangsúlyozom külön, az additív struktúra Hilbert-kockáiról lesz szó.

A 2.1-es alfejezet a természetes számok nagy részhalmazainak magas dimenziójú Hilbert-kockáiról szól. Szemerédi 1969-es tétele értelmében ha $A \subseteq \mathbb{N}$ egy pozitív alsó sűrűségű halmaz, akkor $A \cap [1,n]$ tartalmaz $\gg \log\log n$ dimenziós Hilbert-kockát. Hegyvári Norbert egy 1997-es eredménye (Theorem 2.5 az értekezésben) szerint az A pozitív alsó sűrűségű halmaz azonban lehet olyan, hogy minden $A \cap [1,n]$-beli Hilbert-kockának $\ll \sqrt{\log n \log\log n}$ eleme van. Konkrétabban, egy alkalmas véletlen halmaz (melybe minden pozitív egész számot $1/16$ valószínűséggel válasszunk be) nagy valószínűséggel ilyen lesz. Később mások a $\sqrt{\log\log n}$ faktortól megszabadultak, így ma már tudjuk, hogy a véletlen halmaz esetén az első n elemen található legnagyobb Hilbert-kockának konstans szorzóktól eltekintve $\sqrt{\log n}$ eleme van (az alsó becslés egyszerűbb, az értekezés a Proposition 2.8 alatt tárgyalja). Ugyanebben az alfejezetben Hegyvári Norbert egy 2004-es eredményét is bemutatja, mely olyan A halmaz létét garantálja, amelynek az első n pozitív egész között legfeljebb $\ll \log\log n$ dimenziós Hilbert-kockája van annak ellenére, hogy a halmaz nem túl kicsi, pontosabban: $|A \cap [1,n]| \geqslant r_3(n)/3$, ahol $r_3(n)$ az a minimális elemszám, mely garantál háromtagú számtani sorozatot (Roth tételének értelmében ez $o(n)$, ugyanakkor Behrend egy konstrukciója szerint minden $n^{1-\varepsilon}$-nál nagyobb).

A 2.2-es alfejezet $\mathbb{N}$ nagy részhalmazainak különbséghalmazát vizsgálja, és ebben keres strukturált, a Hilbert-kockához hasonló halmazokat. Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ alsó sűrűsége pozitív. Ekkor Bergelson tétele szerint minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan B végtelen halmaz, hogy $A-A$ tartalmazza a $B+\ldots+B$ m tagú összeget. Hegyvári Norbert az értekezésben bemutatja egy 2008-as eredményét, mely ennek a tételnek egy gyengített változatát (konkrétan a megszorított összegekre vonatkozót, Theorem 2.16) bizonyítja kombinatorikus úton. Ezen kívül bizonyít egy 2016-os, Ruzsával közös eredményt is, mely az előbb említett Bergelson-féle tételnél is általánosabb (Theorem 2.20).

A 2.3-as alfejezetben a Hilbert-kockák modulo p (p nagy prím) értendők, és a vizsgálat tárgya a multiplikatív karakterek Hilbert-kockákon felvett értéke. Figyelembe véve, hogy a Hilbert-kockák tekinthetők a számtani sorozatok általánosításainak, a rajtuk kiértékelt multiplikatív karakterekkel kapcsolatos kérdések a számelmélet olyan klasszikus és sokat vizsgált problémáival is rokoníthatók, mint a legkisebb kvadratikus nem-maradék becslése. Az alfejezet két fő eredménye Theorem 2.22, mely a Hilbert-kockákon vett karakterösszegek L^1-normabeli alsó becslése ($\sum_\chi |\sum_{h\in H}\chi(h)|$ becslése, ahol H Hilbert-kocka, χ pedig a multiplikatív karaktereken fut végig); illetve Theorem 2.23, mely minden (nem-degenerált) Hilbert-kockához és minden előírt multiplikatív karakterhez a Hilbert-kocka egy nagy részhalmazát garantálja, melynek minden elemén az előírt karakter kevéssel tér el a triviálistól (mindkét eredmény 2016-os). Megjegyzendő, hogy Hegyvári Norbert segédeszközként önmagukban is érdekes becsléseket bizonyít additív Hilbert-kockák multplikatív és multiplikatív Hilbert-kockák additív energiájára vonatkozóan (ez utóbbi úgy értendő, hogy az $\mathbb{F}_p^\times$ csoportban definiálja a Hilbert-kockákat): Proposition 2.24, Proposition 2.28, Corollary 2.29.

A 2.4-es alfejezetben Hegyvári Norbert 1999-es, Sárközyvel közös eredményeit mutatja be, melynek során felső becslést ad arra, hogy az n-nél nem nagyobb négyzetszámok (Theorem 2.32), illetve prímszámok (Theorem 2.38) milyen nagy Hilbert-kockákat tartalmazhatnak, az előbbi esetben $\ll \sqrt[3]{\log n}$, az utóbbi esetben $\ll \log n$ becslést kaptak. Az alfejezetet azzal zárja, hogy néhány végtelen Hilbert-kockákra vonatkozó eredményt tekint át.

3. fejezet. Az értekezés harmadik fejezete additív Ramsey-típusú eredményeket mutat be: a Ramsey-típusú (pongyolán szólva) azt jelenti, hogy ha egy elegendően nagy, szép struktúrát valamilyen értelemben véges sok darabra vágunk, akkor valamelyik szükségszerűen reprodukálni fogja a szép struktúrát, egy kisebb példányban (gondoljunk a klasszikus változatra, amely egy kellően nagy teljes gráf éleinek 2-színezése esetén garantál kisebb, monokromatikus, teljes gráfot), a végtelenbe lépve az imént említett „nagy” és „kisebb” persze egybeeshetnek (gondoljunk a klasszikus változatra, amely egy végtelen gráf éleinek 2-színezésében garantál végtelen monokromatikus, teljes gráfot); az additivitás arra vonatkozik, hogy jelen esetben a struktúra a pozitív egész számok összeadásából adódik.

A 3.1-es alfejezet felidézi Raimi egy tételét, mely szerint a pozitív egész számoknak van olyan E részhalmaza, hogy ha $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^r D_i$ egy partíció, akkor van olyan $1 \leqslant i \leqslant r$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy $(D_i+k)\cap E$ és $(D_i+k)\setminus E$ egyaránt végtelenek. Ezután Hegyvári Norbert kimondja és bebizonyítja egy 2005-ös eredményét, mely ennek egy messzemenő általánosítása (Theorem 3.2). Mivel a feltételek meglehetősen technikaiak, nem ismétlem meg az állítást.

A 3.2-es alfejezet témája a következő: legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ a pozitív egészek egy aszimptotikus bázisa (azaz létezik olyan $h \in \mathbb{N}$, melyre minden elég nagy pozitív egész előáll A-beli elemek legfeljebb h-tagú összegeként, a legkisebb ilyen h-t nevezzük A rendjének). Legyen például A a négyzetszámok halmaza, és tekintsük egy k-tagú partícióját. Ekkor, mint azt Hegyvári Norbert és Hennecart megmutatták, a partíció valamelyik tagja aszimptotikus bázis lesz, és a rendje $\ll k(\log k)^5$ (Theorem 3.7), ugyanakkor alkalmas partícióra ez a rend lehet nagyobb, mint $k\exp((\log 2+$

$o(1))\log k/\log\log k)$ (Theorem 3.9). Ha a négyzetszámok helyett a prímszámok halmazának vesszük k-tagú partícióit, Hegyvári Norbert és Hennecart megmutatták, hogy valamelyik tag akkor is aszimptotikus bázis lesz, és a rend $\ll k^3$ (Theorem 3.10), ugyanakkor alkalmas partícióra lehet nagyobb, mint $k\log\log k$ (Theorem 3.13). Amikor Ramsey-típusú problémákon gondolkodunk, mindig természetesen merül fel a sűrűségi változat, a jelen esetben ezt úgy fogalmazhatnánk meg, hogy ha a prímszámoknak vesszük egy $1/k$ relatív sűrűségű részét, akkor az milyen rendű aszimptotikus bázist garantál. Korábban Sárközy, illetve Ramaré és Ruzsa vizsgálták ezt a kérdést, az ő eredményeikkel összevetve látjuk, hogy az alsó becslés megegyezik a Ramsey és a sűrűségi esetben (utóbbiban ismert, hogy konstans szorzótól eltekintve a felső becslés is ez).

4. fejezet. Az értekezés negyedik fejezete megszorított összegekkel kapcsolatos eredményeket mutat be, ahol adott A halmaz megszorított h-szorosán azt a $h\times A$ halmazt értjük, melynek elemei előállnak A h darab páronként különböző elemének összegeként.

Erdős és Burr azt sejtették, hogy ha $A\subseteq\mathbb{N}$ aszimptotikus h-bázis, akkor $A\cup 2\times A\cup\ldots\cup h\times A$ szomszédos elemeinek különbsége korlátos. Hegyvári Norbert, Hennecart és Plagne ezt bebizonyították $h=2$-re, valamint minden $h\geqslant 3$-ra ellenpéldát konstruáltak (Theorem 4.1 és Theorem 4.3). Azt a sejtést is megfogalmazták, hogy a $h\times A$-beli szomszédos elemek között végtelen sokszor fellépő maximális különbségek h-ban csökkenő sorozatot alkotnak. Noha ezt a sejtést ezidáig nem sikerült igazolniuk, egy gyengébb állítást bizonyítottak alkalmas részsorozat csökkenéséről (Theorem 4.5). Azt is megmutatták, hogy ha hA pozitív alsó sűrűségű, akkor $h\times A$ is pozitív alsó sűrűségű, bizonyítva ezzel Erdős és Graham egy sejtését (Theorem 4.8). Igazolták továbbá azt, hogy ha A pozitív egészek egy véges halmaza, akkor $2A$ „majdnem minden” eleme $2\times A$-ban is benne van (kevésbé pongyolán: $|2A\setminus 2\times A|/|2A|\to 0$, ha $|2A|\to\infty$, Theorem 4.9).

Erdős nyomán teljesnek nevezünk egy $A\subseteq\mathbb{N}$ halmazt, ha minden elég nagy pozitív egész szám előáll néhány különböző A-beli elem összegeként, és részteljesnek, ha egy végtelen számtani sorozat minden eleme előáll ilyen alakban. Milyen sűrűség garantálja A részteljességét? Könnyű látni, hogy $|A\cap[1,n]|\gg\sqrt{n}$ szükségszerű, és Hegyvári Norbert bizonyította, hogy $|A\cap[1,n]|\geqslant C\sqrt{n\log n}$ (alkalmas C-vel) elégséges. Végül 2006-ban Szemerédi és Vu, felhasználva Hegyvári Norbert ötleteit, egy Annals of Mathematics-ban megjelent cikkükben igazolták, hogy $|A\cap[1,n]|\gg\sqrt{n}$ maga után vonja a részteljességet. Megjegyzem, hogy Hegyvári Norbert ezen eredményét Tao és Vu is idézik Additive combinatorics című tankönyvükben, mely alapműnek számít a kombinatorikus számelméletben (és véleményem szerint a legfontosabb áttekintő könyv a területen). Mindezek bemutatása után Hegyvári Norbert megemlíti a témakör néhány további (saját és másokhoz köthető) eredményét, melyek exponenciális típusú sorozatok teljességére adnak elégséges feltételeket, pontosabban azt vizsgálják, hogy $A(p,q,J)=\{p^aq^b : 0\leqslant a, 0\leqslant b\leqslant J\}$ milyen p,q,J értékekre teljes (nyilván szükséges, hogy p,q relatív prímek legyenek). Hegyvári Norbert p és q függvényében explicit felső korlátot adott a legkisebb J-re, melyből következik $A(p,q,J)$ teljessége (ez is kapcsolatban áll Erdős egy régebbi kérdésével, Theorem 4.20).

5. fejezet. Az értekezés 5.1-es alfejezete expander polinomokról szól. Jó példa erre $f(x,y,z)=xy+z$, mely alkalmas $\varepsilon>0$-ra kielégíti az $|f(A,A,A)|\gg|A|^{1+\varepsilon}$ egyenlőtlenséget minden $A\subseteq\mathbb{N}$ halmazra (ide $\mathbb{F}_p$ is írható, de akkor fel kell tenni, hogy $|A|^{1+\varepsilon}\ll p$). Hegyvári Norbert és Hennecart bizonyították, hogy két változóban az $F(x,y)=f(x)+x^kg(y)$, mint $\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ függvény expanzív tulajdonságú, azaz amint a p prím tart a végtelenbe, olyan $\mathbb{F}_p^2\to\mathbb{F}_p$ függvényeket indukál, melyre $|f(A,B)|/|f(A)|$ tart a végtelenbe $p^\delta<|A|\asymp|B|<p^{1-\delta}$ (valamely $\delta>0$-val) tulajdonságú A,B halmazokra, feltéve, hogy f nem affin ekvivalens egyetlen $x\mapsto x^k$ hatványfüggvénnyel sem

(Theorem 5.7 és Theorem 5.9). Teljes expandernek nevezzük azokat az f polinomokat, melyekre $|f(A,B)| \gg p^{\min(1,2\alpha)}$, amennyiben $|A| \asymp |B| \asymp p^{\alpha}$ valamely $0 < \alpha < 1$-re. Hegyvári és Hennecart megmutatták, hogy bizonyos konkrét polinomok nem teljes expanderek, legalábbis speciális α választására (Proposition 5.11 és Proposition 5.12).

Az 5.2-es alfejezetben tárgyalt polinomiális egyenletek olyanok, melyek $\mathbb{F}_p$ p-nél lényegesen kisebb részhalmazai felett is megoldhatók. Példa erre Hegyvári Norbert következő tétele (Theorem 5.16, a Theorem 5.17 egy bonyolultabb, de általánosabb változat): ha $A,B \subseteq \mathbb{F}_p$ olyanok, hogy $|A||B| = p^{2-2\alpha}$, valamint H olyan részcsoportja $\mathbb{F}_p^{\times}$-nak, melyre $|H| = p^{\beta}$, és $\beta > (8\alpha+1)/3$, akkor az $a+b=h$ egyenlet megoldható ($a \in A$, $b \in B$, $h \in H$ feltételek mellett). A Theorem 5.23-ban Hegyvári Norbert azt bizonyítja be, hogy ha $A \subseteq \mathbb{F}_p$, $|A| \geqslant 2$, Q pedig egy nemkonstans polinom értékeinek multihalmaza, akkor kiválasztható Q-nak egy ($|A|$ és a polinom fokának függvényében) nem túl nagy B részmultihalmaza, melyre $\mathbb{F}_p$ minden eleme előáll „különböző" (a multihalmaz értelemben) B-beli elemekből képzett monomok A-együtthatós lineáris kombinációjaként.

6. fejezet. A hatodik fejezet a H_n Heisenberg-csoporttal foglalkozik. Ennek elemei azok az $\mathbb{F}_p$ feletti $(n+2) \times (n+2)$-es mátrixok, melyek főátlója 1, a főátlón kívül pedig csak az első sorban vagy az utolsó oszlopban tartalmazhatnak 0-tól különböző elemet. Hegyvári Norbert és Hennecart bebizonyították, hogy ha B kellően speciális alakú és elég nagy, akkor $B \cdot B$ H_n centrumának sok mellékosztályát tartalmazza (Theorem 6.3, Proposition 6.5), illetve kicsit kevésbé speciális alakú halmazokra hasonló állítást igazoltak (ez a Theorem 6.8, melyben négytagú $B \cdot B \cdot B \cdot B$ szorzatot tekintenek, és az $n = 1$ esetre szorítkoznak).

A doktori mű kétfejezetes függelékkel zárul: ezek megegyeznek Hegyvári Norbert egy-egy cikkével, melyek az Acta Arithmetica, illetve az Acta Mathematica Hungarica folyóiratokban jelentek meg, és rendre az értekezés Theorem 4.13 és Theorem 4.16 alatt bemutatott eredményeinek bizonyítását tartalmazzák.

ÉRTÉKELÉS

Tartalmi szempontok. Az értekezésben bemutatott eredmények közül többet is érdekesnek találok, ezek közül ismét kiemelném a Theorem 4.13-at, melyre Szemerédi, Tao és Vu is hivatkoznak. A bizonyítások tetszetősek: általában szellemes kombinációi egyszerűbb technikáknak (skatulya-elv, Cauchy-Schwarz), de olykor mélyebb tételeket is felhasználnak (mint amilyen a Weil-becslés).

A bemutatott eredmények és azok utóélete megmutatják, hogy Hegyvári Norbert az additív kombinatorika elismert szakértőjének számít. A megoldott problémák között több olyan is van, amelyik Erdőshöz köthető, de az is világos, hogy Hegyvári Norbert maga is szívesen fogalmaz meg problémákat és sejtéseket.

Formai szempontok. Ugyan a doktori mű felépítése egészében logikus, néhány – a tartalmat nem érintő – kritikai megjegyzést kell tennem. Sajnos az értekezés több kisebb elírást, nyelvi helytelenséget, tipográfiai pontatlanságot is tartalmaz, olykor korábban nem definiált jelöléssel él; ezek helyenként kényelmetlenné teszik olvasását. Természetesen tisztában vagyok azzal, hogy egy ilyen terjedelmű dolgozat esetében a tökéletesség nem várható el, mégis úgy látom, itt a szokottnál nagyobb gyakorisággal fordultak elő formai hibák.

Véleményem szerint az értekezés legértékesebb eredménye a Theorem 4.13, ezt alátámasztandó emlékeztetek arra, hogy az idézők között a terület olyan nagyságai jelennek meg, mint Szemerédi, Tao és Vu. Fájó pont, hogy ennek a szép eredménynek a bizonyítása a főszövegből kiszorult, és a doktori mű függelékébe került.

A magyar nyelvű tézisfüzet rendszeresen használja a Propozíció kifejezést (amikor az angol nyelvű értekezésből Proposition-t kölcsönöz). Noha nem most találkozom ezzel először, mégis jobbnak találnám, ha az angol Proposition magyarul következetesen Állítás volna.

Összegzés. Javaslom a nyilvános vita kitűzését és az MTA doktora cím odaítélését Hegyvári Norbert számára.

Budapest, 2018. március 7.

Maga Péter