Válasz Pethő Attila bírálatára

Először is szeretném megköszönni Pethő professzor alapos és korrekt bírálatát. Minden megjegyzésére, kérdésére megpróbálok válaszolni.

Az 1. kérdésre adott válaszom:

Ismeretes, hogy egy A pozitív felső sűrűségű sorozat kétszer iterált különbséghalmaza tartalmaz Bohr-halmazt. (Ezt elsőként Bogolyubov vette észre). Az egyszer iteráltnak nincs meg ez a tulajdonsága (ezt Kříz igazolta), de nem is teljesen szabálytalan struktúra; Følner tétele szerint minden ilyen A sorozathoz létezik olyan Bohr halmaz, amelyik $A - A$-tól egy nulla sűrűségű sorozatban különbözik. Ez az eredmény képezte Ruzsával publikált eredményeink alapját. Følner típusú tétel általánosabb struktúrákban is használhatóak. Az opponens által javasolt algebrai számtestek egészeinek legegysszerűbb példáinál (Gauss ill. Euler egészek esetében) a bizonyítás nagyon hasonló lehet az általunk adottakhoz. Mindazonáltal Følner eredeti tétele nagyon általános; igaz minden amenabilis csoportra. Itt természetesen másként kell a sűrűségre és a Bohr halmazra tekinteni, tisztázni kell az analóg fogalmakat, ha azt az utat akarjuk járni, amin társszerzőmmel jártunk. Amennyire tájékozott vagyok, Bergelsonék is az ergodelméleti módszerek többségét csak aritmetikus (egész számokra vonatkozó) struktúrákra alkalmazzák, módszerük erre van kidolgozva.

Ruzsával közös eredményeinkben azt szerettük volna jelezni, hogy az "aritmetikus" Følner tétel már elegendő, hogy kombinatorikus ötletet használva megkapjuk Bergelson tételét.

Jelezni szeretném viszont, hogy az értekezés Theorem 2.16 tétele, (mely Bergelson első tételének egy módosított kombinatorikus bizonyítása), messzemenően általánosítható; Révész Szilárddal publikálatlan eredményünk szerint lokálisan kompakt Abel csoportokra is átvihető a bizonyítás ([HR]).

A 2. kérdésre adott válaszom: E kérdést másik opponensem is felvetette. Mindkettőjüknek a következőt válaszolom:

Azt gondolom, hogy pontosabb becslést adni $ord_K(\mathcal{Q})$-re nem lesz könnyű; bizonyításunkban e rend becslésénél első lépésében biztosítani tudtuk egy szabályos struktúra létezését egy véges Kneser típusú tétel segítségével, ebből is adódik egyfajta "veszteség". Javítást úgy érhetnénk el, ha a négyzetszámok véges részhalmazainak összeghalmazára jó becslést tudnánk adni,

(ezt lényegében minden bizonyításban meg kell tenni). Bármilyen ilyen eredmény egyben komoly előrelépést jelentene Rudin egy sejtésére is, (miszerint egy tetszőleges számtani sorozatban sem oszlanak el lényegesen sűrűbben a négyzetszámok, mint a természetes számok körében), és e sejtés nem triviális becsléseiben mély algebrai geometriai eszközök játszanak szerepet. (Bombieri-Halberstam-Pintz, ill. Bombieri-Zannier érték el ezeket azeredményeket). E kapcsolat a következő: ha létezik $c > 0$, hogy ha Q' egy tetszőleges véges részhalmaza a négyzetszámoknak, és $|Q' + Q'| \gg |Q'|^{1+c}$ teljesül, akkor egy tetszőleges A_k, k tagú számtani sorozatban a négyzetszámok száma $\ll k^{\frac{1}{1+c}}$ lenne a triviális $|Q' + Q'| \leq |A_k + A_k| = 2k - 1$ miatt. A legjobb felső becslés (Bombieri-Zannier) a $c < \frac{2}{3}$.) A két probléma természetesen nem ekvivalens, de talán érzékelhető a nehézség lényege.

Noha más szerzők találtak némi javítást ezen becslésekben, nem meglepő módon a négyzetszámok esete volt a nehezebb, pontos becslés nem ismert. Azt gondolom, hogy ennek hátterében a fent említett nehézségek rejlenek. Ha sejtést kellene kimondanom, inkább az alsó becslést látnám az igazsághoz közelibbnek, noha más indokot nem látok, mint hogy az alsó becslésnél szereplő konstrukciómnál jobb nem született, és a javítások a felső becslésben történtek.

Az $ord_K(\mathcal{P})$ becslésénél hasonló volt a bizonyítás struktúrája; keresni kellett "sűrű", véges, prímekből álló halmazokat, ezekre használva az említett Kneser típusú tételt, már lehetett e rendre becslést adni. Érdekes kontraszt, hogy Ramana és Ramaré pár hónapja analítikus eszközökkel igazolta, hogy alsó becslésünk az igaz, bizonyítva, hogy $ord_K(\mathcal{P}) \ll K \log\log K$.

Azt gondolom, hogy e módszerekkel négyzetszámok esetében javításokat igen, lényeges, az alsó becslést jól megközelítő felső becslést viszont nem kaphatunk.

A 3. kérdésre adott válaszom: Ez valóban szép kérdés. Erdőst az eredeti kérdés felvetésében feltehetőleg az motiválta, hogy olyan "ritka" (polilogaritmikus) sorozatok teljességét kérdezze, amelyekre nincs triviális ok az ellenkezőjére. Az opponens sorozatai ilyenek. A G_n ill H_m sorozatokra nyilván kell még valamilyen oszthatósági feltevést is tennünk, (különben csak részteljességet tudnánk bizonyítani). És igen, lehetséges, hogy a mások és az általam használt módszerek működnének. Mindazonáltal én óvatosan fogalmaznék; a rekurzív sorozatok speciális tulajdonságai, erre utalhatott Pethő professzor, okozhatnak bizonyos problémákat.

Ami a konkrét kérdést illeti, bár nem vagyok a rekurzív sorozatok té-

makörének mély ismerője, miszerint "Mi várható, ha egyik sorozatnak sincs domináns gyöke", talán mégis mondható valami: [BG]-ben a szerzők kimutatták, hogy ilyen esetekben a sorozatoknak azon indexei, amelyeken a sorozat pozitív ill. negatív, létezik sűrűsége. Ha most egyik sűrűség se nulla, akkor a részösszeghalmazban felléphet egy "kioltási jelenség",(azaz részösszeg sorozat növekedése mérsékelt lehet) ami hihetővé teszi az említett sorozat teljességét. Ez természetesen egy gondolatkísérlet, az adott problémát érdemes néhány speciális ilyen sorozatra megnézni. Pl. bizonyos speciális rekurzív sorozatoknak megvan az a tulajdonsága, hogy a megszorított összeghalmaz elemei lényegében különbözőek (Bérczes-Pethő), és a részösszeg halmaz-megszorított összeghalmaz jellege közel áll egymáshoz.

Megjegyezném, hogy mostanában társszerzőkkel egy nagyon hasonló eredményt publikáltunk az Acta Arithmetica-ban ill. a J. of Number Theory-ban ([CFH 1,2]). Azt hiszem a felvetett kérdésre mindenképpen érdemes lesz visszatérni, és a rekurzív sorozatok speciális tulajdonságaitól függően az Erdős-Birch típusú becsléseket keresni.

Végül említeném meg, bár számomra elsődleges a negyedik oldalon tett megjegyzésre adandó válaszom.

4.o *"Az értekezés elolvasása után hiányérzetem van; sok szép eredményt olvastam, de ezek kivétel nélkül mások tételeinek a pontosításai, javításai, új bizonyításai. Egyetlen olyan tétellel sem találkoztam, amelyiknél a szerző megjegyezte volna, hogy ezzel ő indított el egy új kutatási irányt vagy egy új bizonyítási módszert dolgozott volna ki."*

Abban mindenképpen egyetértek, hogy erősebben kellett volna hangsúlyoznom, sőt talán külön fejezetrészben kitérnem erre a kérdésre (noha az adott pontoknál ha nem is hangsúlyosan, de jeleztem). Szeretném röviden felsorolni azokat az eredményeket amelyekben új kutatási irányt és/vagy új módszert értem el.

Hilbert kockák részhalmaz összegek; itt valóban "nagy elődök": Hilbert maga, Szemerédi, Sárközy és mások foglalkoztak *véges* sorozatokban található Hilbert kockákkal, viszont *végtelen Hilbert kockák* dimenziójának vizsgálatát több dolgozatban én kezdtem el, csaknem pontos becslést adva ezekre: egyszerzős J.of.NTh, Comb.Prob. and Comp. cikkeim, J. of Comb. Th (A). Ezek olyan eredmények voltak, melyekkel olyan matematikusok foglalkoztak később, mint Jacob Fox, Conlon, Sudakov, Van Vu, Nathanson stb. Itt komoly eltérés van a véges és végtelen eset között, hasonlóan más esetekkel.

Magasabb dimenzióra is kiterjesztettem az ilyen jellegű vizsgálataimat($n \geq 2$ esetében itt is jelentős az eltérés). Meg kell említenem, hogy kutatást elindító eredményeim négyzetszámok és prímszámok Hilbert kockáinak a dimenziójának becslései (Sárközyvel); a kombinatorikus számelmélet vezető kutatói hivatkoztak, majd javították ezen eredményeket (Elsholtz, Dietman, Shparlinski, nem teljes a felsorolás). Megjegyezném, hogy ezen eredményeknek érdekes módon számítástudományi kapcsolatai is vannak (prímek jegyeinek tesztelésére szolgáló Σ_2^3 hálozatok komplexitására lehet következtetni).

E kérdéskörben 16 cikket publikáltam és ha nem is egy elméletet, mindenesetre egy konzisztens problémakört dolgoztam ki e területen.

Megszorított összegek (Restricted sums) szerkezetének és reprezentációs kérdéseinek tisztázásában is, bár ez utóbbit nem tartalmazza a disszertációm, mások által elismerten is a kezdeményezők között vagyok.

Számos általam vizsgált kérdést valóban mások vetettek fel, sok esetben Erdős, de az ezekre adott részeredmények évtizedes, (néha több évtizedes), szünete után az én munkám adott új lendületet, sok esetben a végső megoldás kezdeményével. (Pl. teljes sorozatok Szemerédi és Vu igazolta a sejtést részben az én módszerem felhasználásával; vagy a Birch-Erdős sejtést exponenciális típusú sorozatok teljességére vonatkozóan).

E válasz forma nem alkalmas arra, hogy minden eredményre kitérjek, de mindenképpen meg kell említenem a Heisenberg csoportok bizonyos halmazainak szorzathalmazainak a vizsgálatára, amelyeket előtte senki sem kutatta (és azóta számos visszhangja van). E problémakör szoros kapcsolatban van Helfgott $SL_n(p)$ csoportok halmazainak az expanziós tulajdonságaival, de érdekes módon egészen más jelenséggel állunk szemben. E témakörben régebbi egyszerzős cikkeim eredményét is felhasználjuk: prímtestekben multilineáris függvények teljességéről és véges kommutatív csoportok részhalmazainak komplementer halmazairól szóló eredmények. E tárgykörben eddig öt cikkem jelent meg.

"Bizonyítási módszer" Ahogy Ben Green írja: "... az additív kombinatorika a számelmélet, a harmonikus analízis, a kombinatorika, az ergodelmélet eredményeinek az együttese, melynek célja egy nagyon egyszerű struktúra megértése..."

Valóban, eredményeim igazolásában számos módszert, (kombinatorikus tételeket, exponenciális összegeket, illeszkedési tételeket stb.), használok. Itt csak két módszert említenék meg; utánanéztem: pl. megszorított összegek kezelésében a sunflower lemmát elsőként használtuk. Előttünk Erdős és Sárközy

használta egészen más eredmények igazolására. Azóta ezt a segédeszközt többen alkalmazták. A másik; expander polinomok expanziójának mértékének *effektív* becslésére mi alkalmaztunk bizonyos illeszkedési tételt elsőként (azóta ez az eszköz is nagyon népszerű).

Összefoglalva, köszönettel tartozom Pethő professzornak a méltató szavaiért és el kell fogadnom a bíráló megjegyzéseit, amelyeket a hiányosságokért és pontatlanságokért tett.

Budapest, 2018. április 17. Hegyvári Norbert

Irodalomjegyzék

[CFH1] Y.G. Chen, J-H Fang and N. Hegyvári, On the subset sums of exponential type sequences, Acta Arithmetca 173 no.2 p.141-150 (2016)

[CFH1] Y.G. Chen, J-H Fang and N. Hegyvári, Erdős-Birch type question in N^r, J. of Number Th., https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.10.030 (2017)

[BG] J. P. Bell, S. Gerhold, On the positivity set of a linear recurrence sequence, Israel J. of Math. 157 (2007), 333-345 DOI: 10.1007/s11856-006-0015-1

[HR] N. Hegyvári, Sz. Révész, Bergelson's type theorem in locally compact Abelian groups (publikálatlan kézirat)