Válasz Hajdu Lajos bírálatára

Először is szeretném megköszönni Hajdu professzor alapos és korrekt bírálatát. Mielőtt megjegyzéseire, kérdéseire válaszolnék a legfőbb kifogásra szeretnék reagálni.

Igen, valóban opponensem jól érzékelte, hogy bizonyos kapkodás érezhető a disszertációban. Nem indok, de némi magyarázatként jelezni szeretném, hogy a beadási szakaszban jelezték, hogy az eredeti dolgozat terjedelme túllépi a szokásosat és formája is módosításra szorul. A szoros határidőben ezen új változatban, a matematikai tartalomra koncentráltam, a sok elütés, pontatlanság ebből származik. Ez valóban megnehezíthette opponensem munkáját, amiért őszintén elnézést kell kérnem.

A disszertáció érdemi értékelését köszönettel veszem. A hozzám intézet két kérdés is kutatásaim középpontjában álltak, az ott használt, általam kifejlesztett módszereket több helyen sikerrel alkalmaztam.

Hajdu professzor első kérdése, a következő volt:

1. Kérdés: *'Amint azt korábban említettem, Sárközy "színezett" négyzetszámokkal illetve prímszámokkal történő előállításokra vonatkozó problémájánál az $ord_K(\mathcal{Q})$ és $ord_K(\mathcal{P})$ értékekre nyert alsó illetve felső korlátok nagyságrendileg közel állnak egymáshoz. Ugyanakkor a köztük lévő "hézag" még számottevő. Lát-e lehetőséget arra, hogy a jelenlegi módszerekkel ez a hézag szűkíthető, esetleg (lényegében) teljesen eltüntethető?'*

E kérdést másik opponensem is felvetette. Mindkettőjüknek a következőt válaszolom:

Azt gondolom, hogy pontosabb becslést adni $ord_K(\mathcal{Q})$-re nem lesz könnyű; bizonyításunkban e rend becslésénél első lépésében biztosítani tudtuk egy szabályos struktúra létezését egy véges Kneser típusú tétel segítségével, ebből is adódik egyfajta "veszteség". Javítást úgy érhetnénk el, ha a négyzetszámok véges részhalmazainak összeghalmazára jó becslést tudnánk adni, (ezt lényegében minden bizonyítsában meg kell tenni). Bármilyen ilyen eredmény egyben komoly előrelépést jelentene Rudin egy sejtésére is, (miszerint egy tetszőleges számtani sorozatban sem oszlanak el lényegesen sűrűbben a négyzetszámok, mint a természetes számok körében), és e sejtés nem triviális becsléseiben mély algebrai geometriai eszközök játszanak szerepet. (Bombieri-Halberstam-Pintz, ill. Bombieri-Zannier érték el ezeket azeredményeket). E kapcsolat a következő: ha létezik $c > 0$, hogy ha Q' egy tetszőleges

véges részhalmaza a négyzetszámoknak, és $|Q' + Q'| \gg |Q'|^{1+c}$ teljesül, akkor egy tetszőleges A_k, k tagú számtani sorozatban a négyzetszámok száma $\ll k^{\frac{1}{1+c}}$ lenne a triviális $|Q' + Q'| \leq |A_k + A_k| = 2k - 1$ miatt. A legjobb felső becslés (Bombieri-Zannier) a $c < \frac{2}{3}$.) A két probléma természetesen nem ekvivalens, de talán érzékelhető a nehézség lényege.

Noha más szerzők találtak némi javítást ezen becslésekben, nem meglepő módon a négyzetszámok esete volt a nehezebb, pontos becslés nem ismert. Azt gondolom, hogy ennek hátterében a fent említett nehézségek rejlenek. Ha sejtést kellene kimondanom, inkább az alsó becslést látnám az igazsághoz közelibbnek, noha más indokot nem látok, mint hogy az alsó becslésnél szereplő konstrukciómnál jobb nem született, és a javítások a felső becslésben történtek.

Az $ord_K(\mathcal{P})$ becslésénél hasonló volt a bizonyítás struktúrája; keresni kellett "sűrű", véges, prímekből álló halmazokat, ezekre használva az említett Kneser típusú tételt, már lehetett e rendre becslést adni. Érdekes kontraszt, hogy Ramana és Ramaré pár hónapja analítikus eszközökkel igazolta, hogy alsó becslésünk az igaz, bizonyítva, hogy $ord_K(\mathcal{P}) \ll K \log\log K$.

Azt gondolom, hogy e módszerekkel négyzetszámok esetében javításokat igen, lényeges, az alsó becsléshez jól megközelítő becsléset viszont nem kaphatunk.

2. Kérdés: *Számomra úgy tűnik, hogy azon polinomosztály, melyekről az irodalomban eddigiekben sikerült igazolni az expander tulajdonságot, meglehetősen szűk. Ennek mi az oka? Az várható, hogy ez a tulajdonság "ritka", és csak valamilyen speciális típusú polinomcsaládokra áll fenn, vagy csupán a tulajdonság igazolása nehéz, ezért szűk az ismert lista?*

Mint azt Hajdu professzor is jelezte az igazán érdekes és nehéz kérdés a kétváltozós expander polinomok kutatása jelentette. Természetesen egy $F(x, y)$ expander polinomra az $R(F(x, y))$ ($R : \mathbb{F}_p \mapsto \mathbb{F}_p$ nem konstans polinom) is expander lesz, tehát lényegében azokat az $F(x, y)$ polinomokat kellene felkutatni, amelyek nem nagyítóak. Általános vélekedés, hogy a kivételek, (azaz melyek nem "nagyítanak"), azok lényegében az affin összefüggő polinomokból képzett kétváltozós polinomok.

Megjegyezném, bár az általunk igazolt polinomosztály szűk, számos igen intenzíven vizsgált polinom illetve halmaz ebből az osztályból származtatható (pl. nagy irodalma van az $A(A + 1)$ típusú halmaz elemszámának a becslésének, melyhez tartozó polinom – $f(x, y) = y(y + 1)$ – az általunk leírt polinomosztályba tartozik).

E kérdéskörnél is – mint a híres prímtestbeli összeg-szorzat problémánál – a becslés erőssége függ attól, hogy mekkora az adott A, B halmazpár mérete.

A fent említett vélekedést "nagy" halmazokra Terence Tao (*Expanding Polynomials over finite fields of large characteristic, and a regularity lemma for definable sets*, cikkében, melyben idézi munkánkat is) igazolja mély, algebrai geometriai eszközökkel. Például e cikkben Tao bizonyítja, hogy ha $|A||B| \gg p^{2-1/8}$ és $F(x,y)$ nem $Q(P_1(x)+P_2(y))$ vagy $Q(P_1(x)\cdot P_2(y))$ alakú ($Q, P_1, P_2 :\ \mathbb{F}_p \mapsto \mathbb{F}_p$ polinomok), akkor $F(x,y)$ expander polinom (azaz ez is egy részleges eredmény, a nagyító tulajdonság függ a tárgyhalmazok méretétől.) "Kisebb" halmazokra is érzékelhető, hogy pl. a teljes expanzióval is lehet gond, (mint ahogy azt a disszertáció Proposition 5.12 is mutatja)

Más eszközök használatának az igénye is felmerült pl. az ú.n. "Combinatorial Nullstellensatz" algebrai eszköz, de ezek sokkal gyengébb eredményeket adnak. Később F. Petrov publikált ilyen módszerrel (gyengébb) tételt.

Végül megemlíteném, hogy a valós test esetében Elekes-Rónyai egy cikkében (bár az ottani definícióban a nagyítás egy gyengébb feltételt jelent) hasonló a következtetés: azaz ha a két változó szerint nem szeparálható $f(x,y)$, akkor mindig létrejön nagyítás. Ennek bizonyítása is mély algebrai eszközöket igényel.

Még egyszer köszönöm az opponensem alapos munkáját és pozitív értékelését és az eljárással kapcsolatos támogató állásfoglalását.

Budapest, 2018. április 17. Hegyvári Norbert