Opponensi vélemény Hegyvári Norbert
A kombinatorikus számelmélet néhány problémájáról
című MTA doktori értekezéséről

Hegyvári Norbert az értekezését angol nyelven írta. A témáját hat fejezetben dolgozta fel, amelyet két dolgozatának másolatával, bevezetéssel, a jelölések (részleges, lásd később) listájával és bőséges irodalomjegyzékkel tett teljessé. Összesen 16, köztük 10 egyszerzős, publikációjának eredményeit dolgozta fel. A fejezetek és az alfejezetek egységes struktúrában készültek; a témát először szakmatörténeti háttérrel motiválja, ismerteti annak központi eredményeit, majd megfogalmazza a saját eredményeit, végül bebizonyítja azokat. Amennyiben a szerző eredményeit mások továbbfejlesztették vagy pontosították, akkor ismerteti ezeket a publikációkat is. Az értekezés jó didaktikai érzékkel és világos stílusban készült. Az opponens ugyanis soha sem dolgozott a kombinatorikus számelméletben, ennek ellenére jól tudta követni a dolgozat érveléseit és megértette a bizonyításokat.

Az értekezés leghosszabb fejezete a 2., amelyik a Hilbert kockákkal kapcsolatos eredményekkel foglalkozik. Már a XIX. században Hilbert is foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy egy természetes számokból álló halmaz tartalmaz-e Hilbert kockát és ha igen, akkor mekkorát. Szemerédi Endre 1969-ben bizonyította, hogy ha $A \subseteq \mathbb{N}$ pozitív alsó sűrűségű, akkor $A \cap [1, n]$ minden elég nagy n-ra tartalmaz egy $c \log\log n, c > 0$ dimenziós Hilbert kockát. Az $A \subseteq \mathbb{N}$ monoton növekedő végtelen sorozatra legyen

$$H_A(n) = \max\{m \ : \ A \cap [1, n] \text{ tartalmaz } m \text{ dimenziós Hilbert kockát}\}.$$

Jelölje továbbá $A(n)$ az A azon elemeinek a számát, amelyek n-nél nem nagyobbak. Az értekezés 2.5 Tétele szerint létezik olyan pozitív alsó sűrűségű A halmaz, amelyre $H_A(n) \leq c\sqrt{\log n \log\log n}$, $c = 4(\log(4/3))^{-1/2}$[1]. A bizonyítás a valségi módszert követi, így nem konstruktív. Sokkal egyszerűbb a 2.8 állítás bizonyítása, amely az előbbi tétel párja, és amely szerint majdnem biztos, hogy egy végtelen A halmazra $H_A(n) > c\sqrt{\log n}$ teljesül.

Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy a fenti tételekben a pozitív alsó sűrűség követelményét lehet-e gyengíteni. A 2.11 Tétel szerint igen, ha $A(n) \gg n^{4/5}$, amikor is

$$H_A(n) \gg \log \frac{\log n}{\log(n/A(n))}.$$

A témakör szép záró állítása a 2.12 Következmény, amely szerint bármely $1/2 < c < 1$-re van olyan $A \subseteq [1, n]$, amelyre $|A| > ne^{-(\log n)^c}$ és[2]

$$\frac{11}{10}(1 + o(1)) \log\log n \leq H_A(n) \leq \frac{1}{\log 2} \log\log n$$

teljesül.

Érdekesek és szépek a 2.2. alfejezet *On Bergelson's theorem* eredményei. Azt a kérdést vizsgálja, hogy ha A pozitív felső sűrűségű halmaz, akkor milyen szabályos struktúra létezését lehet garantálni az $A - A$ halmazban?

[1] Az értekezésben $H(n)$, a tézisekben a helyes $H_A(n)$ szerepel.

[2] A (2.8) képletben = áll > helyett.

Bergelson 1985-ben bizonyította, hogy $A-A$ bármely k-ra tartalmazza kB-t valamely végtelen B halmazra. Bizonyítása Fürstenberg egy mély ergodelméleti eredményére támaszkodik. Hegyvári 2008-ban kombinatorikus bizonyítást adott egy kicsit erősebb állításra, amely az értekezésben Theorem 2.16 néven szerepel[3]! Hegyvári és Ruzsa, Bergelson egy későbbi eredményét élesítve, belátta, hogy van olyan végtelen C halmaz is, hogy $A-A$ nemcsak a C elemeiből készített, súlyozott, véges összegeket, hanem a véges szorzatokat is tartalmazza. Ezek a vizsgálatok és eredmények jól illeszkednek az értekezés témájához, de nem értem, hogy miért kerültek a Hilbert kockákról szóló fejezetbe. Ez a diszkrepancia a szerzőnek is feltűnhetett, mert a tézisekben a 2. alfejezet eredményeit csak a 3. és 4. alfejezet eredményei után tárgyalja. Szerintem jobb lett volna a Bergelson problémakört külön fejezetben tárgyalni.

1. Kérdés. *A Hegyvári-Ruzsa tétel értelmes állítás tetszőleges végtelen kommutatív gyűrűben. Igaz-e például algebrai számtestek egészei gyűrűiben?*

A 3. alfejezet additív és multiplikatív Hilbert kockák feletti additív és multiplikatív karakter összegekkel foglalkozik. Fő célja a kockák energiájának a becslése. Brown, Erdős és Freedman 1990-ben kérdezték, hogy a négyzetszámok halmazában van-e tetszőleges dimenziós Hilbert kocka. Ennek a kérdésnek a megválaszolásával foglalkozik a 4. alfejezet. Sárközyvel 1999-ben megmutatták, hogy $H_{\mathcal{P}}(N) \ll \log N$ (Theorem 2.38) és $H_{\mathcal{Q}}(N) < 48\sqrt[3]{\log N}$ (Theorem 2.32)[4] , ahol $\mathcal{P}$ a prímek, $\mathcal{Q}$ a négyzetszámok halmazát jelenti. A $H_{\mathcal{Q}}(N)$-re adott korlát sokkal jobb, mint amit egy hasonló elemszámú véletlen sorozattól a fentebb említett 2.12 Következmény fényében elvárhatunk.

Az értekezés 3. fejezete Ramsey típusú problémákkal foglalkozik. Először Raimi egy fél évszázados tételének messzemenő általánosítását adja (Theorem 3.2)[5]. Legyen A a természetes számok egy aszimptotikus bázisa. Sárközy definiálta az A halmaz K-színezésének a rendjét $ord_K(A)$-t. Hegyvári és Hennecart bebizonyította, hogy tetszőleges K-ra

$$\begin{aligned}(e^{\gamma}+o(1))K\log K &\leq ord_K(\mathcal{P}) \leq 1500K^3\\ K\exp((\log 2+o(1))\frac{\log K}{\log\log K}) &\leq ord_K(\mathcal{Q}) \leq 10^9(K\log K)^5.\end{aligned}$$

Az értekezésben ezek külön tételekben, Theorems 3.7, 3.9, 3.10 és 3.13 szerepelnek. Természetes módon vetődik fel a következő kérdés:

2. Kérdés. *Az $ord_K(\mathcal{P})$ és $ord_K(\mathcal{Q})$-ra vonatkozó alsó és felső becslések elég távol vannak egymástól. Mi lehet a tényleges nagyságrend?*

A 4. fejezet nagyon szorosan kapcsolódik Erdős Pál munkásságához. Az $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ halmaz aszimptotikus hézagának a

$$\Delta(X) = \limsup_{i\to\infty}\{x_{i+1} - x_i\}$$

---

[3] A tétel kimondása sajnos itt sem sikerült tipográfiai hiba nélkül ($\subseteq =$)

[4] A 2.4 alfejezet elején az $F_{\mathcal{Q}}(N)$ jelölést találjuk az értekezésben általánosan használt $H_{\mathcal{Q}}(N)$ helyett. Ezen túl elég sokáig kellett törnöm a fejemet, hogy mit jelent $\mathcal{Q}$ a 33. oldalon.

[5] Az F_j halmazokról fel kell tenni, hogy végtelenek, különben az állítás nem lehet igaz.

számot nevezzük. Burr és Erdős 1996-ban sejtette, hogy ha $A \subseteq \mathbb{N}$ h-ad rendű aszimptotikus bázis, akkor $\Delta(A) < \infty$. Hegyvári, Henncart és Plagne megmutatta (Theorem 4.1), hogy a Burr-Erdős sejtés $h = 2$-re igaz, $h \geq 3$-ra azonban hamis. Ettől pontosabb eredményeket is bizonyítottak az összeghalmaz és az összeghalmaz sűrűségének a kapcsolatáról (Theorems 4.5, 4.8. és 4.9). A fejezet második fele teljes és majdnem teljes (subcomplete) halmazok tulajdonságaival foglalkozik. Ezeket a disszertáns az ezredforduló környékén publikálta, az értekezésbe a folyóiratcikkek másolatait kiegészítésként kötötte be[6]. Erdős sejtette és B. Birch 1959-ben bebizonyította, hogy a $\{p^n q^m : n, m = 0, 1, \ldots, (p, q) = 1\}$ halmaz teljes. Jelölje $K(p, q)$ azt a legkisebb K számot, amelyre az $\{p^n q^m : m = 0, 1, \ldots, K, n = 0, 1, \ldots\}$ halmaz teljes. Hegyvári 2000-ben explicit felső becslést adott $K(p, q)$-ra (Theorem 4.16).

3. Kérdés. *Legyenek $(G_n), (H_n)$ pozitív egész számok lineáris rekurzív sorozatai. Tegyük fel, hogy mindkettőnek van domináns karakterisztikus gyöke és ezek multiplikatíven függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor a $\{G_n H_m : n, m = 0, 1, \ldots\}$ halmaz teljes? A válasz minden bizonnyal igen és úgy lehet bizonyítani, mint Birch tételét. Mi várható azonban akkor, ha (G_n)-nek, vagy (H_n)-nek nincs, vagy egyiknek sincs domináns gyöke?*

Az 5. fejezet is két részből áll és mindkettő a p elemű $\mathbb{F}_p$ test feletti polinomokkal foglalkozik. Az $f : \mathbb{F}_p^2 \mapsto \mathbb{F}_p$ függvényt expanzívnek[7] nevezzük, ha bármely $0 < \alpha < 1$-hez van olyan $\epsilon > 0$, hogy bármely $A, B \subseteq \mathbb{F}_p, |A|, |B| \asymp p^\alpha$-re $|f(A, B)| \gg p^{\alpha+\epsilon}$. Az első expanzív polinomot Bourgain konstruálta 2005-ben. 2009-ben Hegyvári és Hennecart egy végtelen expanzív polinomcsaládot talált. Bebizonyították (Theorem 5.7), hogy az $f(x) + x^k g(y)$ polinom expanzív feltéve, hogy f, g egész együtthatós polinomok és x^k affin független $f(x)$-től. Ez szép és általános tétel, amelyben az x^k affin független $f(x)$-től szükséges, de nem túl nagy megszorítás. A bizonyítás csak minden, elég nagy, prím esetén működik. Mi a helyzet a maradék, véges sok, prímmel? Hegyváriék tovább is mentek, alsó korlátot bizonyítottak az expanzió mértékére is és eredményeket értek el teljesen expanzív polinomokkal kapcsolatban is.

Sárközy egy, Hasse-Weil[8] típusú, tételéhez kapcsolódik a fejezet második része. Az $F : \mathbb{F}_p^4 \mapsto \mathbb{F}_p$ polinomot lefedőnek nevezünk, ha szürjektív. Hennecarttal megmutatták (Fact 5.22), hogy ha $F_1(x, y) = xy + x^2 h_1(y)$ és $F_2(x, y) = x^2 y + x h_2(y), 0 \neq h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vannak olyan $0 < \delta, \delta' < 1$, hogy bármely p prímre és $A, B, C, D \subseteq \mathbb{F}_p$ halmazokra $x + y + F_i(u, v)$ lefedő polinom feltéve, hogy

$$|C|, |D| > p^{1/2-\delta},\ |A||B| > p^{2-\delta'}.$$

[6]Hiányolom, hogy a kiegészítések szerepéről a bevezetésben egyetlen szó sem esik, azt csak a 69. oldalon tudja meg az olvasó.

[7]A szerző expandert használ expanzív helyett, de aztán az expanzió mértékéről beszél. A matematika más területein, például dinamikus rendszerek hasonló kontextusban használják az expanzív leképezés fogalmát.

[8]Lásd például J.H. Silverman, J. Tate, Rational Points on Elliptic Curves, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1992

Az értekezés utolsó fejezete Heisenberg csoportokra vonatkozó struktúra tételekkel foglalkozik.

Véleményem összegzése előtt szólni szeretnék a dolgozat formájáról. Dicséretes, hogy a szerző egységes formátumba hozta megjelent cikkei eredményeit, összefésülte az irodalomjegyzékeket és jelöléslistát is készített. Sajnos az utóbbi hiányos; korábban már jeleztük a $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ hiányát, most említjük, hogy a 12. oldalon használt $FS(A)$, a 19. oldalon használt "restricted sum" jelölések magyarázatát csak sokkal később, a 77. oldalon található $*$ operáció jelentését sehol sem, a 79. oldaltól használt $H < \mathbb{F}_p^*$-ét pedig csak a tézisekben találtam meg. A szerző általában betartja a tudományos közléssel szembeni követelményeket, de több esetben, sajnos, nem adott meg pontos hivatkozást:

- **p. 21, Lemma 2.18:** Ramsey
- **p. 25:** Itt a szerző említi Bourgain és Garaev, majd Petridis és Shparlinski, végül Garaev, Konyagin és Shkredov eredményeit pontos hivatkozás nélkül.
- **p. 34:** Olson
- **p. 39:** "Wood observed - based on a work of Paturi, Saks and Zane -..."
- **p. 39:** "By a theorem of R. Tijdeman we know..."
- **p. 65:** "K.F. Roth and Gy. Szekeres proved...", később "S. Burr investigated...", végül "I quote here a theorem of Zeckendorf who proved..."
- **p. 79:** " ...firstly investigated by Schur."
- **p. 87:** " Green and Ruzsa proved..."
- **p. 88:** Babai-Nikolov-Pyber

A disszertációban tárgyalt eredmények nagy többsége a számelmélet vezető orgánumaiban (Acta Arithmetica, Journal of Number Theory, Ramanujan Journal, Journal für die reine und angewandte Mathematik, stb.) jelent meg, amit komoly szakmai szűrőnek és elismerésnek tekintek. A szerző évtizedek óta eredményesen dolgozik a kombinatorikus számelméletben. Nem tudok azonban egyértelműen pozitív véleményt írni. Az értekezés elolvasása után hiányérzetem van; sok szép eredményt olvastam, de ezek kivétel nélkül mások tételeinek a pontosításai, javításai, új bizonyításai. Egyetlen olyan tétellel sem találkoztam, amelyiknél a szerző megjegyezte volna, hogy ezzel ő indított el egy új kutatási irányt vagy egy új bizonyítási módszert dolgozott volna ki. Olyan van, hogy egy ismert bizonyítási módszert teljesen új területen alkalmaz eredményesen. Hegyvári Norbert értekezésében az erények jóval meghaladják a, legtöbbször kapkodás vagy felületes munka miatt becsúszott, hiányosságokat, ezért **a tudományos eredményeket elfogadom és az értekezés nyilvános vitára tűzését határozottan javaslom**.

Debrecen, 2018. március 28.

(Dr. Pethő Attila)
MTA rendes tagja