

Bírálati vélemény Hegyvári Norbert MTA doktori értekezéséről

Hegyvári Norbert „Topics in Combinatorial Number Theory” címmel nyújtott be MTA doktori pályázatot illetve értekezést. Az alábbiakban az értekezésről alkotott véleményemet foglalom össze.

Formai értékelés

A disszertáció angol nyelven íródott 100 oldalas mű, amely hat fejezetből áll. Ezen kívül a szerző két cikket mellékletként az értekezés végére fűzte. Az értekezés felépítése logikus, a vizsgált témakörök bemutatása (alapvetően) világos. Ugyanakkor a disszertáció mind technikailag (jelölésileg), mind nyelvtanilag rengeteg, helyenként már a megértést is jelentősen zavaró hibát tartalmaz. Az elírások, hiányzó jelölések valamint a nyelvtani és szerkesztési hibák száma messze meghaladja az elfogadható szintet. Nyilvánvalónak tűnik, hogy a szerző a formai ellenőrzésre a szükséges idő töredékét sem fordította. Ez a tartalmi értékelést is befolyásolja: az olvasó egy-egy zavaró hiba miatt lépten-nyomon kizökken a gondolatmenetből, néhány helyen pontosan nem is tudja, mi történik. Illusztrációképpen bemutatok néhány konkrét hibát.

Elírás jellegű hibák. Szándékosan csak a bevezetés első oldalára, azaz az értekezés 7. oldalára szorítokozom; a későbbiekben is rengeteg elírás, nyelvtani hiba (pl. hiányzó állítmány, prepozíció, stb.) nehezíti a szöveg követését és megértését. Azonban ezek teljes körű felsorolására már csak terjedelmi okokból sem vállalkozom.

3. sor: treatment ... are

4. sor: e.t.c (rossz pontozás)

6. sor: „devote” után hiányzik a „to”

11. sor: „lies the fact” - hiányzik az „in”

12. sor: „This section based ...” - hiányzik az állítmány

17. sor: „303307” - hiányzik a kötőjel

Ezeket kívül megemlítem még, hogy már a bevezetőben keveredik az egyes szám első személy és a többes szám első személy, valamint a jelen és a múlt idő használata. Emellett az idézések stílusa messze nem egységes, illetve (ami súlyosabb), a hivatkozáslistában szereplő cikkek sorrendje nem mindig megfelelő (például [CFH] érthetetlen helyen van, de [HR16] is rossz helyen áll).

Technikai hibák. Nem „érdemi” matematikai hibákról, inkább a tartalmat is (lényegesen) érintő formai (több helyen meglehetősen zavaró) hibákról van szó. Itt sem törekszem a teljességre (távolról sem).

12. oldal, Theorem 2.5 fő formulájában $H(n)$ helyett $H_A(n)$ értendő

12. oldal, Lemma 2.6: szerintem $FS(B)$ korábban sehol sincs definiálva

16. oldal, Theorem 2.10: nem világos, hogy ez a tétel kié

18. oldal, Theorem 2.13: a Bohr halmaz definíciójában mi az S ?

19. oldal: szerintem a „restricted sum” nincs definiálva (és a szerző „resticted” összegekről beszél - újabb elírás)

20. oldal, Theorem 2.16: „ $D(A) \supseteq$ ” - most akkor melyik?

21. oldal, Lemma 2.18: B' helyett $B' \subseteq X$ értendő

Összességében véleményem szerint a disszertáció formai szempontból figyelmetlen, gondatlan munka, amely ebben a tekintetben messze elmarad az elvárt szinttől. A disszertációban található formai jellegű hibák mennyisége és minősége már a munka tartalmi megítélését is zavarja, nehezíti. Ugyanakkor úgy gondolom, hogy a disszertáció érdemi értékelése ennek ellenére is lehetséges: a hibák nem „érdemi”, a matematikai mondanivaló minden esetben (helyenként kisebb nehézségek árán) megérthető.

Tartalmi értékelés

A disszertáció fejezeteit követve adom meg véleményemet.

Hilbert kockákkal kapcsolatos eredmények. A bevezető jellegű szakaszokat (Preface, Notations, Introduction) követően, a disszertáció második (leghosszabb) fejezetében Hilbert kockákkal kapcsolatos eredményeit mutatja be a szerző. A Hilbert kockák kérdésköre egy önmagában is érdekes, de számos fontos alkalmazással is bíró, sokak által vizsgált terület. A fogalom és több alapvető eredmény megalkotása Hilbert nevéhez fűződik. A későbbiekben több neves matematikus dolgozott a területen, például Bergelson, Brown, Erdős, Freedman, Fürstenberg, Konyagin, Montgomery, Ruzsa, Sárközy, Shkredov, Shparlinski és Szemerédi, fontos és mély eredményeket bizonyítva. A témában Hegyvári több érdekes és lényeges eredményt igazol.

Elsőként Hilbert kockák dimenzióit vizsgálja adott halmazokban. „Sűrű” halmazok esetén megmutatja, hogy létezik olyan pozitív alsó sűrűségű A halmaz, melyre $A \cap [1, n]$ nem tartalmaz $c\sqrt{\log n \log \log n}$ -nél nagyobb dimenziójú Hilbert kockát, ahol $c = 4(\log(4/3))^{-1/2}$. (Megemlítem, hogy a téziszfejezetben ennél az eredménynél a $c = 6/(\log(5/4))$ érték szerepel; a hivatkozott [H97] cikk szerint az előbbi a helyes.) A Szemeréditől származó alsó becslés $c' \log \log n$ alakú. A későbbiekben Conlon, Fox és Sudakov a felső korlátból el

tudta távolítani a $\sqrt{\log \log n}$ faktort. Hegyvári egy valószínűségi elveken alapuló konstrukcióval megmutatja, hogy a $\sqrt{\log n}$ faktor jelenléte viszont már szükséges, azaz a $c\sqrt{\log n}$ korlát (a konstanstól eltekintve) már éles. A továbbiakban Hegyvári olyan $[1, n]$ -beli „ritka” (de azért $[1, n]$ -ből „elegendően sok” elemet tartalmazó) sorozat létezését is igazolja, amelyben a maximális méretű Hilbert kocka dimenziója alulról és felülről is lényegében $\log \log n$ konstansszorosaival korlátozható. Megállapítható, hogy ebben a témakörben a maximális méretű Hilbert-kockák dimenzióra vonatkozó alsó- és felsőbecslések bizonyos értelemben „összeértek”, és ebben Hegyvári eredményeinek is fontos szerepe van.

Ezek után a $D(A) = A - A$ differenciahalmaz vizsgálata következik. A kiindulópontot klasszikus tételek jelentik: Kříž megmutatta, hogy létezik olyan (egészekből álló) pozitív felső sűrűségű halmaz, melyre $D(A)$ nem tartalmaz Bohr halmazt; ugyanakkor Bogolyubov egy eredménye szerint $D(D(A))$ már igen. Így érdekes kérdés $D(A)$ szerkezetének vizsgálata, ahol A pozitív felső sűrűségű. Bergelson tétele szerint $D(A)$ minden k -ra tartalmaz egy k -tagú $B + \dots + B$ összeget, ahol $|B| = \infty$. Bergelson bizonyítása ergodelméleti alapokon nyugszik. Hegyvári, egy additív kombinatorikai háttérű módszerrel megmutatja, hogy tetszőleges pozitív Banach sűrűségű $\mathbb{Z}^n$ -beli A halmaz minden k -ra tartalmaz k tagú korlátozott összeget. Bergelson, Erdős, Hindman és Luczak bizonyos additív és multiplikatív tulajdonságú halmazok létezését is igazolta $D(A)$ -ban (az egészek körében, pozitív felső sűrűség esetén). Hegyvári (Ruzsával közösen) az eredmény messzemenő általánosítását adja: míg az eredeti tételben az együttthatók/kitevők értéke csupán 1 vagy 2 lehet, Hegyváriék tételében az additív és multiplikatív jellegű halmazok igen általánosak.

Egy másik, sokak (köztük neves szerzők, például Bourgain, Konyagin, Montgomery, Shparlinski, Shkredov) által vizsgált fontos kérdés a karakterösszegek vizsgálata illetve becslése, bizonyos „strukturált” halmazok felett. Montgomery egy problémafelvetéséhez kapcsolódóan Hegyvárinak, Hilbert kockák energiájának becslésével sikerül megmutatnia, hogy egy Hilbert kockán tekintett karakterösszeg L_1 -normája (bizonyos értelemben) „nagy”.

A fejezet utolsó, de szintén igen érdekes problémát tárgyaló alfejezetében a szerző Brown, Erdős és Freedman egy kérdéséből indul ki: tartalmaz-e a négyzetszámok $\mathcal{Q}$ halmaza tetszőlegesen nagy (véges) dimenziójú Hilbert kockát? Rivat, Sárközy és Stewart $c \log(n)$ alakú felső becslését (Sárközyvel közösen) javítva Hegyvári megmutatja, hogy bármely $\mathcal{Q} \cap [1, n]$ -beli Hilbert kocka dimenziója kisebb, mint $48\sqrt[3]{\log n}$. Az eredmény igazolásához egy hasonló (szintén Sárközyvel közös) eredmény bizonyítása szükséges, a $\mathbb{Z}_p$ -beli kvadratikus maradékokra vonatkozóan. Hegyvári a prímek körében is vizsgálja a megfelelő kérdést. Sárközyvel közösen megmutatják, hogy ebben az

esetben a megfelelő Hilbert kockák dimenziója legfeljebb $(16 + \varepsilon) \log n$. Megemlíteném, hogy a kérdés vizsgálatához sokan kapcsolódtak (például Shparlinski és Elsholtz). Megemlítem még, hogy a szerző végtelen dimenziós Hilbert kockák létezését is vizsgálja bizonyos halmazokban. (A négyzetszámok és a prímek halmazában ilyenek nem léteznek.) Mivel azonban ezeket az eredményeket bizonyítás nélkül közli, ezekről részletesebben én sem szólok.

Ramsey típusú additív problémák. Ebben a fejezetben Hegyvári két kérdést tárgyal.

Az első alfejezetben a kiindulópont Raimi és Hindman egy érdekes tétele. Raimi a következőt mutatta meg (melyre később Hindman egy elemi bizonyítást adott). A pozitív egészeknek van egy olyan E részhalmaza, amelyhez $\mathbb{N}$ bármely $D_1, \dots, D_r$ partíciója esetén valamelyik D_i osztállyal, illetve alkalmasan választott k egésszel mind a $(D_i + k) \cap E$ halmaz, mind a $(D_i + k) \setminus E$ halmaz végtelen. Ezen tételnek Hegyvári egy messzemenő általánosítását adja: nála nem csak egy E halmaz illetve a komplementere metsz bele az egyik osztály egy eltolójába, hanem több, előre megadott sűrűségű halmaz teszi ezt, és nem csak egy eltolttal, hanem egy Hilbert kocka bármely elemével történő eltolttal.

A második alfejezetben vizsgált kérdések szintén nevezetes, Sárközy által felvetett problémákhoz kapcsolódnak. Sárközy a következő problémát fogalmazta meg. Adott k esetén határozzuk meg azt a legkisebb $t = t(k)$ számot, melyre teljesül, hogy a négyzetszámok tetszőleges k -színezése esetén bármely elég nagy pozitív egész előáll legfeljebb t darab azonos színű négyzetszám összegeként. Sárközy négyzetszámok helyett prímekkel is hasonló kérdést fogalmazott meg. Sárközy egy módszerét továbbfejlesztve, Hegyvárinak (Hennecarttal közösen) erre az értékre mindkét esetben sikerült mind alsó, mind felső korlátot adnia (melyek nagyságrendileg közel állnak egymáshoz). A problémakör vizsgálatához azóta többen is csatlakoztak (például Akhilesh, Ramana, Ramaré és Chen).

Megszorított összegek. Ezen fejezet kiindulópontja Burr és Erdős következő problémája. Tegyük fel, hogy az $a_1 < a_2 < \dots$ sorozat egy k -ad rendű aszimptotikus bázis. Legyenek $b_1 < b_2 < \dots$ azon egészek, melyek előállnak legfeljebb k darab **különböző** a_i összegeként. Igaz-e, hogy ekkor $\limsup(b_{i+1} - b_i) < \infty$? Hegyvári (Hennecart és Plagne társszerzőségével) megmutatta, hogy $k = 2$ esetén a válasz pozitív (és $\limsup(b_{i+1} - b_i) \leq 2$), $k > 2$ esetén azonban negatív. Az utóbbi állítást explicit ellenpélda konstruálásával igazolták. A fejezetben a szerző Erdős és Graham következő két kérdését is megválaszolja: igaz-e, hogy ha az A halmaz rendje r , akkor $r \times A$ (az A elemeiből képzett r -tagú korlátozott összeghalmaz) pozitív alsó sűrűségű; illetve ha sA felső sűrűsége pozitív, akkor az $s \times A$ halmazé is az? Valójában

a kérdezetteknel általánosabb összefüggést igazolnak: megmutatják, hogy $h \times A$ alsó sűrűsége hA alsó sűrűségének egy explicit (csak h -tól függő) konstansszorosával alulról korlátozható. Emellett azt is igazolják, hogy $|A| \geq 2$ esetén $|(2A) \setminus (2 \times A)|$ „kicsi”. Megemlítem még, hogy az alfejezet második felében Hegyvári teljes (complete) és részteljes (subcomplete) sorozatokról is szót ejt. Mivel azonban itt bizonyításokat nem közöl, így ezekről az eredményekről részletesen én sem írok. Csupán azt említem meg, hogy Hegyvári egy Erdős-sejtésre vonatkozó részeredményére illetve bizonyításának módszereire a későbbiekben a sejtés teljes megoldásakor Szemerédi és Vu jelentősen támaszkodott.

Expander és lefedő polinomok. Egy $\mathbb{F}_p$ feletti kétváltozós $F(x, y)$ polinomot (leegyszerűsítve fogalmazva) expander polinomnak nevezünk, ha bármely $c_1 p^\alpha$ nagyságú A, B halmaz esetén $|F(A, B)|$ nagysága $c_2 p^{\alpha+\epsilon}$; itt $\epsilon = \epsilon(\alpha)$ az ún. expanziós mérték. Az ilyen típusú polinomokat sokan vizsgálták. Megemlítendő, hogy Bourgain, Katz és Tao egy tétele alapján ilyen tulajdonságú háromváltozós polinom könnyen konstruálható, így az igazán érdekes problémát a kétváltozós eset jelenti. Az első példa, nevezetesen $F(x, y) = x^2 + xy$, Bourgaintól származik, ineffektív expanziós mértékkel. Hegyvári (Hennecarttal közösen) elsőként adott példát expander polinomok egy végtelen osztályára, megmutatva, hogy ha f, g egész együtthatós polinomok, és $f(x)$ és x^k affin függetlenek, akkor $F(x, y) = f(x) + x^k g(y)$ expander polinom. Emellett $F(x, y)$ expanziós mértékére is effektív alsó korlátot adtak. Módszerük többek között Bourgain, Katz és Tao illetve Vinh $\mathbb{F}_p^2$ illetve $\mathbb{F}_p^d$ -beli illeszkedő pontok és egyenesek illetve hipersíkok számára vonatkozó becslésein alapszik. Hegyváriék bevezették a teljes expander fogalmát is: azok a polinomok ilyenek, melyekre a fenti tulajdonság egy I halmazhoz (tipikusan intervallumhoz) tartozó összes α értékre érvényes. Ezzel kapcsolatban Shkredov egy tételéhez kapcsolódóan megmutatták, hogy az $(1/2, 1)$ intervallumon Bourgain eredeti polinomja nem teljes expander.

Szintén ebben a fejezetben Sárközy egy nevezetes tételével illetve problémájával kapcsolatos eredmények is szerepelnek. Sárközy megmutatta, hogy ha $A, B, C, D \subseteq \mathbb{F}_p$ és $|A||B||C||D| > p^3$, akkor az $a + b = cd$ ($a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$) egyenlet megoldható. Hegyvári (részben Hennecarttal közösen) igazolta a tétel különböző általánosításait, például $a + b = F(c, d)$ alakú egyenletekre, ahol F adott alakú polinom. Ezek az eredmények szoros kapcsolatban állnak az ún. lefedő polinomokkal is. Végül megemlítem, hogy a tézisfüzet 20. oldalán és 21. oldalának tetején szereplő részeket (közük Hegyvári egy tételét illetve annak egy következményét) a disszertációban nem találtam. (Bár például Vinogradov említett eredménye, más formában, a disszertáció 80. oldalán megjelenik.) Így ezekről természetesen nem szólok.

Struktúra tételek Heisenberg csoportokban. A Heisenberg csoportokat bizonyos prímtestek feletti 3×3 típusú felső trianguláris mátrixok alkotják. A szerző kutatásainak motivációja az volt, hogy bár sokan vizsgálták ilyen típusú csoportok részhalmazainak szorzatait az expander tulajdonság szempontjából (megemlíthetjük például Helfgott vagy Babai, Nikolov és Pyber eredményeit), strukturális vizsgálatokra a korábbiakban nem került sor. Hegyvári (Hennecarttal közösen) ilyen jellegű eredményeket igazolt. Nevezetesen, megmutatták, hogy ha B egy „elég nagy” (nagyjából $|H_n|^{3/4}$ elemű) téglalap H_n -ben (a $2n + 1$ dimenziós Heisenberg csoportban), akkor $B \cdot B$ legalább $|B|/p$ mellékosztályt tartalmaz egy nemtriviális G részcsoporthoz szerint - ez azonban nem feltétlenül igaz, ha B „mérete” csupán $|H_n|^{1/2}$ körüli.

Összegzésként, véleményem szerint **formai szempontból** a disszertáció igen sok (a korábbiakban részletezett) kívánnivalót hagy maga után. Ugyanakkor **tartalmi szempontból** megállapítható, hogy Hegyvári a kombinatorikus számelmélet homlokterébe tartozó, fontos, mély problémákat vizsgál, és nyer ezekre vonatkozó lényeges, új eredményeket. Módszerei több klasszikus technikát ötvöznek; ugyanakkor többször újszerű megközelítést is alkalmaz. Eredményeit neves matematikusok (köztük Erdős, Ruzsa, Sárközy, Shkredov, Shparlinski, Szemerédi, Tao és mások) munkájához kapcsolódóan, esetenként velük együttműködve éri el; tételei több esetben inspirálják a további kutatásokat. Így a fentiek alapján határozottan javaslom a nyilvános vita lefolytatását, illetve (sikeres védelem esetén) Hegyvári Norbert számára az „MTA doktora” cím odaítélését.

A szerzőhöz az alábbi kérdéseket fogalmazom meg.

1. *kérdés.* Amint azt korábban említettem, Sárközy „színezett” négyzetszámokkal illetve prímszámokkal történő előállításokra vonatkozó problémájánál a $H_K(\mathcal{Q})$ és $H_K(\mathcal{P})$ értékekre nyert alsó illetve felső korlátok nagyságrendileg közel állnak egymáshoz. Ugyanakkor a köztük lévő „hézag” még számottevő. Lát-e lehetőséget arra, hogy a jelenlegi módszerekkel ez a hézag szűkíthető, esetleg (lényegében) teljesen eltüntethető?

2. *kérdés.* Számomra úgy tűnik, hogy azon polinomosztály, melyekről az irodalomban eddigieken sikerült igazolni az expander tulajdonságot, meg lehetőségen szűk. Ennek mi az oka? Az várható, hogy ez a tulajdonság „ritka”, és csak valamilyen speciális típusú polinomcsaládokra áll fenn, vagy csupán a tulajdonság igazolása nehéz, ezért szűk az ismert lista?

Debrecen, 2018. április 9.

(Dr. Hajdu Lajos)
az MTA doktora