A HALMAZELMÉLET ÉS AZ ANALÍZIS TALÁLKOZÁSA

MTA DOKTORI DISSZERTÁCIÓ TÉZISEI

ELEKES MÁRTON

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
és
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest

2017

Bevezetés

A disszertáció célja, hogy kapcsolatokat mutasson be a matematika két látszólag távoli ága, a halmazelmélet és az analízis között. Az első fejezetben ez a kapcsolat még klasszikus, hiszen a fejezet témája a leíró halmazelmélet, amely halmazelmélet és az analízis határterülete. Azonban a második fejezetben már számos újszerű kapcsolatot mutatunk be. Némelyszor Hausdorff-mértékekről szóló kérdésekről derül ki, hogy függetlenek a matematika szokásos Zermelo–Fraenkel-axiómarendszerétől (ZFC), máskor Hausdorff-mértékekről szóló kérdések megoldása igényel halmazelméleti technikákat, egy esetben pedig egy halmazelméleti problémát oldunk meg Hausdorff-mértékek segítségével.

A fejezetek, definíciók és tételek számozása követi a disszertációbeli számozást.

Jelölések és alapfogalmak

Legyen $X = (X, \tau) = (X, \tau(X))$ egy *lengyel tér*, azaz egy szeparábilis topologikus tér, melynek topológiája teljes metrikával indukálható. Definiáljuk transzfinit rekurzióval X részhalmazainak *ξ-ik additív, multiplikatív és ambigus Borel-osztályait* a következőképpen.

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \tau = \text{a nyílt halmazok rendszere},$$

$\xi \geq 1$ esetén

$$\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \{X \setminus H : H \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\},$$

$\xi > 1$ esetén

$$\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \{\cup_{i=1}^\infty H_i : \forall i\ H_i \in \cup_{\eta<\xi} \mathbf{\Pi}^0_\eta(X)\}.$$

Végül, $\xi \geq 1$ esetén

$$\mathbf{\Delta}^0_\xi(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi(X).$$

Ha nem vezet félreértéshez, az X-et elhagyjuk a jelölésből. Jól ismert, hogy ez a hierarchia, melyet *Borel-hierarchiának* neveznek, ω_1 lépésben stabilizálódik: $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega_1}(X) = \mathbf{\Pi}^0_{\omega_1}(X) =$ a Borel-halmazok osztálya.

Például, $A \in \mathbf{\Delta}^0_2$ pontosan akkor, ha A egyszerre F_σ (zárt halmazok egy sorozatának uniója) és G_δ (nyílt halmazok egy sorozatának metszete).

Térjünk most rá a Borel-függvényekre. Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény esetén legyen $f \in \mathcal{B}_0(X)$ ha f folytonos, és $\xi > 1$ esetén legyen $f \in \mathcal{B}_\xi(X)$ ha létezik $(f_i)_{i=1}^\infty \subset \cup_{\eta<\xi} \mathcal{B}_\eta(X)$ amely pontonként konvergál f-hez. Ebben az esetben f-et Baire ξ függvénynek nevezzük. Ha nem vezet félreértéshez, az X-et elhagyjuk a jelölésből. Ismert, hogy ez a hierarchia, melyet *Baire-hierarchiának* neveznek, ω_1 lépésben stabilizálódik: $\mathcal{B}_{\omega_1} =$ a Borel-mérhető függvények osztálya.

Egy $f : X \to \mathbb{R}$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\{f < c\} = \{x \in X : f(x) < c\}$. Hasonlóan használjuk a $\{f > c\}$, $\{f \leq c\}$, $\{f \geq c\}$, $\{f = c\}$ and $\{f \neq c\}$ jelöléseket is. Ismert, hogy f pontosan akkor Baire ξ, ha minden nyílt halmaz ősképe $\mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}$-beli, ekvivalensen, ha $\{f < c\}$ és $\{f > c\}$ $\mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}$-beli minden $c \in \mathbb{R}$-re.

Speciálisan, f Baire 1 pontosan akkor, ha folytonos függvények pontonkénti limesze, ekvivalensen, ha minden nyílt halmaz ősképe $\mathbf{\Sigma}^0_2$-beli, ekvivalensen, ha $\{f < c\}$ és $\{f > c\}$ $\mathbf{\Sigma}^0_2$-beli minden $c \in \mathbb{R}$-re. Ebből könnyen látható, hogy egy χ_A karakterisztikus függvény pontosan akkor Baire 1, ha $A \in \mathbf{\Delta}^0_2$.

Egy halmaz *analitikus*, ha egy lengyel tér egy Borel-részhalmazának folytonos képe, és *koanalitikus*, ha komplementere analitikus. Egy halmaz *univerzálisan mérhető*, ha mérhető minden valószínűségi Borel-mérték teljessé tételére nézve. Ismert, hogy az analitikus és a koanalitikus halmazok univerzálisan mérhetőek.

Rögzítsünk most egy d kompatibilis teljes metrikát X-en. Jelölje $\mathcal{K}(X)$ az X tér nemüres kompakt részhalmazainak rendszerét, és lássuk ezt el a Hausdorff-metrikával, azaz $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)$ esetén legyen

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon : K_1 \subset U_\varepsilon(K_2),\ K_2 \subset U_\varepsilon(K_1)\},$$

ahol $U_\varepsilon(H) = \{x \in X : \exists y \in H\ d(x,y) < \varepsilon\}$. Ismert, hogy ha X lengyel, akkor $\mathcal{K}(X)$ is az, valamint, hogy X kompaktsága ekvivalens $\mathcal{K}(X)$ kompaktságával.

Egy H halmaz esetén jelölje $\overline{H}$, $|H|$, valamint H^c a H halmaz lezártját, számosságát, valamint komplementerét. Ahogy a halmazelméletben szokásos, a rendszámokat azonosítjuk a kisebb rendszámok halmazával, speciálisan $2 = \{0, 1\}$. A kontinuum számosságot 2^ω-val vagy $\mathfrak{c}$-vel jelöljük.

Legyen $\mathcal{I}$ egy *σ-ideál* egy X lengyel téren, azaz X részhalmazainak egy nemüres rendszere, amely zárt a részhalmazképzésre és a megszámlálható unióra, valamint nem tartalmazza X-et. A két legfontosabb példa $\mathcal{N}$, a Lebesgue-null halmazok rendszere, és $\mathcal{M}$, az első kategóriájú halmazok rendszere (egy halmaz *sehol sem sűrű*, ha nem sűrű egyetlen nemüres nyílt halmazban sem, és *első kategóriájú*, ha előáll sehol sem sűrű halmazok egy sorozatának uniójaként). Definiáljuk egy $\mathcal{I}$ σ-ideál négy legfontosabb számosságinvariánsát a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{add}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\},\\
\operatorname{cov}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{A} = X\},\\
\operatorname{non}(\mathcal{I}) &= \min\{|H| : H \subset X, H \notin \mathcal{I}\},\\
\operatorname{cof}(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{I},\ \forall I \in \mathcal{I}\ \exists A \in \mathcal{A}, I \subset A\}.
\end{aligned}$$

Ezeket $\mathcal{I}$ *additivitásának, fedési számának, uniformitásának és kofinalitásának* nevezzük.

A $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *r-dimenziós Hausdorff-mértékét* a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{H}^r(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^r_\delta(A), \text{ ahol}$$
$$\mathcal{H}^r_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_k))^r : A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k,\ \forall k \operatorname{diam}(A_k) \le \delta\right\}.$$

Egy A halmaz *Hausdorff-dimenziója*

$$\dim_H(A) = \inf\{r : \mathcal{H}^r(A) = 0\}.$$

Ha $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ egy nemcsökkenő függvény, melyre $g(0) = 0$, akkor *a g súlyfüggvényhez tartozó általánosított Hausdorff-mértéket* úgy definiáljuk, hogy a fenti képletben $(\operatorname{diam}(A_k))^r$-t $g(\operatorname{diam}(A_k))$-val helyettesítjük. Ezt a mértéket $\mathcal{H}^g$-vel jelöljük.

Egy halmaz *perfekt*, ha zárt és nincs izolált pontja. Lengyel terekben a nemüres perfekt halmazok kontinuum számosságúak.

1. Leíró halmazelmélet

1.1. Baire 1 függvények lineárisan rendezett családjai

Legyen $\mathcal{F}(X)$ egy X lengyel téren definiált valós értékű függvények egy osztálya, például $\mathcal{C}(X)$, a folytonos függvények halmaza. Ezen a függvénytéren a természetes parciális rendezés a $<_p$ pontonkénti rendezés, azaz $f <_p g$ pontosan akkor, ha $f(x) \le g(x)$ minden $x \in X$ -re, és $f(x) < g(x)$ legalább egy $x \in X$-re. Ennek a részbenrendezett halmaznak a szerkezete sok érdekes információt hordoz a függvények tulajdonságairól, ezért nagyon sokat vizsgált objektum. Egy részbenrendezett halmaz struktúrájának megértéséhez a legelső lépés a lineárisan rendezett részek rendtípusainak megértése.

Legyen például $X = [0, 1]$ és $\mathcal{F}(X) = \mathcal{C}([0, 1])$. Jól ismert, hogy ekkor a lineárisan rendezett részek lehetséges rendtípusai pontosan a valós rendtípusok (azaz $\mathbb{R}$ részhalmazainak rendtípusai). Valóban, a valós rendtípusokat már konstans függvényekkel is megvalósíthatjuk, és ha $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}([0, 1])$ egy lineárisan rendezett függvénycsalád, akkor (a folytonosság miatt) az $f \mapsto \int_0^1 f$ leképezés *szigorúan* monoton módon képezi $\mathcal{L}$-et a valós számokba.

A következő természetes kérdés a Lebesgue-mérhető függvények osztálya. Azonban könnyű látni, hogy a mérhetőség nem jelent valódi megszorítást. Valóban, legyen $\mathcal{L}$ egy lineárisan rendezett függvénycsalád *tetszőleges* függvényekből, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig egy leképezés, ami a Cantor-halmazt ráképezi $\mathbb{R}$-re, és 0 a Cantor-halmazon kívül, ekkor $f \mapsto f \circ \varphi$ egy szigorúan monoton leképezése $\mathcal{L}$-nek a Lebesgue-mérhető függvények osztályába.

Ezért a jó kérdés a Borel-mérhető függvények osztálya. Azonban Komjáth P. [35] megmutatta, hogy független ZFC-től, hogy van-e Borel-mérhető függvényekből álló ω_2 típusú sorozat.

Ezért tehát a Borel-mérhető függvények alosztályaira kell szorítkoznunk, tekintsük tehát a Baire-hierarchiát. Komjáth valójában azt bizonyította, hogy a fenti eredményében Borel-mérhető helyett Baire 2-t is mondhatunk, így az egyetlen nyitva maradt kérdés a Baire 1 eset. Itt megjegyeznénk, hogy a Baire 1 függvények központi szerepet játszanak a matematika számos ágában, melyek közül is kiemelkedik a Banach-terek elmélete, lásd pl. [1, 30].

A 70-es években vetette fel Laczkovich M. [38] a következő problémát:

1.1.1. Probléma. *Karakterizáljuk $(\mathcal{B}_1(X), <_p)$ lineárisan rendezett részeinek lehetséges rendtípusait!*

Használni fogjuk a következő jelöléseket:

1.1.2. Definíció. Legyenek $(P, <_P)$ és $(Q, <_Q)$ részbenrendezett halmazok. Azt mondjuk, hogy *P beágyazható Q-ba*, ha létezik egy $\Phi : P \to Q$ leképezés úgy, hogy $p, q \in P$, $p <_P q$ esetén $\Phi(p) <_Q \Phi(q)$. Ezt $(P, <_P) \hookrightarrow (Q, <_Q)$-val jelöljük. (Megjegyezzük, hogy egy beágyazás nem feltétlenül injektív, azonban egy *lineárisan* rendezett halmaz beágyazása szükségképpen injektív, azaz rendezés-izomorfizmus.) Ha $(L, <_L)$ egy lineáris rendezés, és $(L, <_L) \hookrightarrow (Q, <_Q)$, akkor azt is mondjuk, hogy *L reprezentálható Q-ban.*

Valahányszor $(P, <_P)$ rendezése világos a kontextusból, egyszerűen csak P-t írunk. Emellett, ha Q-t nem adjuk meg konkrétan, a „reprezentálható" szó azt fogja jelenteni, hogy reprezentálható $Q = \mathcal{B}_1(X)$-ben.

Az első eredmény, ami kapcsolódik Laczkovich problémájához, K. Kuratowski egy ősrégi tétele. Azt mutatta meg, hogy $\omega_1, \omega_1^* \not\hookrightarrow \mathcal{B}_1(X)$, azaz nincsenek ω_1 típusú szigorúan növő, illetve szigorúan fogyó Baire 1 függvényekből álló sorozatok [37, §24. III.2.].

Hihetőnek tűnt az a sejtés, hogy ez az egyetlen megkötés, azaz minden lineáris rendezés, amely nem tartalmaz ω_1 és ω_1^* típusú részt, reprezentálható $\mathcal{B}_1(\mathbb{R})$-ben. Először, Gerlits J. és Petruska Gy. egy kérdésére válaszolva Komjáth P. [35] konzisztens ellenpéldát adott erre a sejtésre, hiszen megmutatta, hogy Szuszlin-egyenes nem reprezentálható $\mathcal{B}_1(\mathbb{R})$-ben. (*Szuszlin-egyenesnek* olyan nemszeparábilis rendezett halmazt nevezünk, amely nem tartalmaz diszjunkt nemelfajuló intervallumokból álló megszámlálhatónál nagyobb rendszert. Szuszlin-egyenes létezése független ZFC-től.) Komjáth rövid és elegáns bizonyítása forszolást használ, ami a halmazelmélet egy nagyon kevesek által értett technikája. Ezért Laczkovich felvetette, hogy van-e forszolásmentes bizonyítás is.

Steprāns-szal [17] sikerült erősítenünk Komjáth eredményét, ugyanis megmutattuk, hogy van ZFC ellenpélda is a fenti sejtésre. A másik irányban pedig azt igazoltuk, hogy konzisztens, hogy a kontinuum nagy, és igaz a sejtés kontinuumnál kisebb számosságú rendezésekre.

Fontos kérdés, hogy mennyire függ ez a kérdéskör az X lengyel tértől. A [12] cikkben megmutattam, hogy ha X és Y két nem megszámlálható σ-kompakt, vagy két nem σ-kompakt lengyel tér, akkor pontosan ugyanazok a lineáris rendezések ágyazhatók be $\mathcal{B}_1(X)$-be mint $\mathcal{B}_1(Y)$-ba. Megkérdeztem, hogy igaz-e ez akkor is, ha X nem megszámlálható σ-kompakt, Y pedig nem σ-kompakt lengyel terek. Emellett azt is kérdeztem, hogy ugyanazok a lineáris rendezések reprezentálhatóak-e Baire 1 függvényekkel, mint Baire 1 *karakterisztikus* függvényekkel. Vegyük észre, hogy egy χ_A karakterisztikus függvény pontosan akkor Baire 1, ha $A \in \mathbf{\Delta}^0_2(X)$. Továbbá, $\chi_A <_p \chi_B \iff A \subsetneqq B$, tehát a kérdés az, hogy $L \hookrightarrow (\mathcal{B}_1(X), <_p)$-ból következik-e $L \hookrightarrow (\mathbf{\Delta}^0_2(X), \subsetneqq)$. Végezetül azt is megkérdeztem, hogy reprezentálható lineáris rendezések *duplázottjai* és teljessé tételei is reprezentálhatóak-e, ahol L duplázottja $L \times \{0,1\}$ a lexikografikus rendezéssel.

A fejezet fő eredménye egy teljes megoldás az 1.1.1. Problémára. Következményként pedig az összes fenti kérdést megválaszoljuk. A megoldás során egy *univerzális* Baire 1 rendezést konstruálunk, azaz egy olyan reprezentálható lineáris rendezést, amelybe minden reprezentálható lineáris rendezés beágyazható. Természetesen egy ilyen konstrukció csak akkor szolgáltat használható karakterizációt, ha elegendően egyszerű szerkezetű. Ezt azzal támasztjuk alá, hogy segítségével megoldjuk az összes fenti problémát, és az ismert eredményekre (például Komjáth forszolást használó bizonyítására) is új, egyszerűbb bizonyításokat adunk.

Az univerzális rendezést a következőképpen definiáljuk:

1.1.3. Definíció. Jelölje $[0,1]^{<\omega_1}_{\searrow 0}$ a $[0,1]$-beli szigorúan fogyó, 0-ra végződő (transzfinit) sorozatok halmazát. Legyenek $\bar{x} = (x_\alpha)_{\alpha \le \xi}, \bar{x}' = (x'_\alpha)_{\alpha \le \xi'} \in [0,1]^{<\omega_1}_{\searrow 0}$ különbözőek, és legyen δ a minimális rendszám, amelyre $x_\delta \neq x'_\delta$. Azt mondjuk, hogy

$$(x_\alpha)_{\alpha \le \xi} <_{altlex} (x'_\alpha)_{\alpha \le \xi'} \iff (\delta \text{ páros és } x_\delta < x'_\delta) \text{ vagy } (\delta \text{ páratlan és } x_\delta > x'_\delta).$$

Most már meg tudjuk fogalmazni a fejezet fő eredményét.

1.1.4. Tétel. *Legyen X egy nem megszámlálható lengyel tér, $(L,<)$ pedig egy lineárisan rendezett halmaz. A következők ekvivalensek:*

(1) $(L,<) \hookrightarrow (\mathcal{B}_1(X), <_p)$,

(2) $(L,<) \hookrightarrow ([0,1]^{<\omega_1}_{\searrow 0}, <_{altlex})$.

Valójában $(\mathcal{B}_1(X), <_p)$ és $([0,1]^{<\omega_1}_{\searrow 0}, <_{altlex})$ kölcsönösen beágyazhatók egymásba.

Ennek a tételnek a segítségével minden $\mathcal{B}_1(X)$ lineárisan rendezett részeiről szóló kérdés lefordítható egy végtelen kombinatorikai problémára. Ezen az úton könnyebb, új bizonyításokat adtunk az összes ismert eredményre (beleértve egy forszolásmentes bizonyítást Komjáth tételére), valamint megválaszoltuk az összes fent említett kérdést.

A fejezet eredményei és további részletek a [21] cikkben találhatóak.

1.2. Haar-null halmazok lengyel csoportokban

A lengyel csoportok az utóbbi időben központi szerepet töltenek be a leíró halmazelméletben. Ennek a fejezetnek a témája a Lebesgue-null halmaz fogalmának egy általánosítása lengyel csoportokra.

Legyen G egy lengyel csoport, amiről az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy Abel. A csoportműveletet $+$, a neutrális elemet 0 jelöli. Birkhoff és Kakutani egy jól ismert eredménye, hogy minden metrizálható csoporton van kompatibilis bal-invariáns metrika, ami Abel esetben természetesen kétoldali-invariáns. Az is jól ismert, hogy egy kétoldali-invariáns kompatibilis metrika egy lengyel téren automatikusan teljes. Így rögzíthetünk G-n egy d teljes invariáns metrikát.

Ha G lokálisan kompakt, akkor létezik Haar-mérték G, azaz egy reguláris invariáns Borel-mérték, ami véges a kompakt halmazokon, és pozitív a nemüres nyílt halmazokon. Ez a mérték (mely pozitív konstans szorzó erejéig egyértelmű) alapvető szerepet játszik a lokálisan kompakt csoportok vizsgálatában. De sajnos jól ismert, hogy nem lokálisan kompakt csoportokon nincs Haar-mérték. Azonban szerencsére a Haar-*null* halmaz fogalmának van egy nagyon szép általánosítása. A következő definíció Christensentől származik [6]:

1.2.1. Definíció. Egy $A \subset G$ halmazt *Haar-nullnak* nevezünk, ha létezik egy $B \supset A$ Borel-halmaz és egy μ valószínűségi Borel-mérték G-n úgy, hogy $\mu(B + g) = 0$ minden $g \in G$-re.

Christensen megmutatta, hogy a Haar-null halmazok σ-ideált alkotnak, illetve, hogy lokálisan kompakt esetben a Haar-null halmazok egybeesnek a Haar-mérték szerint nullmértékű halmazokkal. Az elmúlt két évtizedben ez a fogalom nagyon hasznosnak bizonyult kivételes halmazok vizsgálatához olyan témákban mint az analízis, a funkcionálanalízis, a dinamikai rendszerek, a geometriai mértékelmélet, a csoportelmélet és a leíró halmazelmélet.

Emiatt fontos megértenünk ennek a σ-ideálnak az alapvető tulajdonságait, például a Fubini-tétel analógjait, az úgynevezett ccc-séget, és minden más hasonlóságot és különbséget a lokálisan kompakt és az általános eset között.

Egy ilyen kérdésre példa a következő nagyon természetes probléma, ami Mycielski híres cikkében [46] az 1-es sorszámú probléma volt több, mint 25 évvel ezelőtt:

1.2.2. Kérdés. *(J. Mycielski) Befedhető-e minden Haar-null halmaz G_δ Haar-null halmazzal?*

Könnyű látni a regularitást használva, hogy a válasz igenlő a lokálisan kompakt esetben.

A fejezet első fő eredménye egy ellenpélda erre a kérdésre:

1.2.3. Tétel. *Ha G egy nem lokálisan kompakt lengyel Abel csoport, akkor létezik egy $B \subset G$ (Borel) Haar-null hamaz, ami nem fedhető be G_δ Haar-null halmazzal.*

Valójában G_δ helyett bármilyen magas Borel-osztály írható:

1.2.4. Tétel. *Ha G egy nem lokálisan kompakt lengyel Abel csoport és $1 \leq \xi < \omega_1$, akkor létezik egy $B \subset G$ (Borel) Haar-null hamaz, ami nem fedhető be $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ Haar-null halmazzal.*

Könnyű következményként adódik a következő:

1.2.5. Következmény. *Ha G egy nem lokálisan kompakt lengyel Abel csoport, akkor a Haar-null halmazok σ-ideáljának additivitása ω_1.*

A következő kérdés megfogalmazásához szükségünk van a Haar-null fogalom egy módosított formájára is. Számos szerző a B halmaz Borelsége helyett csupán univerzális mérhetőséget tesz fel.

1.2.6. Definíció. Egy $A \subset G$ halmazt *általánosított Haar-nullnak* nevezünk, ha létezik egy $B \supset A$ univerzálisan mérhető halmaz és egy μ valószínűségi Borel-mérték G-n úgy, hogy $\mu(B+g) = 0$ minden $g \in G$-re.

A legtöbb alkalmazásban A Borel, így a két fenti definíció ekvivalens. A következő kérdés Fremlin híres problémalistájáról való [27]:

1.2.7. Kérdés. *(D. H. Fremlin, Problem GP) Igaz-e, hogy minden általánosított Haar-null halmaz Haar-null?*

Itt számos részeredmény ismert volt, melyek azt mutatták, hogy a negatív válasz konzisztens. A fejezet második fő eredménye egy teljes (azaz ZFC-beli) válasz a problémára:

1.2.8. Tétel. *Nem minden általánosított Haar-null halmaz Haar-null. Pontosabban, ha G egy nem lokálisan kompakt lengyel Abel csoport, akkor létezik egy koanalitikus $P \subset G$ általánosított Haar-null halmaz, amely nem Haar-null.*

Mivel S. Solecki [49] belátta, hogy az analitikus általánosított Haar-null halmazok Haar-nullák, az eredmény optimális.

A fejezet harmadik problémája szintén Fremlin listájáról származik. Az FC Probléma egyik fele lényegében a következőt kérdezte:

1.2.9. Probléma. *Elhagyható-e a B Borel-halmaz a Haar-null halmaz definíciójából?*

Fremlin megjegyezte, hogy itt is konzisztens a negatív válasz. A fejezet harmadik fő eredménye egy ZFC-beli ellenpélda konstrukciója $\mathbb{R}$-ben, ahol meglepő módon a bizonyítás során felbukkannak a fraktáldimenziók!

1.2.10. Tétel. *Az 1.2.9. Problémára létezik ellenpélda $\mathbb{R}$-ben, azaz van olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre $\lambda(X) > 0$, de létezik egy μ valószínűségi Borel-mérték úgy, hogy $\mu(X+t) = 0$ minden $t \in \mathbb{R}$-re.*

A fejezet eredményei és további részletek a [22, 18] cikkekben találhatóak.

1.3. Rangok a Baire ξ függvényeken

Jól ismert, hogy egy f függvény pontosan akkor Baire 1, ha folytonos függvények pontonkénti limesze, ekvivalensen, ha minden nyílt halmaz őseképe F_σ, ekvivalensen, ha minden nemüres zárt halmazra megszorítva létezik relatív folytonossági pontja. A Baire 1 függvények vizsgálatának alapvető eszközei a rangfüggvények, azaz olyan leképezések, amelyek megszámlálható rendszámokat rendelnek a Baire 1 függvényekhez, ezzel tipikusan a bonyolultságukat leírva. A. S. Kechris és A. Louveau, a leíró halmazelmélet talán legnagyobb élő alakjai [34] cikkükben kidolgozták három alapvető fontosságú Baire 1 rang elméletét, melyeket α-val, β-val és γ-val jelöltek. A definíciók hosszadalmasak és technikaiak, így itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a Baire 1 függvények három fenti definíciójából kaphatóak. Világos, hogy ezeknek a rangoknak nincs természetes általánosításuk a Baire ξ esetre.

Így a következő természetes, ám nem túl precíz kérdés vetődik fel:

1.3.1. Kérdés. *Általánosítható-e Kechris és Louveau elmélete Baire ξ függvényekre?*

Valójában ennek a kérdésnek egy teljesen precíz verzióját vetettük fel Laczkovich Miklóssal [15]. Az eredeti motiváció a paradox geometriai átdarabolások elméletéből származott, ahol kiderült, hogy bizonyos differencia-egyenletrendszerek megoldásainak regularitása játszik fontos szerepet.

1.3.6. Definíció. Egy $\mathcal{F}$ függvényosztály *megoldhatósági számossága* az a legkisebb κ számosság, amelyre teljesül, hogy ha egy differencia-egyenletrendszer minden κ-nál kisebb számosságú részrendszerének van $\mathcal{F}$-beli megoldása, akkor az egész rendszernek is van $\mathcal{F}$-beli megoldása. Jele $sc(\mathcal{F})$.

További információért rangokról, megoldhatósági számosságokról, differencia-egyenletrendszerekről és paradox átdarabolásokról lásd a [15] cikket és az ottani referenciákat.

Az előző kérdés megválaszolásához az alábbi kérdésre volt szükség.

1.3.7. Kérdés. *Általánosítható-e Kechris és Louveau elmélete a kompakt metrikus alapterek esetéről az általános lengyel alapterek esetére?*

Fejezetünk fő eredménye egy pozitív válasz ezekre a kérdésekre.

1.3.8. Tétel. *Az 1.3.1. és az 1.3.7. Kérdésekre igenlő a válasz.*

A bizonyítás a leíró halmazelmélet egyik leghatékonyabb, igen technikás eszközét, a topológia-finomítások módszerét használja.

Ebből hosszadalmas, bár viszonylag egyszerű következményként válasz adódott egy [15]-ben felvetett kérdésre.

1.3.9. Következmény. $sc(\mathcal{B}_\xi) \geq \omega_2$*, így a Kontinuum Hipotézis mellett* $sc(\mathcal{B}_\xi) = \omega_2$ *minden* $2 \leq \xi < \omega_1$*-re.*

Emellett megvizsgáltuk azt a nagyon érdekes jelenséget is, hogy a természetesen adódó rang-definíciók (pl. amik a kisebb Baire-osztályú függvények limeszeiből adódnak), meglepő módon korlátosak ω_1-ben!

A fejezet eredményei és további részletek a [14] cikkben találhatóak.

1.4. Ki tudjuk-e választani a Borel-burkokat monoton módon?

Jelölje $\mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ és $\mathcal{G}_\delta$ a Lebesgue-null, Lebesgue-mérhető, Borel és G_δ részhalmazait $[0,1]$-nek. Legyen $\lambda(A)$ az A halmaz Lebesgue-mértéke, ha A nem mérhető, A Lebesgue-féle külső mértéke.

1.4.1. Definíció. Egy $A \subset [0,1]$ halmaznak egy $H \subset [0,1]$ halmaz egy *burka*, ha $H \supset A$ és $\lambda(H) = \lambda(A)$.

A mérték regularitásából könnyen látható, hogy minden halmaznak van Borel, sőt G_δ burka. Természetes kérdés, hogy „nagyobb halmazoknak nagyobb-e a burka". (Az eredeti motivációt lásd később.)

1.4.2. Definíció. Legyenek $\mathcal{D}, \mathcal{H} \subset \mathcal{P}([0,1])$ halmazosztályok (tipikusan $\mathcal{D} = \mathcal{N}$ vagy $\mathcal{L}$ és $\mathcal{H} = \mathcal{B}$ vagy $\mathcal{G}_\delta$). Ha van egy olyan $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ leképezés, amelyre

1. minden $D \in \mathcal{D}$ -re $\varphi(D)$ egy burka D-nek,
2. minden $D \subset D'$ esetén $\varphi(D) \subset \varphi(D')$,

akkor azt mondjuk, hogy *van monoton* $\mathcal{H}$*-burok* $\mathcal{D}$*-n.*

A fejezetben a következő négy kérdést vizsgáljuk:

1.4.3. Kérdés. *Legyen* $\mathcal{D} = \mathcal{N}$ *vagy* $\mathcal{L}$ *és* $\mathcal{H} = \mathcal{B}$ *vagy* $\mathcal{G}_\delta$*. Van-e monoton* $\mathcal{H}$*-burok* $\mathcal{D}$*-n?*

A kérdések eredeti motivációja a következő kérdés volt:

1.4.4. Kérdés. *(Gyenes Z. és Pálvölgyi D. [29]) Legyen* $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ *halmazok egy lánca, azaz tegyük fel, hogy minden* $C, C' \in \mathcal{C}$*-re* $C \subset C'$ *vagy* $C' \subset C$*. Létezik-e monoton* $\mathcal{B}$ *vagy* $\mathcal{G}_\delta$*-burok* $\mathcal{C}$*-n?*

1.4.5. Megjegyzés. Emellett további motivációt jelent, hogy a kérdés nagyon szorosan kapcsolódik az úgynevezett *liftingek* elméletéhez is.

A következő két tétel kimondja, hogy a kérdés mind a négy verziója független ZFC-től.

1.4.6. Tétel. *Van olyan modellje* ZFC*-nek, amelyben nincs monoton Borel-burok* $\mathcal{N}$*-en.*

1.4.7. Tétel. *Van olyan modellje* ZFC*-nek, amelyben van monoton* $\mathcal{G}_\delta$ *burok* $\mathcal{L}$*-en.*

A második eredményt és az első eredmény bizonyítását kombinálva kapjuk a következőt:

1.4.8. Következmény. *Gyenes és Pálvölgyi kérdése is független* ZFC*-től.*

Megemlítjük, hogy az eredményekben $[0,1]$ helyett írhatnánk $\mathbb{R}^n$-et, vagy akár egy nem megszámlálható lengyel teret ellátva egy nemnulla σ-véges folytonos Borel-mértékkel.

Kiemelnénk, hogy ezt a kérdéskört S. Shelah, a legnagyobb élő halmazelmélész két cikkben fejlesztette tovább [47, 25].

A fejezet eredményei és további részletek a [16] cikkben találhatóak.

2. Halmazelmélet és Hausdorff-mértékek

A következő fejezetekben a halmazelmélet és az analízis közötti, az eddigiektől eltérő jellegű kapcsolatokat mutatunk be.

2.1. Hausdorff-mértékek számosságinvariánsai

Az első probléma azt vizsgálja, hogy hogyan illeszkednek a Hausdorff-mértékek számosságinvariánsai az úgynevezett Cichoń-diagramba. A diagram a halmazelmélet egyik legalapvetőbb objektuma, lásd [2].

2.1.1. Definíció. Legyen $0 < r < n$ és

$$\mathcal{N}_n^r = \{H \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^r(H) = 0\}.$$

D. H. Fremlin [26, 534B] igazolta, hogy a kép a következő. Egy $\kappa \to \lambda$ nyíl azt jelenti, hogy $\kappa \leq \lambda$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{cov}(\mathcal{N}) & \to & \mathrm{cov}(\mathcal{N}_n^r) & \to & \mathrm{non}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{cof}(\mathcal{N}_n^r) & = & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \mathfrak{b} & \to & \mathfrak{d} & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\mathrm{add}(\mathcal{N}) & = & \mathrm{add}(\mathcal{N}_n^r) & \to & \mathrm{add}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{non}(\mathcal{N}_n^r) & \to & \mathrm{non}(\mathcal{N})
\end{array}$$

Három nyíl (azaz egyenlőtlenség) kivételével mindegyikhez ismert volt, hogy található olyan modellje ZFC-nek, amelyben az egyenlőtlenség szigorú (a $\mathcal{N}_n^r$-t nem érintő egyenlőtlenségekhez lásd [2], $\mathrm{non}(\mathcal{N}_n^r) < \mathrm{non}(\mathcal{N})$-hez pedig lásd [48]).

D. H. Fremlin híres monográfiájában feltette a kérdést, hogy a fennmaradó három egyenlőtlenség egyike lehet-e szigorú.

2.1.2. Kérdés. *[26, 534Z, Problem (a)] Igaz-e* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \mathrm{cov}(\mathcal{N}_n^r)$ *ZFC-ben?*

Következő tételünkben forszolás segítségével adtuk meg a negatív választ.

2.1.3. Tétel. *Van olyan modellje ZFC-nek, amelyben* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \omega_1$ *és* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}_n^r) = \omega_2$*.*

A következő két tétel pedig teljessé teszi a képet azáltal, hogy az analóg eredményeket adja a fennmaradó esetekre. A bizonyítások ismét forszolást használnak.

2.1.4. Tétel. *Van olyan modellje ZFC-nek, amelyben* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}_n^r) = \omega_1$ *és* $\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \omega_2$*.*

2.1.5. Tétel. *Van olyan modellje ZFC-nek, amelyben* $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \omega_1$ *és* $\mathrm{non}(\mathcal{N}_n^r) = \omega_2$*.*

Alkalmazásként megválaszoljuk P. Humke és Laczkovich M. [31] egy kérdését. Sierpiński és Erdős eredményein dolgozva a következő definíciót izolálták:

2.1.6. Definíció. Ha $\mathcal{I}$ egy σ-ideál $\mathbb{R}$-en, akkor a következő állítást rövidítsük úgy, hogy

$$(*)_{\mathcal{I}} \iff \exists \text{ egy rendezés } \mathbb{R}\text{-en úgy, hogy minden valódi kezdőszelet } \mathcal{I}\text{-beli.}$$

Ezt a jelölést használva kérdésük a következő:

2.1.7. Kérdés. *[31] Következik-e* $(*)_{\mathcal{N}}$*-ből* $(*)_{\mathcal{N}_1^{1/2}}$*?*

Megjegyezzük, hogy a válasz nyilvánvalóan pozitív bizonyos ZFC modellekben, mert például a Kontinuum Hipotézis esetén van olyan rendezése $\mathbb{R}$-nek, ami szerint minden valódi kezdőszelet megszámlálható.

A következő könnyű észrevételekhez lásd [31]-t.

2.1.8. Állítás. $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \implies (*)_{\mathcal{I}} \implies \mathrm{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{I})$.

Tehát Humke és Laczkovich kérdéséhez elegendő pozitív választ adni a következőre:

2.1.9. Kérdés. *Van-e olyan modellje ZFC-nek, amelyben* $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ *és* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}_1^{1/2}) > \mathrm{non}(\mathcal{N}_1^{1/2})$*?*

A válasz igenlő:

2.1.10. Tétel. *Van olyan modellje ZFC-nek, amelyben* $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ *és* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}_1^{1/2}) > \mathrm{non}(\mathcal{N}_1^{1/2})$.

A fejezet eredményei és további részletek a [20] cikkben találhatóak.

2.2. Egy kompakt nullhalmaz, amelynek 2^ω-nál kevesebb eltoltja fedheti a számegyenest

Ebben a fejezetben a $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ számosságinvariáns bizonyos változatait vizsgáljuk. Két természetes módosítás merül fel, lásd [2, Chapter 2.6 és 2.7]. Az első $\mathrm{cov}^*(\mathcal{N})$, azaz a legkisebb κ számosság, amelyre $\mathbb{R}$ lefedhető egy alkalmas nullhalmaz κ eltoltjával. A második $\mathrm{cov}(c\mathcal{N})$, azaz a legkisebb κ számosság, amelyre $\mathbb{R}$ lefedhető κ darab kompakt nullhalmazzal. Ismert, hogy két alkalmas modelljében ZFC-nek $\mathrm{cov}^*(\mathcal{N}) < 2^\omega$, illetve $\mathrm{cov}(c\mathcal{N}) < 2^\omega$.

G. Gruenhage tette fel a kérdést, hogy van-e olyan modell is, amelyben egyszerre teljesül a két erősítés:

2.2.1. Kérdés. *(G. Gruenhage) Van-e olyan modellje ZFC-nek, amelyben* $\mathrm{cov}^*(c\mathcal{N}) < 2^\omega$*, azaz $\mathbb{R}$ lefedhető egy alkalmas kompakt nullhalmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával?*

A fejezet fő célja pozitív választ adni erre a kérdésre. Ehhez először meg kell oldanunk (ZFC-ben) U. B. Darji és Keleti T. egy önmagában is érdekes kapcsolódó problémáját.

Megjegyezzük, hogy a Kontinuum Hipotézis feltételezése mellett kontinuumnál kevesebb nullhalmaz nem fedi a számegyenest, így bizonyos ZFC-modellekben nincsenek fenti típusú fedések. A legérdekesebb kompakt nullhalmaz talán a Cantor-halmaz. Meglepő módon Gruenhage megmutatta, hogy most nem segít, lásd [9]. A kérdéskör egy további motivációjához lásd [28].

Darji and Keleti [9] Gruenhage kérdésén dolgozva vezették be a következő definíciót:

2.2.2. Definíció. (Darji - Keleti) Legyen $C \subset \mathbb{R}$ tetszőleges. Egy $P \subset \mathbb{R}$ halmazt *tanúnak* nevezünk C-hez, ha P nemüres perfekt, és $(C + x) \cap P$ minden valós x-re megszámlálható.

Nyilvánvaló (hiszen a nemüres perfekt halmazok kontinuum számosságúak), hogy ha egy C halmazhoz létezik egy P tanú, akkor C-nek kontinuumnál kevesebb eltoltja nem tudja lefedni P-t, így $\mathbb{R}$-et sem. Gruenhage lényegében azt mutatta meg, hogy a Cantor-halmazhoz létezik tanú. Darji és Keleti ezt erősítette a következőképpen. (A pakolási dimenzió definícióját lásd [44, 24].)

2.2.3. Tétel. *(Darji - Keleti) Ha $C \subset \mathbb{R}$ egy kompakt halmaz melynek pakolási dimenziójára* $\dim_p(C) < 1$ *áll, akkor létezik tanú C-hez, így C-nek kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedi $\mathbb{R}$-et.*

Felvetették a következő kérdést, melyre egy pozitív válasz megoldaná Gruenhage kérdését is:

2.2.4. Kérdés. *(Darji - Keleti) Van-e tanú minden $C \subset \mathbb{R}$ kompakt nullhalmazhoz?*

Először erre a kérdésre válaszolunk. A következő halmaz viszonylag ismert a geometriai mértékelméletben. Tudomásunk szerint először Erdős és Kakutani [23] vizsgálták.

2.2.5. Definíció. Legyen

$$C_{EK} = \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n!} \;\middle|\; \forall n \; d_n \in \{0, 1, \dots, n-2\} \right\}.$$

A d_n-ekre úgy gondolhatunk, mint számjegyekre egy „növekvő számrendszerben". A szokásos számrendszerekhez hasonlóan megszámlálható kivétellel minden $x \in [0,1]$-nek van egy egyértelmű felírása:

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n!},$$

ahol $x_n \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ minden $n = 2, 3, \dots$-ra. (A többi számnak két felírása van.) Nem nehéz látni, hogy C_{EK} egy kompakt nullhalmaz. Az is igaz, hogy pakolási és Hausdorff-dimenziója 1.

2.2.6. Tétel. *C_{EK}-nak nincs tanúja, azaz minden nemüres perfekt $P \subset \mathbb{R}$ halmazhoz van $x \in \mathbb{R}$, amelyre $(C_{EK} + x) \cap P$ nem megszámlálható.*

Ezt az eredményt, és halmazelméleti eszközként a szlalomok elméletét felhasználva megválaszoltuk Gruenhage kérdését is. Emlékeztetünk, hogy $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$ az egyik jól ismert számosságinvariáns, és hogy alkalmas ZFC-modellben $\mathrm{cof}(\mathcal{N}) < \mathfrak{c}$.

2.2.7. Tétel. *$\mathbb{R}$ lefedhető C_{EK} $cof(\mathcal{N})$ darab eltoltjával, így van olyan modellje ZFC-nek, amelyben $\mathbb{R}$ lefedhető egy kompakt nullhalmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával.*

Megjegyezzük, hogy R. D. Mauldin kérdezte, hogy a fentiekben pakolási dimenzió helyett írhatunk-e Hausdorff-dimenziót. Módszereinket felhasználva Máthé A. [40] igazolta, hogy nem, van 0 Hausdorff-dimenziós kompakt nullhalmaz, amelyhez nincs tanú, sőt, alkalmas ZFC-modellben egy ilyen halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltja fedheti $\mathbb{R}$-et.

A lényeges áttörés az volt ezekben az eredményekben, hogy egy tisztán halmazelméleti jellegű kérdésben fraktáldimenzió nyújtott segítséget!

A fejezet eredményei és további részletek a [19] cikkben találhatóak.

2.3. Izomorfak-e a Hausdorff-mértékek?

A következő problémát D. Preiss népszerűsítette, bár nem teljesen világos, hogy ki vetette fel először. (Néha D. Preiss és B. Weiss neve alatt szerepel, és felbukkan a [7] problémalistán is.)

$\mathbb{R}^n$ Borel részhalmazainak σ-algebráját jelölje $\mathcal{B}$. Két mértéktér egy *izomorfizmusa* egy olyan f bijekció, amelyre f és f^{-1} is megőrzi a mérhető halmazokat és a mértéket.

2.3.1. Kérdés. *Legyen $0 < d_1 < d_2 < n$. Izomorfak-e az $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathcal{H}^{d_1}\right)$ és $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathcal{H}^{d_2}\right)$ mértékterek?*

Hasonlóan természetes kérdés, hogy van-e ilyen izomorfizmus, ha a Borel halmazokat a Hausdorff-mértékek szerint mérhető halmazokkal helyettesítjük. Jelölje $\mathcal{M}_d$ a (szokásos Carathéodory-féle értelemben) $\mathcal{H}^d$ szerint mérhető halmazok σ-algebráját.

2.3.2. Kérdés. *Legyen $0 < d_1 < d_2 < n$. Izomorfak-e az $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_1}, \mathcal{H}^{d_1}\right)$ és $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_2}, \mathcal{H}^{d_2}\right)$ mértékterek?*

A fejezet fő eredménye egy pozitív válasz az utóbbi kérdésre a Kontinuum Hipotézis feltételezése mellett. (Megjegyezzük, hogy elegendő lenne $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = 2^\omega$ feltételezése.)

2.3.3. Tétel. *A Kontinuum Hipotézis feltételezése esetén minden $0 < d_1 \leq d_2 < n$-re izomorfak az $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_1}, \mathcal{H}^{d_1}\right)$ és $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_2}, \mathcal{H}^{d_2}\right)$ mértékterek.*

Nem tudjuk, hogy a Kontinuum Hipotézis elhagyható-e, S. Shelah és J. Steprāns [48] egy eredménye azt sugallja, hogy valószínűleg nem.

Megjegyezzük, hogy a 2.3.1. Kérdésre Máthé A. [41] adott negatív választ, először eredményeinket használva d_1 és d_2 bizonyos értékeire, majd teljes általánosságban más módszerekkel.

A fejezet eredményei és további részletek a [11] cikkben találhatóak.

2.4. Függvények reguláris megszorításai

Ebben a fejezetben a következő, a 2.3.1 Kérdés által is motivált problémakört vizsgáljuk.

2.4.1. Kérdés. *Található-e minden folytonos/Borel-mérhető/a (Baire-kategória értelemben) generikus folytonos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényhez egy pozitív Hausdorff-dimenziós halmaz, amelyre megszorítva a függvény Lipschitz/Hölder/korlátos változású?*

A témának komoly irodalma van, lásd pl. [4]. Könnyen látható, hogy ha minden Borel-függvény megfelelő kitevővel Hölder-folytonos alkalmas nagy Hausdorff-dimenziós halmazon, akkor negatív választ nyerünk a 2.3.1 Kérdésre. Az ellenkező irányban sikerült a következőt bizonyítani.

2.4.2. Tétel. *Legyen $0 < \alpha \leq 1$. A generikus folytonos függvény nem α kitevővel Hölder-folytonos semmilyen $1 - \alpha$-nál nagyobb Hausdorff-dimenziós halmazon.*

A következő változat azért igazán érdekes, mert Humke és Laczkovich [32] belátták, hogy van olyan folytonos függvény (sőt, a generikus folytonos függvény ilyen), amely nem monoton pozitív Hausdorff-dimenziós halmazon.

2.4.3. Tétel. *A generikus folytonos függvény nem korlátos változású $\frac{1}{2}$-nél nagyobb Hausdorff-dimenziós halmazon.*

Máthé A. [42] igazolta, hogy mindkét eredmény éles!

A fejezet eredményei és további részletek a [11] cikkben találhatóak.

2.5. Borel-halmazok, amelyek nem pozitív σ-véges mértékűek semmilyen eltolásinvariáns mértékre

A matematika számos ágában felbukkanó jelenség, hogy a „természetes” halmazokon vannak természetes invariáns valószínűségi mértékek. Például az iterált függvényrendszerek vagy a konform dinamikai rendszerek attraktorai, illetve az önhasonló halmazok általában el vannak látva egy ilyen mértékkel, tipikusan egy Hausdorff-mértékkel. Sok esetben a halmazok nem korlátosak, például periodikusak, így nem remélhetjük invariáns valószínűségi mérték létezését. Hasonlóan, a Brown-mozgás pályáin sincsenek természetes valószínűségi mértékek. Ezekben az esetekben a természetes elvárás egy olyan invariáns mérték létezése, amely pozitív és σ-véges a halmazon. És valóban, például a Brown-mozgás pályája 1-valószínűséggel pozitív σ-véges $\mathcal{H}^g$-mértékű, ahol $g(t) = t^2 \log\log\frac{1}{t}$ síkbeli pálya esetén, és $g(t) = t^2 \log\frac{1}{t} \log\log\log\frac{1}{t}$ legalább 3 dimenziós Brown-mozgás esetén.

Természetesen vetődött fel a kérdés, hogy van-e valami általános elv ezen mértékek létezése mögött. Például igaz-e, hogy $\mathbb{R}^n$ minden „elegendően reguláris” részhalmaza pozitív σ-véges

$\mathcal{H}^g$-mértékű valamely g súlyfüggvényre, vagy legalább egy invariáns Borel-mértékre nézve. Speciálisan R. D. Mauldin ([45, 8], részeredményekért és kapcsolódó eredményekért pedig lásd [5, 3]) kérdezte meg, hogy igaz-e ez egy nagyon jól ismert halmazra, a Liouville-számok halmazára:

2.5.1. Definíció.

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists p, q \in \mathbb{N}\ (q \geq 2) \text{ úgy, hogy } \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

2.5.2. Kérdés. *(R. D. Mauldin) Létezik-e olyan eltolásinvariáns Borel-mérték $\mathbb{R}$-en, amelyre nézve a Liouville-számok halmaza pozitív és σ-véges mértékű?*

Megjegyezzük, hogy nem követeljük meg, hogy a mértek az egész $\mathbb{R}$-en σ-véges legyen. Nem csak azért, mert a Hausdorff-mértékek általában nem ilyenek, hanem azért, mert ismert, hogy egy eltolásinvariáns σ-véges Borel-mérték $\mathbb{R}$-en a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

Mivel negatív választ fogunk adni a kérdésre, bevezetünk egy definíciót:

2.5.3. Definíció. Egy nemüres $B \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazt *megmérhetetlennek* nevezünk, ha nulla vagy nem σ-véges mértékű a számegyenes minden eltolásinvariáns Borel-mértékére nézve.

A fejezet fő eredménye megválaszolja Mauldin kérdését:

2.5.4. Tétel. *A Liouville-számok halmaza megmérhetetlen.*

Emellett számos érdekes példát találtunk megmérhetetlen halmazokra. Ilyenek a normális számok, a nem Besicovitch-Eggleston számok, $BE(1, 0)$ (az egyik Besicovitch-Eggleston osztály), stb. Azt is igazoltuk, hogy megmérhetetlen halmazoknak (trivialitásoktól eltekintve) bármi lehet a Borel-osztálya, illetve a pakolási vagy Hausdorff-dimenziója.

Megjegyezzük, hogy nem halmazaink nagyon szabályos struktúrája az egyetlen nehézség. A két cikk [39, 10] ami a korábbi két ismert patologikus példát tartalmazza megmérhetetlen halmazokra, teljes egészében a konstrukciónak van szentelve.

Érdekesség, hogy ebben a fejezetben csupán a bizonyítások használnak halmazelméletet, nevezetesen transzfinit rekurziót.

Nem meglepő módon Máthé A. [43] számos irányban továbbfejlesztette eredményeinket.

A fejezet eredményei és további részletek a [13] cikkben találhatóak.

2.6. Forszolások és ideálok homogenitása

Utolsó problémánk megfogalmazásához további definíciókra van szükség. Forszolással kapcsolatos ismeretekért lásd [36, 33].

2.6.1. Definíció. Egy $\mathbb{P}$ kényszerképzet *homogén*, ha minden $p \in \mathbb{P}$ esetén $\mathbb{P}$ megszorítása p-re (azaz $\{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$) forszolás ekvivalens $\mathbb{P}$-vel.

J. Zapletal [50] monográfiájában a következő problémát veti fel:

2.6.2. Probléma. ([50, Question 7.1.3.]) *„Bizonyítsuk be, hogy valamely, a könyvben említett forszolás nem homogén!”*

Valójában mi a következő nagyon szorosan kapcsolódó definícióval foguk dolgozni, lásd [50, Definition 2.3.7.]:

2.6.3. Definíció. Egy $\mathcal{I}$ σ-ideál egy X lengyel téren *homogén*, ha minden $B \subset X$ Borel-halmazhoz létezik egy $f : X \to B$ Borel-függvény úgy, hogy $f^{-1}(I) \in \mathcal{I}$ minden $I \in \mathcal{I}$ esetén.

Zapletal megjegyzi, hogy „Minden esetben, amellyel a könyvben találkozunk, a forszolás és a hozzá tartozó ideál homogenitása együtt jár”.

A fejezet fő célja megmutatni, hogy egy érdekes, a könyvben említett ideál nem homogén. Ehhez vezessük be $\mathbb{R}^n$ σ-véges r-dimenziós Hausdorff-mértékű halmazainak σ-ideálját:

2.6.4. Definíció.

$$\mathcal{I}^r_{n,\sigma-fin} = \{H \subset \mathbb{R}^n : \exists H_k \subset \mathbb{R}^n,\ \cup_{k\in\mathbb{N}} H_k = H,\ \mathcal{H}^r(H_k) < \infty \text{ minden } k \in \mathbb{N}\text{-ra}\}.$$

2.6.5. Tétel. *Az $\mathcal{I}^r_{n,\sigma-fin}$ σ-ideál nem homogén.*

A bizonyítás Máthé A. egy Hausdorff-dimenziók nem növekedéséről szóló tételének meglepően egyszerű alkalmazása. Minden bizonnyal azért nem találtak rá ezelőtt, mert kevesen gondolnák, hogy egy forszolástechnikai kérdésre a fraktáldimenziók segítenek választ adni!

A fejezet eredményei és további részletek a [20] cikkben találhatóak.

Hivatkozások

[1] S. A. Argyros, G. Godefroy, H. P. Rosenthal, Descriptive set theory and Banach spaces. *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*, 1007–1069, *North-Holland, Amsterdam*, 2003.

[2] T. Bartoszyński, H. Judah, *Set theory. On the structure of the real line.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[3] C. E. Bluhm, Liouville numbers, Rajchman measures, and small Cantor sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), no. 9, 2637–2640.

[4] J. B. Brown, Restriction Theorems in Real Analysis, *Real Anal. Exchange* **20** (1994-95), no. 2, 411–413.

[5] Y. Bugeaud, M. M. Dodson, S. Kristensen, Zero-infinity laws in Diophantine approximation, *Q. J. Math.* **56** (2005), no. 3, 311–320.

[6] J. P. R. Christensen, On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups, *Israel J. Math.* **13** (1972), 255–260.

[7] Csörnyei M., Open Problems, `http://users.uoa.gr/~apgiannop/csornyei.ps`

[8] Csörnyei M., Open Problems. Compiled and edited by M. Csörnyei, Proceedings from the conference Dimensions and Dynamics’, Miskolc, Hungary, July 20-24, 1998. *Periodica Math. Hung.* **37** (1998), 227–237.

[9] U. B. Darji, Keleti T., Covering $\mathbb{R}$ with translates of a compact set, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 8, 2593–2596.

[10] R. O. Davies, Sets which are null or non-sigma-finite for every translation-invariant measure. *Mathematika* **18** (1971), 161–162.

[11] Elekes M., Hausdorff measures of different dimensions are isomorphic under the Continuum Hypothesis, *Real Anal. Exchange* **30** (2004/05), no. 2, 605–616.

[12] Elekes M., Linearly ordered families of Baire 1 functions, *Real Anal. Exchange*, **27** (2001/02), no. 1, 49–63.

[13] Elekes M., Keleti T., Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure, *Adv. Math.* **201** (2006), 102–115.

[14] Elekes M., Kiss V., Vidnyánszky Z., Ranks on the Baire class ξ functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368** (2016), no. 11, 8111–8143.

[15] Elekes M., Laczkovich M., A cardinal number connected to the solvability of systems of difference equations in a given function class, *J. Anal. Math.* **101** (2007), 199–218.

[16] Elekes M., Máthé A., Can we assign the Borel hulls in a monotone way?, *Fund. Math.* **205** (2009), no. 2, 105–115.

[17] Elekes M., J. Steprāns, Chains of Baire class 1 functions and various notions of special trees, *Israel J. Math.* **151** (2006), 179–187.

[18] Elekes M., J. Steprāns, Haar null sets and the consistent reflection of non-meagreness, *Canad. J. Math.* **66** (2014), 303–322.

[19] Elekes M., J. Steprāns, Less than 2^ω many translates of a compact nullset may cover the real line, *Fund. Math.* **181** (2004), no. 1, 89–96.

[20] Elekes M., J. Steprāns, Set-theoretical problems concerning Hausdorff measures, megjelenés alatt a *Proc. Amer. Math. Soc.*-nál, `http://arxiv.org/pdf/1508.02053v1.pdf`

[21] Elekes M., Vidnyánszky Z., Characterization of order types of pointwise linearly ordered families of Baire class 1 functions, *Adv. Math.*, **307C** (2017), 559–597.

[22] Elekes M., Vidnyánszky Z., Haar null sets without G_δ hulls, *Israel J. Math.*, **209** (2015), no. 1, 199–214.

[23] Erdős P., S. Kakutani, On a perfect set, *Colloquium Math.* **4** (1957), 195–196.

[24] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets.* Cambridge Tracts in Mathematics No. 85, Cambridge University Press, 1986.

[25] T. Filipczak, A. Rosłanowski, S. Shelah, On Borel hull operations, *Real Anal. Exchange*, **40**, no. 1, (2015), 129–140.

[26] D. H. Fremlin, *Measure Theory*, Volume 5, Set-theoretic measure theory. Part I, II. Colchester: Torres Fremlin, 2008.

[27] D. H. Fremlin, Problems,
`http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/problems.pdf`

[28] G. Gruenhage, R. Levy, Covering ${}^\omega\omega$ by special Cantor sets, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **43** (2002), no. 3, 497–509.

[29] Gyenes Z., Pálvölgyi D., személyes kommunikáció, 2004.

[30] R. Haydon, E. Odell, H. P. Rosenthal, Certain subclasses of Baire-1 functions with Banach space application, *Functional analysis (Austin, TX, 1987/1989)*, 1–35, Lecture Notes in Math., 1470, *Springer, Berlin*, 1991.

[31] P. Humke, Laczkovich M., Remarks on a construction of Erdős, preprint.

[32] P. Humke, Laczkovich M., Typical continuous functions are virtually nonmonotone, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94**, (1985) no. 2, 244–248.

[33] T. Jech, *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[34] A. S. Kechris, A. Louveau, A Classification of Baire Class 1 Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990), no. 1, 209–236.

[35] Komjáth P., Ordered families of Baire-2 functions, *Real Anal. Exchange* **15** (1989-90), 442–444.

[36] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland, 1980.

[37] K. Kuratowski, Topology. Vol. II. New edition, revised and augmented. *Academic Press, New York-London; Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Polish Scientific Publishers, Warsaw* 1968.

[38] Laczkovich M., számos fórumon feltett kérdés.

[39] D. G. Larman, The approximation of G_δ-sets, in measure, by F_σ-sets, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **61** (1965), 105–107.

[40] Máthé A., Covering the real line with translates of a zero dimensional compact set, *Fund. Math.* **213** (2011), 213–219.

[41] Máthé A., Hausdorff measures of different dimensions are not Borel isomorphic, *Israel J. Math.* **164** (2008), no. 1, 285–302.

[42] Máthé A., Measurable functions are of bounded variation on a set of dimension 1/2, *Bull.London Math. Soc.* **45** (2013), 580–594.

[43] Máthé A., Measuring sets with translation invariant Borel measures, preprint.

[44] P. Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics No. 44, Cambridge University Press, 1995.

[45] R. D. Mauldin, Problem Session at the Millennium Symposium, Denton, Texas, May, 2000.

[46] J. Mycielski, Some unsolved problems on the prevalence of ergodicity, instability, and algebraic independence, *Ulam Quarterly* **1** (1992), 30–37.

[47] A. Rosłanowski, S. Shelah, Monotone hulls for $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, *Period. Math. Hung.*, **69**, no. 1, (2014), 79–95.

[48] S. Shelah, J. Steprāns, Comparing the uniformity invariants of null sets for different measures, *Adv. Math.* **192**, no. 2, (2005), 403–426.

[49] S. Solecki, On Haar null sets, *Fund. Math.* **149** (1996), 205–210.

[50] J. Zapletal, *Forcing idealized.* Cambridge Tracts in Mathematics, 174. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.