

Bírálóí vélemény Elekes Márton
An encounter between set theory and analysis
című MTA doktori disszertációjáról

A disszertáció a szerző 14 folyóiratcikke alapján készült, amelyek közül két cikk egyszerzős. A többszerzős cikkekben a leggyakoribb társszerző Juris Steprāns. A cikkek közül kettő az *Advances in Mathematics*-ban jelent meg, kettő az *Israel Journal of Mathematics*-ban, kettő a *Proceedings of the AMS*-ben, kettő a *Real Analysis Exchange*-ben, a többi is rangos nemzetközi folyóiratokban.

A dolgozat bevezetésből, három fejezetből és négy és fél oldalnyi irodalomjegyzékből áll. A bevezetés nemcsak a disszertáció legfontosabb eredményeit, hanem azok kontextusát is kiválóan bemutatja. Az első fejezet leíró halmazelméleti, a második pedig Hausdorff-mértékekkel kapcsolatos eredményeket tartalmaz. A harmadik fejezet a bizonyításokat tartalmazza. Az első fejezet négy, a második fejezet hat alfejezetre oszlik, így összesen tíz, egymáshoz csak lazán kapcsolódó témáról szól a disszertáció. Ezek közül az első három nagyobb lélegzetű és elméletibb jellegű, míg az utolsó hét alfejezet eredményeire viszonylag rövid, elegáns bizonyítást ad a szerző összesen 19 oldalon, ami azonban korántsem jelenti azt, hogy ez utóbbiakra könnyű lehetett rájönni.

Az 1.1. alfejezet nagyrészt a doktorjelöltnek egy-egy, Juris Steprāns-szal és Vidnyánszky Zoltánnal közös cikkén alapul. Az 1.1.4. tételben Laczkovich Miklósnak az 1970-es években feltett kérdésére válaszolva karakterizálják azon lineárisan rendezett hamazokat, amelyek reprezentálhatók egy X nem-megszámlálható lengyel tér Baire 1 függvényeivel úgy, hogy nagyobb elemnek pontonként nagyobb vagy egyenlő, de legalább egy pontban szigorúan nagyobb függvény feleljen meg. A válasz nem függ az X tér választásától. Valójában egy explicite megadott, lineárisan rendezett halmazba beágyazható rendezett halmazok lesznek jók. Ez a tétel rész-eredmények hosszú sorát zárja le, amelyek jelentős része szintén a jelölttől származik, de pl. a Kuratowskitól és Komjáth Pétertől származó részeredményeket is lefedi az új tétel.

Az 1.2. alfejezet a jelöltnek egy-egy, Juris Steprāns-szal és Vidnyánszky Zoltánnal közös cikkén alapul, és néhány, Haar-null halmazokkal kapcsolatos alapkérdést tisztáz lengyel Abel-csoportokban. Ilyen csoporton — lokális kompaktság hiányában — nincs Haar-mérték, de a Haar-null halmaz fogalma — Christensen nyomán — azért kiterjeszthető ilyen csoportra is: egy Borel-halmaz Haar-null, ha nullmértékű egy alkalmas valószínűségi Borel-mérték minden eltoltjára nézve; egy tetszőleges halmaz Haar-null, ha befedhető Haar-null Borel-halmazzal. Az 1.2.10. tétel szerint ez a befedhetőség nem következik — már a lokálisan kompakt esetben, sőt a számegyenesen sem — abból, hogy a halmaz maga nullmértékű egy alkalmas valószínűségi Borel-mérték (telítésének) minden eltoltjára nézve. Az 1.2.8. tétel szerint pedig bármely, még lokálisan sem kompakt lengyel Abel-csoportban van koanalitikus (tehát univerzálisan mérhető) példa is erre. Ezek az eredmények Fremlin kérdéseire válaszolnak. Az 1.2.4. tétel szerint pedig egy Haar-null halmaz befedéséhez bármilyen magas osztályú Borel Haar-null halmazra szükség lehet. Ez a tétel (nagyon) nemleges választ ad Mycielski 1992-ben publikált kérdésére: van-e mindig $\mathcal{G}_\delta$ osztályú Haar-null befedő halmaz?

Az 1.3. alfejezet a jelöltnek Kiss Viktorral és Vidnyánszky Zoltánnal közös cikkén alapul. A Baire 1 függvények háromféle rangjának Kechris és Louveau által kidolgozott elméletét általánosítják magasabb Baire-féle függvényosztályokra. Ehhez először ellenőrizniük kell, hogy Kechris és Louveau Baire 1 függvényekre vonatkozó megfontolásai akkor is működnek, ha az értelmezési tartomány nem feltétlenül kompakt metrikus tér, hanem tetszőleges lengyel tér. Ez ad lehetőséget a magasabb Baire-osztályokra való kiterjesztéshez használt eszköznek, a topológiafinomítások módszerének az alkalmazására. Mindez messze nem triviális, igen hosszadalmas és technikai megfontolásokat igényel. Az új elmélet következményeként megmutatják, hogy ha $\xi > 1$ megszámlálható rendszám, akkor van olyan differenciaegyenlet-rendszer, hogy minden megszámlálható részrendszernek van Baire ξ megoldása, de az egész rendszernek nincs.

Az 1.4.–2.3. alfejezetek eredményei konzisztencia-tételek, amelyek bizonyítása a kontinuumhipotézis függetlenségére való hivatkozással és/vagy forszolással történik.

Az 1.4. alfejezet a jelöltnek Máthé Andrással közös cikkén alapul. Az 1.4.6. tétel szerint ZFC Cohen-modelljében nem lehet a $[0, 1]$ intervallum minden nullmértékű részhalmazához egy öt tartalmazó nullmértékű Borel-halmazt (ún. burkot) rendelni úgy, hogy ez a hozzárendelés a tartalmazásra nézve monoton legyen. Az 1.4.7. tétel szerint viszont, ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor a $[0, 1]$ intervallumnak akár minden Lebesgue-mérhető részhalmazához hozzárendelhetünk egy öt tartalmazó, vele azonos mértékű, akár $\mathcal{G}_\delta$ burkot is monoton módon.

A 2.1. alfejezet a jelöltnek Juris Steprāns-szal közös friss cikkén alapul. Azt igazolták, hogy a Hausdorff-mértékek számosságinvariánsaira Fremlin által korábban igazolt egyenlőtlenségek alkalmas ZFC-modellben lehetnek szigorúak. (Fremlin azt állapította meg, hogy ezek az invariánsok hogyan illeszkednek a Lebesgue-mérték és Baire-kategória számosságinvariánsai közötti egyenlőtlenségeket leíró ún. Cichoń-diagramba.) A 3.7.2. tétel szerint minden $n > r > 0$ esetén van ZFC-nek olyan modellje, amelyben a számegyenesnek van $\aleph_1$ számosságú, nem nullmértékű részhalmaza, a számegyenes lefedhető $\aleph_1$ darab nullmértékű halmazzal, de $\mathbb{R}^n$ nem fedhető le $\aleph_1$ darab, nulla r -dimenziós Hausdorff-mértékű halmazzal. A 2.1.10. tétel és a 3.7.4. következmény arra mutat rá, hogy $n = 1 > r > 0$ esetén ilyen modellben van a valós számoknak olyan lineáris rendezése, amelynek minden valódi kezdőszelete nullmértékű, de nincs olyan lineáris rendezése, amelynek minden valódi kezdőszelete nulla r -dimenziós Hausdorff-mértékű volna. Ez Humke és Laczkovich egy kérdését válaszolja meg. A 2.1.4. tétel szerint a ZFC axiómarendszer ún. Laver-modelljében $\mathbb{R}^n$ lefedhető $\aleph_1$ darab, nulla r -dimenziós Hausdorff-mértékű halmazzal minden $n > r > 0$ esetén, noha e modellben a számegyenes minden $\aleph_1$ számosságú részhalmaza első kategóriájú. A 2.1.5. tételben pedig tetszőleges $n > r > 0$ esetén olyan ZFC-modellt konstruál a szerző, amelyben a számegyenes lefedhető $\aleph_1$ első kategóriájú halmazzal, de $\mathbb{R}^n$ minden $\aleph_1$ számosságú részhalmazának r -dimenziós Hausdorff-mértéke nulla.

A 2.2. alfejezet a jelöltnek Juris Steprāns-szal közös, régebbi cikkén alapul, és Gruenhage egy kérdését vizsgálja: van-e olyan modellje ZFC-nek, amelyben a számegyenes lefedhető egy kompakt nullmértékű halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával? A 2.2.7. tétel szerint egy explicite megadott, a geometriai mértékelméletben ismert, Erdős és Kakutani által vizsgált, kompakt, nullmértékű (de 1 Hausdorff-dimenziójú) C halmaz igenlő választ szolgáltat erre a kérdésre. Ehhez először — Darji és Keleti 2.2.4. kérdésére válaszolva — megmutatják, hogy bármely nemüres perfekt halmaznak egy alkalmas nemüres perfekt részhalmaza lefedhető C egy eltoltjával. Ez a 2.2.6. tétel. Ebből a szlalomok elméletét felhasználva vezetik le az említett 2.2.7. tételt. Azóta Máthé András továbbfejlesztette az eredményt: Elekes és Steprāns módszereit felhasználva megmutatta, hogy e tételekben C szerepét egy alkalmas kompakt, 0 Hausdorff-dimenziós halmaz is játszhatja.

A 2.3. és 2.4. alfejezetek a jelöltnek egy egyszerű cikkén alapulnak.

A 2.3.3. tétel azt állítja, hogy ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor minden $n > d_2 > d_1 > 0$ esetén van olyan permutációja az $\mathbb{R}^n$ térnek, amely a d_1 dimenziós Hausdorff-féle külső mértéket a d_2 dimenziós Hausdorff-féle külső mértékbe viszi. A bizonyítás egy bonyolult transzfinit konstrukció. Később Máthé András bebizonyította, hogy ilyen permutáció nem lehet Borel-izomorfizmus.

A 2.4. alfejezet a $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvények reguláris megszorításairól szól. A 2.4.2. tétel szerint, ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor tipikus folytonos függvény semmilyen, $(1 - \alpha)$ -nál nagyobb Hausdorff-dimenziós halmazon sem Hölder-folytonos α kitevővel. A 2.4.3. tétel Humke és Laczkovich azon eredményéhez kapcsolódik, mely szerint tipikus folytonos függvény semmilyen, pozitív Hausdorff-dimenziós halmazon sem monoton. A jelölt azt látta be, hogy tipikus folytonos függvény semmilyen, $(1/2)$ -nél nagyobb Hausdorff-dimenziós halmazon sem korlátos változású. Máthé András igazolta, hogy a 2.4.2. és 2.4.3. tétel is éles.

A 2.5. alfejezet a jelöltnek Keleti Tamással közös cikkén alapul. A 3.15.1. tétel szerint,

ha a számegegyenes egy nemüres, nullmértékű $\mathcal{G}_\delta$ részhalmazának periódusai mindenütt sűrűn vannak a számegegyenesen, akkor ez a halmaz megmérhetetlen: nincs olyan eltolásinvariáns Borel-mérték, amelyre nézve σ -véges, de pozitív mértékű volna. Speciálisan, a Liouville-számok (racionális számokkal tetszőleges rendben approximálható számok) halmaza megmérhetetlen. Ez az eredmény, a 2.5.4. tétel, Daniel Mauldin húszéves kérdését válaszolja meg. A bizonyítás teljesen elemi, két oldalnyi, és nagyon szép.

A 2.6. alfejezet a jelöltnek Juris Steprāns-szal közös, fent elsőként említett, friss cikkén alapul. J. Zapletal egy 2008-as kérdéséhez kapcsolódva megmutatják, hogy $0 < r < n$ esetén az $\mathbb{R}^n$ tér véges r -dimenziós Hausdorff-mértékű részhalmazai generálta $\mathcal{I}$ σ -ideál nem homogén. Ez annyit jelent, hogy van olyan, nem $\mathcal{I}$ -beli Borel-halmaz, amelybe $\mathbb{R}^n$ nem képezhető le Borel-mérhető módon úgy, hogy minden $\mathcal{I}$ -beli halmaz teljes ösképe is $\mathcal{I}$ -ben legyen. Itt csak azt kellett észrevenni, hogy ez könnyen következik Máthé András egy ugyancsak 2008-as eredményéből. Úgy látszik azonban, hogy ezt kb. egy évtizeden át senki sem vette észre.

Ennek az eredménynek a leírása hagy némi kívánnivalót maga után: a homogenitás 2.6.3. definíciója és a 2.6.5. tétel is pontatlanul van kimondva, a bizonyítás pedig csak az $n = 3$, $r = 2$ esetre van leírva, ráadásul nem a megfelelő cikkekre hivatkozik a szerző (a tévesztést nyilván a Máthé és Mattila nevek hasonlósága okozta). Ezek azonban csak egy-egy pillanatra akasztják meg az olvasást, evidens például, hogy a bizonyítás az általános esetre is jó.

Új tudományos eredményként fogadom el a tézisfüzetben és a dolgozatban ilyenként szereplő összes eredményt.

A disszertáció mély elméleti tudásról és lényeglátásról, valamint erőteljes problémamegoldó képességről tesz tanúbizonyságot. Elekes Márton (társszerzőivel) a leíró halmazelmélet és a geometriai mértékelmélet számos nagyon természetes, alapvető kérdésében ért el igen jelentős előrelépést, sok esetben áttörést, messze nem triviális, ötletes bizonyításokkal, a bizonyítási eszközök széles tárházát használva. Több esetben vezető kutatók évtizedek óta nyitott kérdéseit oldotta meg. A dolgozat — apró pontatlanságoktól eltekintve — nagyon jól van megírva, a megfogalmazások világosak és érthetőek, a felépítés logikus, az összefüggések jól követhetők. A dolgozat messzemenően teljesíti a doktori disszertációkkal szemben általában támasztott követelményeket. Ennek alapján javaslok a nyilvános vita kitűzését.

Budapest, 2018. augusztus 29.

Frenkel Péter