

Opponensi vélemény

Elekes Márton

„An Encounter between
Set Theory and Analysis”
című doktori dolgozatáról

A disszertáció első része leíró halmazelméleti kérdésekkel foglalkozik.

Az első téma a következő: vegyük a $[0, 1]$ -ből $[0, 1]$ -be képező függvények egy osztályát a pontonkénti rendezéssel, mely rendezett halmazok ágyazhatók be ebbe a részbenrendezett halmazba? Ha például a folytonos függvények osztályát vesszük, a válasz egészen könnyen megadható: pontosan azok a rendezett halmazok ágyazhatók be, amelyek beágyazhatók a valós számok rendezett halmazába. Kuratowski egy igen régi eredménye azt mondja ki, hogy ω_1 viszont nem ágyazható a Baire-1 függvények fenti szerint részbenrendezett halmazába. Még a hetvenes években Laczkovich Miklós kezdeményezte a további kutatásokat, például megkérdezte, hogy Szuszlin-egyesen hasonlóképpen reprezentálható-e. Ezt sikerült megcáfolnom, továbbá megmutattam, hogy már a Baire-2 függvények osztálya is túl tág: minden rendezett halmaz, alkalmas modellben, reprezentálható ilyen függvényekkel. Maradt tehát a Baire-1 függvényekkel reprezentálható rendezett halmazok kérdése. Ezt Elekes és Vidnyánszky teljesen megoldotta: megadtak egy (meglehetősen bonyolult) rendezett halmaz és igazolták, hogy pontosan ennek a részhalmazai ágyazhatók be a Baire-1 függvények részbenrendezett halmazába. Ez nem csak elvi lezárását adja a kérdésnek: a tételből valamennyi korábbi eredmény röviden levezethető.

A második fejezetben a szerző Mycielski következő kérdésére adja meg a (nemleges) választ: igaz-e, hogy egy lengyel csoportban minden Haar null halmaz lefedhető G_δ Haar null halmazzal? Ezt G_δ helyett bármelyik más Borel-osztályra is belátja. Ennek érdekes következménye, hogy ha G Abel-féle lengyel csoport, ami nem lokálisan kompakt, akkor a Haar null halmazok additivitása pontosan ω_1 .

A következő fejezet főeredménye kiterjeszti Kechris és Louveau eredményeit Baire-1 függvényekről tetszőleges magasabb Baire-osztályra.

Jól ismert, hogy minden Lebesgue-mérhető halmaznak van Borel- sőt G_δ -burka, azaz minden A Lebesgue-mérhető halmazhoz hozzárendelhető egy olyan $\varphi(A) \supseteq A$ halmaz, ami Borel (illetve G_δ) és $\lambda(\varphi(A)) = \lambda(A)$. A szerző azt a kérdést vizsgálja, hogy lehetséges-e ez monoton módon, tehát van-e olyan fenti típusú φ hozzárendelés, hogy $A \subseteq A'$ -re $\varphi(A) \subseteq \varphi(A')$? Megállapítja, hogy mindkét válasz konzisztens, tehát az is, hogy van ilyen monoton függvény a mérhető halmazokon, illetve az is, hogy a nullmértékű-eken sincs.

A disszertáció második nagy része Hausdorff-mértékekkel kapcsolatos kérdésekkel foglalkozik.

Első témája a Lebesgue-mérték és a kategória különböző számosság-invariánsaiból alkotott hálózattal, az úgynevezett Cichoń-diagrammal kapcsolatos. Ahhoz, hogy a Hausdorff-mérték analóg invariánsait be tudjuk illeszteni a Cichoń-diagramba, különböző egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket kell igazolni. Ezzel kapcsolatban bizonyította a szerző, hogy az alábbi állítások (külön-külön) konzisztensek:

$$\begin{aligned}\text{cov}(\mathcal{N}) &= \omega_1 \text{ és } \text{cov}(\mathcal{N}_n^r) = \omega_2, \\ \text{cov}(\mathcal{N}_n^r) &= \omega_1 \text{ és } \text{non}(\mathcal{M}) = \omega_2, \\ \text{cov}(\mathcal{M}) &= \omega_1 \text{ és } \text{non}(\mathcal{N}_n^r) = \omega_2, \\ \text{add}(\mathcal{N}) &= \text{cov}(\mathcal{N}) \text{ és } \text{cov}(\mathcal{N}_1^{1/2}) > \text{non}(\mathcal{N}_1^{1/2}).\end{aligned}$$

A következő fejezet témája az a kérdés, hogy egy kompakt, nullmértékű halmaz eltoltjai lefedhetik-e a számegyeneset. Egy már korábban is vizsgált, konkrét, nullmértékű, 1 Hausdorff dimenziójú C_{EK} halmazzal kapcsolatban igazolja, minden nemüres perfekt P halmazra van olyan x , hogy $(C_{EK} + x) \cap P$ nem-megszámlálható. Továbbá R lefedhető C_{EK} $\text{cof}(\mathcal{N})$ eltoltjával, innen következően konzisztens, hogy van kompakt nullmértékű halmaz, aminek kontinuumnál kevesebb eltoltja lefedheti $\mathbb{R}$ -t.

A következő fejezet egy Hausdorff-mértékekkel kapcsolatos természetes probléma részleges megoldását tartalmazza. A szerző bebizonyítja, hogy a Kontinuumhipotézis teljesülése esetén, bármely két $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_1}, \mathcal{H}^{d_1})$ illetve $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_2}, \mathcal{H}^{d_2})$ ($0 < d_1 \leq d_2 < n$) mértéktér izomorf, abban az értelemben, hogy van egy $f : \mathcal{H}^{d_1} \rightarrow \mathcal{H}^{d_2}$ mindkét irányban mérhető és mértéktartó bijekció. Itt $\mathcal{H}^d$ a d -dimenziós Hausdorff-mérték, $\mathcal{M}_d$ az erre nézve mérhető halmazok σ -algebrája.

A következő fejezet tipikus függvények megszorításaival foglalkozik. A szerző belátja, hogy egy tipikus folytonos valós függvény nem α exponensű Hölder-folytonos egy $1 - \alpha$ -nál nagyobb Hausdorff-dimenziós halmazon ($0 < \alpha \leq 1$). Továbbá egy tipikus folytonos függvény nem egyezik meg semelyik korlátos változású függvénnyel $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb Hausdorff-dimenziós halmazon.

A következő fejezet Mauldin egy kérdésére ad választ: a Liouville számok halmaza minden eltolás-invariáns Borel-mértékre nézve vagy nullmértékű vagy nem szigma-véges.

A disszertáció utolsó fejezete egy forszolással kapcsolatban felmerült kérdésre ad választ: a szigma-véges r -dimenziós Hausdorff-mértékű halmazok szigma-ideálja nem homogén.

Mint az a fentiekből látható, Elekes mások által felvetett és vizsgált kérdéseket old meg, halmazelméleti, leíró halmazelméleti és valós függvény-tani módszerek hatékony alkalmazásával. Mind a tételek, mind a felhasznált módszerek változatossága lenyűgöző.

Ezek alapján javaslom Elekes Mártonnak az MTA doktora cím megadását.

Komjáth Péter, egyetemi tanár
a MTA rendes tagja