

Bírálati vélemény
Elekes Márton
"AN ENCOUNTER BETWEEN SET THEORY AND ANALYSIS"
című akadémiai doktori értekezéséről

Elekes Márton az analízis és a halmazelmélet határterületén old meg sokakat érdeklő nehéz és fontos problémákat, melyeket gyakran a szakterület legnevesebb képviselői kérdeztek. Magyarországon ez a kutatási terület nagyon magas szinten képviselt. Elekes Márton annak az iskolának az egyik tagja, amelyik Laczkovich Miklós körül alakult. Külföldi társzerzői mellett Keleti Tamással, Máthé Andrással, és korábbi diákjával Vidnyánszki Zoltánnal írt közös cikkeket igen neves folyóiratokban: Adv. in Mathematics, Israel J. of Mathematics, Proceedings of AMS, Transactions of AMS. Mind a valós függvénytan mind a halmazelmélet eszközeit igen magas szinten használja.

A dolgozat három fejezetből áll: az elsőben a leíró halmazelmélethez (Descriptive set theory), a másodikban pedig a Hausdorff mértékekhez kötődő eredményeit foglalja össze, és helyezi olyan kontaktusba, hogy az ezen eredményeket megelőző és ezen eredmények által inspirált későbbi eredményeket is bemutatja. Elekes Márton által megoldott problémák köre rendkívül széles és a dolgozat első két fejezetében nagyon érthetően kerülnek bemutatásra. Feleslegesnek tartom ezek itt felsorolni, az alábbiakban csak azokat említem meg, melyek nekem a legjobban tetszenek.

Az 1.1-es fejezetben Laczkovich Miklósnak az 1970-es években feltett kérdésére ad választ. A kérdés az volt, hogy karakterizáljuk a $\mathcal{B}_1(X)$ lineárisan rendezett típusait, ahol X egy nem-megszámlálható Lengyel tér és $\mathcal{B}_1(X)$ jelenti azon függvények családját, melyek pontonkénti limeszei az X -en értelmezett valós értékű folytonos függvényeknek. Ezt a kérdést teljesen megválaszolta Elekes Márton, korábbi diákjával Vidnyánszki Zoltánnal közösen és az Israel J. Math-ban publikálták 2017-ben.

Az 1.2 fejezetben a következő problémát tekinti: Legyen G egy Abelian Polish Group (például szeparábilis Banach tér). Egy $A \subset G$ halmazt Haar nulla halmaznak hívunk, ha létezik olyan μ Borel valószínűségi mérték G -n és létezik olyan B Borel halmaz, amelyre $A \subset B$ és $\mu(g + B) = 0$ teljesül minden $g \in G$. A Haar-nulla halmazok komplementereit prevalent halmazoknak hívjuk. Mycielski tette fel azt a természetes kérdést, hogy vajon egy A Haar nulla halmazra mindig találunk-e olyan G_δ halmazt, amely az A -t tartalmazza és amely maga is Haar nulla halmaz. Elekes Márton, Vidnyánszky

Zoltánnal közösen igazolta, hogy ez sohasem teljesül, ha G egy nem lokálisan kompakt Ábel Lengyel csoport (**Theorem 1.2.3**). Ezzel kapcsolatos az a nagyon érdekes tétel, amely azt bizonyítja, hogy a fenti definícióban nem hanyagolható el az a feltevés, hogy a B halmaz Borel. Nevezetesen a **Theorem 1.2.10** (Elekes, Steprāns) kimondja, hogy létezik olyan Lebesgue pozitív külső mértékű X halmaz és olyan μ valószínűségi Borel mérték $\mathbb{R}$ -en, hogy az X halmaz minden eltoltjának μ mértéke nulla. Ezen állítás a következő önmagában is nagyon érdekes tételen múlik: **Theorem 3.3.3** (Elekes, Steprāns) : Legyen $K \subset \mathbb{R}$ egy olyan Cantor halmaz, amelynek pakolási dimenziója kisebb mint $1/2$. Ekkor választhatunk olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmazt, amely ugyan nem biztos, hogy mérhető, de a külső Lebesgue mértéke pozitív (tehát ebben az értelemben nem kicsi halmaz), mégis az X halmaz bármely eltoltja vagy nem metszi K -t vagy ha metszi, akkor pontosan 1 pontban metszi.

A 2.2 -es fejezet azt a nagyon érdekes kérdést vizsgálja, hogy ha adott egy $C \subset \mathbb{R}$ Lebesgue nulla mértékű kompakt halmaz, akkor ennek legalább hány eltoltjára van szükségünk, hogy le tudjuk fedni $\mathbb{R}$ -et. C. Gruenhage kérdezte (**Question 1.2.7**), hogy konzisztens-e az, hogy létezik olyan Lebesgue nulla mértékű kompakt halmaz, aminek kevesebb mint kontinuum számosságú eltoltjával az $\mathbb{R}$ lefedhető. Ez a probléma motiválta Keleti Tamást és U.B. Darji-t a következő definíció bevezetésére: Azt mondjuk, hogy egy $P \subset \mathbb{R}$ nem üres, perfekt halmaz egy $C \subset \mathbb{R}$ halmaz tanúja (witness), ha minden $x \in \mathbb{R}$ -re $(x + C) \cap P$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen vagyis megszámlálható. A definíciót az motiválta, hogy ha egy C halmaznak van egy P tanúja, akkor C -nek kontinuumnál kevesebb eltoltja nem fedheti le P -t tehát $\mathbb{R}$ -et sem. Ezután Keleti és Darji bizonyították, hogy ha egy $C \subset \mathbb{R}$ halmaz kicsi abban az értelemben, hogy az úgynevezett pakolási dimenziója egyenlő kisebb, akkor a C -nek van tanúja, vagyis az $\mathbb{R}$ nem fedhető le a C -nek kontinuumnál kevesebb eltolásával. Ezután Keleti és Darji kérdezték, hogy van-e tanú-halmaz minden null mértékű kompakt halmaznak? Erre adott negatív választ Elekes Márton, Juris Steprāns-el közös munkájukban. Ehhez szükségük volt a már Erdős és Kakutani által is vizsgált halmazra:

$$C_{EK} = \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n!} : \forall n, d_n \in \{0, 1, \dots, n-2\} \right\}.$$

Vegyük észre, hogy megszámlálhatóan végtelen sok x -től eltekintve, minden $x \in [0, 1]$ -nek létezik egy egyértelmű felbontása $x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n!}$, ahol $x_n \in \{1, \dots, n-1\}$, azonban C_{EK} egy Lebesgue nulla halmaz, aminek a Hausdorff és pakolási dimenziója egyenlő 1-el. Elekes Márton Juris Steprāns-el közösen bizonyította (**Theorem 2.2.6**), hogy minden perfekt $P \subset \mathbb{R}$ -halmazra

létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $(x + C_{EK}) \cap P$ egy nem megszámlálható halmaz. Hasonló gondolatok használatával Elekes Márton Juris Steprāns-el közösen megválaszolta Gruenhage kérdését. Nevezetesen, Legyen $\mathcal{N}$ az $\mathbb{R}$ Lebesgue nulla halmazainak ideálja. $\text{cof}(\mathcal{N})$ jelöli az a minimális számosságát egy olyan $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ családnak, melyre igaz, hogy minden null halmaz benne van az $\mathcal{F}$ valamelyik elemében. Ismert, hogy a ZFC-nek van olyan modellje, amelyben a $\text{cof}(\mathcal{N})$ számossága kisebb mint kontinuum. Elekes Márton Juris Steprāns-el közösen igazolta, (**Theorem 2.2.7**) hogy $\mathbb{R}$ -et le lehet fedni a C_{EK} -nak $\text{cof}(\mathcal{N})$ -számú eltoltjával. Vagyis a ZFC-nek van olyan modellje, amelyben $\mathbb{R}$ -et lefedhetjük egy null halmaznak kevesebb mint kontinuum számú eltoltjával. Használva ezen ötleteket, Mathé András később belátta, hogy a fenti állítás igaz marad ha C_{EK} -t lecseréljük egy megfelelően választott kompakt, zéró Hausdorff dimenziós halmazra.

A 2.3 fejezetben a különböző dimenziós Hausdorff mértékek izomorfiját vizsgálja, ahol két mértéktér izomorf, ha létezik közöttük egy bijekció f , úgy hogy egy halmaz az egyik térben pontosan akkor mérhető, ha az $\tilde{f}$ f -vel vett képe mérhető a másik térben és az eredeti halmaznak és a képének a mértéke megegyezik.

A következő kérdést D. Preiss-nek tulajdonítják:

Question 2.3.1 Legyen $\mathcal{B}$ a Borel σ -algebra az $\mathbb{R}^n$ -en. Legyen $0 < d_1 < d_2 < n$. Az a kérdés, hogy a következő mértékterek:

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathcal{H}^{d_1}) \text{ és } (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathcal{H}^{d_2})$$

izomorfak-e?

Erre a kérdésre Máthé András adott negatív választ. Most tekintsük a fenti kérdés kicsit módosított változatát:

Legyenek $\mathcal{M}_{d_1}$ és $\mathcal{M}_{d_2}$ a $\mathcal{H}^{d_1}$ és a $\mathcal{H}^{d_2}$ mértékekre nézve Caratheodory értelemben mérhető halmazok családjai. **Question 2.3.2** Legyen $0 < d_1 < d_2 < n$. Az a kérdés, hogy a következő mértékterek:

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_1}, \mathcal{H}^{d_1}) \text{ és } (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_2}, \mathcal{H}^{d_2})$$

izomorfak-e?

Véleményem szerint az értekezés egyik legérdekesebb eredménye: **Theorem 2.3.3:** A kontinuum hipotézist feltételezve: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_1}, \mathcal{H}^{d_1})$ és $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{d_2}, \mathcal{H}^{d_2})$ izomorfak.

A 2.4 fejezetben folytonos függvényeknek az értelmezési tartományuk 1-nél kisebb dimenziós halmazokra való megszorításaként elő álló függvényeket vizsgálja. A fejezet legérdekesebb eredményei:

Theorem 2.4.2 Legyen $\alpha \in [0, 1]$. Ekkor egy tipikus folytonos függvény nem Höldfer α semelyik olyan halmazra megszorítva, amelynek Hausdorff dimenziója nagyobb mint $1 - \alpha$.

Továbbá: **Theorem 2.4.3:** Tipikus folytonos function nemk egyezik meg egyetlen korlátos változású függvénnyel sem egy $1/2$ -nél nagyobb Hausdorff dimenziójú halmazon.

A 2.5 fejezetben olyan Borel halmazokat tárgyal, amelyeket nem lehet rendesen megfogni semmilyen eltolás invariáns mértékkel. Nevezetesen ezek a halmazok egy eltolás invariáns mértékre vagy túl kicsik (nulla mértékűek) vagy túl nagyok (a mérték ezen halmazokra megszorítva nem σ -véges). Azt mondjuk, hogy egy nem üres $B \subset \mathbb{R}$ Borel halmaz "immeasurable", ha ez a halmaz vagy nulla mértékű vagy nem σ -véges minden eltolás invariáns Borel mértékre.

Dániel Mauldin kérdezte **Question 2.5.2:** Létezik-e olyan eltolás invariáns Borel Mérték az $\mathbb{R}$ -en, amelyre a Liouville számok L halmaza pozitív és σ -véges, ahol a

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}, (q \geq 2) \text{ such that } \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}$$

Az értekezés másik számomra legérdekesebb eredménye az erre a kérdésre adott negatív válasz:

Theorem 2.5.4 A Liouville számok halmaza immeasurable.

Összegezve, Elekes Márton dolgozatában nagyon neves matematikusok sokakat érdeklő nehéz problémáit oldotta meg. Az eredményeit nagyon magas színvonalon publikálta. A disszertáció messzemenően megfelel az akadémiai doktori fokozat követelményeinek. Ennek alapján a dolgozat nyilvános vitára tűzését és az MTA doktori cím odaítélését melegen javaslom.

Opponens:



Simon Károly
az MTA doktora
BME Matematikai Intézet, Sztochasztika Tanszék