

Opponensi vélemény

Kristály Alexandru: Éles funkcionál-egyenlőtlenségek és elliptikus problémák
nemeuklideszi struktúrákon

című MTA Doktori értekezéséről

Az értekezés tárgya egyrészt különféle nemeuklideszi geometriai struktúrákon (Szoboljev-típusú) funkcionál-egyenlőtlenségek és bizonytalansági elvek élességének vizsgálata, másrészt – részben ezek alkalmazásaként – a fent említett nemeuklideszi geometriai struktúrákon tekintett elliptikus parciális differenciálegyenletek megoldásai számának tanulmányozása. A szerző így a matematika különböző ágait: a funkcionálanalízist, a kritikus pont elméletet, a differenciálgeometriát és a parciális differenciálegyenletek elméletét kapcsolja össze úgy, hogy mindegyik területen igen mély és aktuális eredményeket ér el, felhasználva a szóban forgó területek legújabb kutatási eredményeit.

Az angol nyelvű értekezés Bevezetésből, a jelölések jegyzékéből, öt fejezetből és bő irodalomjegyzékből áll.

Az 1. fejezetben a szerző leírja a későbbiekben felhasznált fogalmakat, tételeket, valamint a témában elért korábbi legfontosabb eredményeket.

A 2. fejezetben különféle interpolációs egyenlőtlenségek élességével kapcsolatos eredményeket mutat be. Először a pozitívan görbült tereken fennálló interpolációs egyenlőtlenségekkel foglalkozik. Többek között megmutatja, hogy ha a $CD(K,n)$ típusú (M,d,m) metrikus mértéktéren teljesül a Gagliardo – Nirenberg-egyenlőtlenség, és valamely M -beli pontban n -sűrűségi feltétel teljesül, akkor létezik olyan C pozitív szám, hogy minden x középpontú, ρ sugarú M -beli gömb mértéke nagyobb vagy egyenlő mint $C \rho^n$. A szerző igazolja, hogy a Gagliardo – Nirenberg-egyenlőtlenségben szereplő Szoboljev-típusú állandó minél közelebb van az euklideszi eset éles állandójához, annál közelebb lesz topológiailag a szóban forgó nemnegatív Ricci-görbületű sokaság az euklideszi térhez. Ezzel egyúttal megválaszol egy C. Xia által felvetett kérdést.

Ezután negatívan görbült tereken érvényes interpolációs egyenlőtlenségekkel foglalkozik. A Cs. Farkas és A. Szakál társszerzőkkel írt dolgozatban megmutatják, hogy a Gagliardo – Nirenberg-egyenlőtlenségek fennállnak (ugyanazon éles konstansokkal mint az euklideszi térben) minden olyan n -dimenziós Hadamard-sokaságon, amelyen teljesül az ún. Cartan – Hadamard-sejtés. Ha a szóban forgó egyenlőtlenségekben extrémális függvények vannak, akkor a sokaság izometrikus az n -dimenziós euklideszi térrel.

A 3. fejezetben a szerző a matematikai fizikában fontos bizonytalansági elvekkel foglalkozik. Pozitívan görbült terek esetében megmutatja, hogy az éles Heisenberg – Pauli – Weyl bizonytalansági elv pontosan akkor áll fenn, ha az (M,g) Riemann-sokaság izometrikus az ugyanolyan dimenziójú euklideszi térrel. Negatívan görbült terek esetében az éles Heisenberg – Pauli – Weyl bizonytalansági elv érvényes minden n -dimenziós (M,g) Hadamard-sokaságon. Azonban pozitív extrémális pontosan akkor létezik, ha (M,g) izometrikus az n -dimenziós euklideszi térrel. Ez utóbbi eredményekhez nem szükséges a Cartan – Hadamard-sejtés érvényessége. A fentiekre szóló 3.6 tétel kijavít egy lényeges hibát I. Kombe és M.Özaydin egy dolgozatában. A 3.7, 3.8 tételek szerint nagyobb görbületű Hadamard-sokaságok esetén erőteljesebb Hardy – Poincaré bizonytalansági elv érvényes.

Az értekezés 4. fejezetében Finsler-sokaságokon tekintett elliptikus problémák szerepelnek. Ehhez ismerni kell a sokaság felett értelmezett Szoboljev-terek alapvető tulajdonságait, pl. a terek reflexivitását, beágyazhatóságát. Ebben fontos szerepe van a Finsler-sokasághoz rendelt reverzibilitási állandónak: a Cs. Farkas és Cs. Varga társszerzőkkel írt cikkben igazolják, hogy ha a reverzibilitási állandó véges, akkor a sokasághoz rendelt Szoboljev-tér reflexív Banach-tér. A szerzők ugyanakkor szerkesztettek egy olyan nemkompakt Finsler-sokaságot, amelynek reverzibilitási állandója végtelen, és a felette értelmezett Szoboljev-tér nem vektortér. Ez az ellenpélda rámutat a Riemann- és Finsler-sokaságok közötti lényeges különbségre, és lezárja a nemkompakt sokaságokon értelmezett Szoboljev-terek elméletét.

A 4. fejezet második részében Finsler – Hadamard sokaságokon tárgyal a szerző elliptikus problémákat. Nevezetesen, paraméterfüggő Finsler – Laplace operátort és egy nemlineáris tagot tartalmazó elliptikus feladatot tekint Funktípusú Finsler-sokaságon. Variációs módszerek alkalmazásával megmutatja,

hogy kis paraméterérték esetén csak a nulla megoldás létezik, míg nagy paraméterérték esetén két különböző, nem nulla megoldás van. Ezután a 3.9 tételben levő éles Hardy – Poincaré egyenlőtlenség felhasználásával egy szingularitást tartalmazó Poisson-egyenletet vizsgál, és igazolja, hogy a Poisson-egyenlet megoldásának alakja jellemzi a Finsler-sokaság görbületét.

Az értekezés 5. fejezetében Riemann-sokaságokon vizsgál a szerző elliptikus problémákat. Kompakt Riemann-sokaságok esetében variációs módszerek alkalmazásával egy szublineáris tagot tartalmazó sajátérték feladatra éles bifurkációs állítást bizonyít a megoldások számára vonatkozólag, továbbá megmutatja, hogy a megoldások száma stabil kis perturbációk esetén.

A fejezet második részében nemkompakt Riemann-sokaságokon vizsgál a szerző elliptikus problémákat. Felhasználva a 3.10 tételben szereplő éles, többpólusú Hardy – Poincaré-egyenlőtlenséget, végtelen sok, egymástól szimmetrikusan különböző megoldás létezését igazolja az egységömb felső féltekéjén értelmezett Laplace – Beltrami-operátorra vonatkozó probléma esetén. Ehhez bizonyos csoportelméleti megfontolásokra van szükség. Végül igazolja, hogy egy Hadamard-sokaságon értelmezett, oszcillációs tagot tartalmazó Schrödinger – Maxwell rendszernek végtelen sok (izometriákra invariáns) megoldása létezik.

A disszertáció értékelésével kapcsolatban először a témaválasztásról szeretnék írni. A második fejezet témája, az interpolációs egyenlőtlenségek egyik kiindulópontja T. Aubin ún. AB -programja, amelyet 1976-ban fogalmazott meg, és abban azt a kérdést vetette föl, hogy egy n -dimenziós Riemann-sokaságon felírt (AB) interpolációs egyenlőtlenségben levő A, B nemnegatív számoknak mi az optimális értéke. Ezzel kapcsolatban folyamatosan figyelemre méltó eredményeket értek el, legutóbb 2014-ben L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, illetve 2004-ben és 2005-ben M.P. do Cosmo, C. Xia és L. Ni. A vizsgálatok során kiderült, hogy a szóban forgó egyenlőtlenség lényegesen függ a Riemann-sokaság görbületétől, ezt a szerző későbbi kutatásai továbbfejlesztették.

A 3. fejezet témájával, a bizonytalansági elvekkel kapcsolatban az utóbbi időben többek között S. Filippas, A. Tertikas, G. Barbitis 2002-ben és 2004-ben, W. Erb, I. Kombe és M. Özaydin 2009-ben és 2013-ban, továbbá N. Ghoussoub és A. Moradifam 2011-ben végzett kutatásokat.

Az értekezés 4. és 5. fejezetében tárgyalt nemlineáris elliptikus parciális differenciálegyenleteket görbült tereken szintén számos matematikus vizsgált. A probléma előzményei az E. Hebey Által 1999-ben tárgyalt Yamabe-feladat és a G. Perelman által igazolt Poincaré-sejtés. Ebben a témában értek el kiváló eredményeket L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré 2014-ben, J. Lott és G. Villani 2009-ben, továbbá K.T. Sturm 2006-ban.

A fentiek alapján megállapítható, hogy az értekezés témája aktuális és igen fontos mind a matematikán, mind a fizikán belüli alkalmazások szempontjából. A szerző a szóban forgó területen alapvető haladást ért el, kimutatva a pozitívan és negatívan görbült tereken tapasztalható lényeges eltéréseket, eredményeit rangos folyóiratokban és egy monográfiában közölte. Az értekezés az utóbbi nyolc évben közölt 19 cikkben és egy monográfiában leírt eredményeket tartalmazza. Ezek közül 12 társszerzős, 8 önálló dolgozat. Az értekezésben szereplő eredmények a funkcionálanalízis, a kritikus pont elmélet, a differenciálgeometria és a parciális differenciálegyenletek területén egyaránt jelentősek, és igazolják a szerző jártasságát és alapos tájékozottságát a fenti tudományágakban, mivel képes a korábbi eredmények és eszközök alkotó alkalmazására. *Kérdéseim:*

1. A 2. és 3. fejezet mely eredményei lehetnek még alkalmazhatók a 4. és 5. fejezetben tárgyalt elliptikus parciális differenciálegyenletek tanulmányozásában?

2. Van-e lehetőség a fentiek alapján kvázilineáris (p -Laplace típusú) egyenletek megoldásai számának vizsgálatára?

A disszertáció nemcsak tartalmi, hanem formai szempontból is kimagasló: szerkesztése, megfogalmazása tömör, de világos, pontos, jól áttekinthető. Külön kiemelném, hogy mind az értekezés Bevezetésében, mind a Tézisekben a szerző először világosan, röviden összefoglalja az előzményeket és saját eredményeinek lényegét, majd utána a Tézisekben részletesen megfogalmazza a tételeket. Ez nagyban segíti az értekezés elolvasását és megértését.

Ezért egyértelműen javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és az MTA doktora fokozat odaítélését.

Budapest, 2019. január 7.

Simon László