

Véges lineáris csoportok kombinatorikai vonatkozásai

Doktori értekezés tézisei

Maróti Attila

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Budapest

`maroti.attila@renyi.mta.hu`

2017

1. Bevezető

A csoportelmélet a matematika egyik legidősebb ága, amelyet mára már nemcsak a matematikában, hanem a fizikában és a kémiában is alkalmaznak. A tizenkilencedik század elején Abel és Galois munkáiban a csoport matematikai objektumokon ható permutációk összessége volt. Később geometriai objektumok transzformáció csoportjait kezdték el vizsgálni. Végül Lie folytonos csoportokról szóló elmélete helyezett további hangsúlyt a csoportok elméletére. 1911-ben jelent meg Burnside a véges csoportokról szóló nagyhatású könyve. Ebben már a véges csoportok reprezentáció elméletéről is szó esett. Ennek megalapozását Burnside Frobenius-szal együtt kezdte meg, majd Brauer fejezte be.

A véges egyszerű csoportok klasszifikációs tétele a huszadik századi matematika egyik legmélyebb eredménye. Ennek bizonyítását 1983-ban jelentették be, de csak 2004-ben fejezték be. A tételnek nemcsak, hogy rengeteg érdekes következménye van, hanem különös módon számos olyan állítás létezik, amelynek csak azt használó bizonyítása ismert. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy Brauert megkérdezték egyszer, amikor már látható volt, hogy a klasszifikációs tétel bizonyítást nyer, hogy vajon ez-e a vége a véges csoportok elméletének. Azt válaszolta, hogy ez csak a kezdet. Valóban, az utóbbi évtizedben számos mély reprezentáció elméleti sejtést vezettek vissza egyszerű csoportokról szóló kérdésekre. Mind a mai napig mind a csoportelmélet, mind a reprezentáció elmélet a matematika legaktívabban kutatott területei közé tartozik.

A véges csoportok elméletében gyakran fordul elő, hogy egy csoport hat egy vektortéren (vagy egy Abel normálosztón). Ebben az esetben reprezentáció elméleti eszközökkel gyakran számos kérdés megválaszolható. Ebben a dolgozatban olyan csoportelméleti kérdéseket vizsgálunk, ahol a probléma nehézsége lineáris csoportokról szól és a klasszifikációs tétel következményeinek használata aligha mellőzhető. Ebből kifolyólag a dolgozat témája a véges csoportok elméletének és a véges csoportok reprezentáció elméletének határterü-

letén helyezkedik el.

A dolgozatra indirekten, de lényeges módon Brauer gyakorolt hatást. Brauer problémái közül ebben a munkában háromról esik szó. A motivációnk és az eredményeink viszont alapvetően csoportelméleti jellegűek.

A témakörben talán a legalapvetőbb invariáns a véges csoport konjugáltsági osztályainak a száma, mivel az a csoport komplex irreducibilis karaktereinek a számával is megegyezik. Brauer egy problémájával kapcsolatosan erre az invariánsra adunk alsó korlátot egyedül a csoport rendjének ismeretében. A problémának van egy moduláris változata is, amelynek kapcsán megmutatjuk (Pyber egy kérdésére reagálva), hogy egy véges csoport konjugáltsági osztályainak száma alulról becsülhető egyedül a csoport rendjének prím osztójának segítségével. McKay egy sejtésének szellemében ezt az eredményt általánosítjuk a véges csoport bizonyos karakterei számának alsó becslésére. Ezek után áttérünk a véges csoport konjugáltsági osztályainak számára vonatkozó felső becslések kérdéskörére. Itt Brauer egy másik problémája játszik fontos szerepet, Brauer $k(B)$ problémája. Az ötödik fejezetben felső korlátot adunk egy permutáció-csoport konjugáltsági osztályainak számára. A hatodik fejezet támaszkodik a $k(B)$ probléma ismert eseteire. Itt egy permutációelméleti invariánst vizsgálunk (minimális bázis szám) reprezentációelméleti szemszögből. Seress egy tételét általánosítjuk. Folytatva ezt a gondolatmenetet a hetedik fejezetben Pálffy, Wolf, valamint Pyber tételei nyomán becsüljük véges csoportok bizonyos kompozíció faktorai rendjeinek szorzatát. A nyolcadik fejezetben ezeket a gondolatokat alkalmazzuk primitív permutáció-csoportok faktorai méretének becslésére. A kérdéskörnek Galois elméleti motivációja is van. A kilencedik fejezet Brauer $k(B)$ problémáját érinti és itt fixpontterek átlag dimenzióját becsüljük. Megoldjuk Neumann egy 1966-ból származó problémáját. Az utolsó fejezetben ezt az eredményt, valamint a hetedik fejezet utolsó tételét alkalmazzuk Wiegold egy híres sejtésével kapcsolatosan, ahol az eddigi legerősebb eredményt kapjuk.

2. Brauer harmadik problémája

Jelölje $k(G)$ a G véges csoport konjugáltsági osztályainak számát. Ez az invariáns a G csoport komplex irreducibilis karaktereinek a száma is egyben.

1903-ban Landau [27] megválaszolta Frobenius egy kérdését. Bebizonyította, hogy adott k pozitív egész esetén legfeljebb csak véges sok olyan véges csoport van, amelynek k konjugáltsági osztálya van. A gondolatmenetből az következik, hogy minden G nemtriviális véges csoport esetén $k(G) > \log_2 \log_2 |G|$. Brauer [3] nevezetes problémáinak listáján a harmadik úgy szól, hogy adjunk ennél lényegesen jobb alsó korlátot $k(G)$ -re csupán a G csoport rendje ismeretében.

Majdnem egy évszázad részeredményei után Pyber [39] bebizonyította, hogy létezik olyan $\epsilon > 0$ konstans, hogy minden 3-nál nagyobb n rendű véges csoportnak legalább $\epsilon \cdot (\log_2 n / (\log_2 \log_2 n))^8$ konjugáltsági osztálya van. 2011-ben Keller [21] finomított Pyber bizonyításán és az előbbi korlátban a 8-at 7-re javította.

Ezt a gondolatmenetet folytatva az első tézis a következő.

1. Tétel (Baumeister, Maróti, Tong-Viet; [2]). *Minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy minden $n \geq 4$ rendű véges csoport konjugáltsági osztályainak száma legalább $\delta \cdot (\log_2 n / (\log_2 \log_2 n))^{3+\epsilon}$.*

Megjegyezzük, hogy minden páratlan p prím esetén Kovács és Leedham-Green [23] olyan p^p rendű P csoportot konstruált, amelyre $k(P) = (p^3 - p^2 + p + 1)/2$. Tehát végtelen sok olyan G véges csoport létezik, amelyre $k(G) < (\log_2 |G|)^3$.

3. Egy másik alsó korlát $k(G)$ -re

Legyen G egy véges csoport és legyen p egy prím, ami osztja G rendjét. Pyber észrevette, hogy Brauer egy eredményéből következik, hogy ha p^2 nem osztja G rendjét, akkor $k(G) \geq 2\sqrt{p-1}$. Ennek kapcsán Pyber néhány kérdést vetett fel arról, hogy hogyan

lehetne $k(G)$ -t p függvényében alulról becsülni. Ez és Brauer huszonegyedik problémája (lásd a következő fejezetet) motiválta Héthelyit és Külshammert (lásd [17], [18]), hogy G feloldható csoport esetén különböző explicit korlátokat adjanak G konjugátsági osztályainak számára. Bebizonyították [17] például azt, hogy ha G egy feloldható csoport és p a G rendjének egy prím osztója, akkor $k(G) \geq 2\sqrt{p-1}$.

Ezután ezt az egyenlőtlenséget tetszőleges G csoport esetén kezdték el vizsgálni. Malle [30] bebizonyította, hogy amennyiben G egy minimális ellenpélda a $k(G) \geq 2\sqrt{p-1}$ egyenlőtlenségre és p osztja G rendjét, akkor G egy olyan HV szemidirekt szorzat, ahol V egy olyan irreducibilis, hű H -modulus egy olyan H véges csoportra, amelyre $(|H|, |V|) = 1$ és p osztja V rendjét. Malle azt is megmutatta, hogy H nem lehet majdnem kváziegyszerű csoport. Ezeket az eredményeket Keller [20] felhasználta és bebizonyította, hogy létezik olyan univerzális c_0 konstans, hogy amennyiben $p > c_0$ és p osztja egy tetszőleges G véges csoport rendjét, akkor G konjugátsági osztályainak száma legalább $2\sqrt{p-1}$. Később Héthelyi, Horváth, Keller és Maróti [16] megmutatták, hogy legfeljebb véges sok G nem feloldható, p -feloldható véges csoporttól eltekintve $k(G) \geq 2\sqrt{p-1}$ teljesül, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\sqrt{p-1}$ egész és $G = C_p \rtimes C_{\sqrt{p-1}}$, ahol $C_G(C_p) = C_p$. Mivel Keller bizonyításából c_0 értékére nem lehetett következtetni, kvantitatív információ az előző eredménnyel kapcsolatosan sem létezett.

2. Tétel (Maróti; [34]). *Ha G egy véges csoport és p a G rendjének egy prím osztója, akkor G konjugátsági osztályainak száma legalább $2\sqrt{p-1}$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\sqrt{p-1}$ egész, $G = C_p \rtimes C_{\sqrt{p-1}}$ és $C_G(C_p) = C_p$.*

Lehet-e a 2. Tételben szereplő korlátot javítani abban az esetben, ha p egy 1-nél magasabb hatványa osztja G rendjét? Kovács és Leedham-Green [23] az előző fejezet végén szereplő példája határt szab az ilyen spekulációknak. Viszont Héthelyi és Külshammer [18] azt bizonyította, hogy ha p^2 osztja egy G feloldható csoport rendjét, akkor G konjugátsági osztályainak a száma legalább $(49p+1)/60$.

4. Brauer és McKay sejtései kapcsán

Brauer fenti, harmadik problémájának moduláris változata Brauer huszonegyedik problémája (lásd [3]) és ez a következőképpen szól. Legyen G egy véges csoport, p egy prím és B a G csoport egy p -blokkja. Jelölje $k(B)$ a G csoport a B blokkhoz tartozó komplex irreducibilis karaktereinek a számát. Adjunk $k(B)$ -re olyan $f(|D|)$ alsó korlátot, ahol D a B blokk egy defekt csoportja és $f(|D|) \rightarrow \infty$, amint $|D| \rightarrow \infty$. Ez a sejtés igaz [25], amennyiben G egy p -feloldható csoport, viszont semmilyen explicit f korlát nem ismert. Megjegyezzük, hogy Héthelyi és Külshammer [17] azt sejtik, hogy tetszőleges véges csoport tetszőleges olyan B p -blokkja esetén, amelyre $k(B) \neq 1$, a $k(B) \geq 2\sqrt{p-1}$ becslés teljesül.

Külshammer és Robinson [26] megmutatták, hogy Brauer előbbi, huszonegyedik problémája következik McKay sejtésének moduláris verziójából. Itt csak McKay eredeti sejtését ismertetjük. Legyen G egy véges csoport és p egy prím. Jelölje $\text{Irr}_{p'}(G)$ a G csoport p -hez relatív prím fokú komplex irreducibilis karaktereinek halmazát. McKay sejtése úgy szól, hogy $|\text{Irr}_{p'}(G)| = |\text{Irr}_{p'}(N_G(P))|$, ahol P a G csoport egy Sylow p -részcsoportja és $N_G(P)$ a P normalizátora G -ben. Ez a sejtés $p = 2$ esetén igaz [32].

A 2. Tétel és annak bizonyítása felhasználásával explicit alsó korlát adható a $|\text{Irr}_{p'}(G)|$ invariánsra tetszőleges G véges csoport esetén. Ez a harmadik tézis.

3. Tétel (Malle, Maróti; [31]). *Legyen G egy véges csoport és p egy prím, amely osztja G rendjét. Ekkor $|\text{Irr}_{p'}(G)| \geq 2\sqrt{p-1}$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül ha $\sqrt{p-1}$ egész és G bármely Sylow p -részcsoportjának normalizátora $C_p \rtimes C_{\sqrt{p-1}}$, ahol $C_G(C_p) = C_p$.*

5. A $k(B)$ sejtés kapcsán

Eddig véges csoport konjugáltsági osztályainak számára vonatkozó alsó korlátokat vizsgáltunk. Azonban az irodalomban a $k(G)$ invariáns

riánsra számos felső korlát is létezik G véges csoport esetén. Ezek az eredmények a reprezentáció elmélet egyik legmélyebb problémájával kapcsolatosak. Brauer [4] $k(B)$ problémája 1959 óta megoldatlan. E szerint ha B egy tetszőleges véges csoport egy p -blokkja, akkor $k(B) \leq |D|$, ahol D a B egy defekt csoportja.

Brauer $k(B)$ sejtése p -feloldható csoportok esetén igaz és ez az úgynevezett $k(GV)$ tétel [42], amely a következőképpen szól. Legyen V egy véges és hű G -modulus, valamely olyan G véges csoport esetén, amelyre $(|G|, |V|) = 1$. Ekkor a GV szemidirekt szorzat konjugáltsági osztályainak $k(GV)$ száma legfeljebb V rendje.

A $k(GV)$ tétel bizonyításában (és azon túl) elengedhetetlenek voltak a permutáció-csoportok konjugáltsági osztályai számára vonatkozó felső becslések. Kovács és Robinson [24] bebizonyították, hogy ha G egy n -ed fokú permutáció-csoport, akkor $k(G) \leq 5^{n-1}$, továbbá visszavezették az esetleges $k(G) \leq 2^{n-1}$ korlátot arra az esetre, amikor G egy majdnem egyszerű csoport. Ezt az utóbbi egyenlőtlenséget Liebeck és Pyber [28] bizonyította be tetszőleges n -ed fokú G permutáció-csoportra. Kovács és Robinson [24] azt is belátta, hogy $k(G) \leq 3^{(n-1)/2}$, amennyiben G feloldható permutáció-csoport és $n \geq 3$. Később Riese és Schmid [41] $3'$, $5'$ és $7'$ csoportok esetére is belátta az előbbi korlátot ha $n \geq 3$. Végül Maróti [33] bebizonyította, hogy tetszőleges G véges permutáció-csoport esetén $k(G) \leq 3^{(n-1)/2}$, ahol $n \geq 3$ a G fokszáma.

A negyedik tétel a következő.

4. Tétel (Garonzi, Maróti; [9]). *Minden n -ed fokú permutáció-csoportnak, ahol $n \geq 4$, legfeljebb $5^{(n-1)/3}$ konjugáltsági osztálya van.*

Pyber megmutatta, hogy tetszőleges $0 < c < 5^{1/4}$ konstans esetén végtelen sok olyan G tranzitív permutáció-csoport létezik, amelyre $k(G) > c^{n-1}$. Ha egy n -ed fokú G permutáció-csoportra feltételeket teszünk, akkor sokszor exponenciálisnál jobb felső becsléseket lehet adni a $k(G)$ invariánsra. Például [9], ha létezik G -t tartalmazó, de A_n -től és S_n -től különböző primitív permutáció-csoport, akkor $k(G)$

legfeljebb az n partícióinak a száma.

6. A minimális bázis szám

A $k(GV)$ tétel bizonyításának nem várt következménye [15] van a minimális bázis számra vonatkozóan.

Legyen H egy Ω véges halmazon ható permutáció-csoport. Az Ω egy olyan részhalmazát, amely pontonkénti stabilizátora H -ban triviális, a H egy bázisának nevezzük. A H permutáció-csoport bázisainak minimális méretét minimális bázis számnak nevezzük és $b(H)$ -val jelöljük.

Pyber [40] egy sejtése $b(H)$ értékét konstans szorzó erejéig megjelölte abban az esetben, amikor H egy primitív permutáció-csoport. Az első ilyen irányú eredmény Seresstől [44] származik, aki belátta, hogy minden feloldható primitív permutáció-csoport minimális bázis száma legfeljebb 4. Mivel minden feloldható primitív permutáció-csoport affin típusú, Seress eredménye ekvivalens azzal, hogy ha G egy véges feloldható csoport, amely hűen és irreducibilisen hat egy V vektortéren, akkor G (mint V -n ható permutáció-csoport) minimális $b(G)$ bázis száma legfeljebb 3.

Az irodalomban számos eredmény található lineáris csoportok minimális bázis számáról. Például Gluck és Magaard [10] bebizonyították, hogy ha G egy olyan részcsoportha a $GL(V)$ teljes lineáris csoportnak, amelyre $(|G|, |V|) = 1$, akkor $b(G) \leq 94$. Ha G -ről még azt is feltesszük, hogy szuperfeloldható vagy páratlan rendű, akkor $b(G) \leq 2$ is teljesül. E utóbbi két állítást Wolf [49] illetve Dolfi [7] bizonyította. Később egy közös általánosítása született ezen eredményeknek, amelyet egymástól függetlenül igazolt Dolfi [8], Vdovin [46], valamint Halasi és Podoski. Ha $G \leq GL(V)$ egy olyan feloldható véges csoport, amelyre $(|G|, |V|) = 1$, akkor $b(G) \leq 2$. Végül Halasi és Podoski [15] lényegesen javított az iménti eredményen megmutatva, hogy G -ről nem kell feltenni azt, hogy feloldható; ha $G \leq GL(V)$ és $(|G|, |V|) = 1$, akkor G minimális bázis száma legfel-

jebb 2.

Az ötödik tézis általánosítja Seress [44] fenti eredményét és kiterjeszti Halasi és Podoski [15] tételét.

5. Tétel (Halasi, Maróti; [14]). *Legyen V egy q elemű, p karakterisztikájú test felett definiált véges vektortér. Legyen $G \leq GL(V)$ egy olyan p -feloldható csoport, amely teljesen reducibilisen hat V -n. Ekkor $b(G) \leq 3$. Továbbá ha $q \geq 5$, akkor $b(G) \leq 2$.*

Megjegyezzük, hogy az 5. Tételben szereplő korlátok minden q esetén élesek. A tételt alkalmaztuk [6] véges csoport komplex irreducibilis karaktereinek legnagyobb fokának becslésére.

7. Pálffy és Wolf tételei kapcsán

Az előző fejezetben ismertetett Seress eredmény egy másik motivációja Pálffy és Wolf egy tétele volt. 1982-ben egymástól függetlenül Pálffy [38] és Wolf [48] megmutatták, hogy minden n -ed fokú feloldható primitív permutáció-csoport legfeljebb $24^{-1/3}n^{1+c_1}$ elemszámú, ahol $c_1 = \log_9(48 \cdot 24^{1/3})$. Ez a korlát végtelen sok n esetén éles. E tétel azzal ekvivalens, hogy minden olyan feloldható részcsoportja $GL(V)$ -nek, amely teljesen reducibilisen hat a V véges vektortéren, legfeljebb $24^{-1/3}|V|^{c_1}$ rendű.

Az 5. Tétel bizonyításával párhuzamosan a következő általánosabb tétel adódik, ami már támaszkodik a véges egyszerű csoportok klasszifikációs tételére.

6. Tétel (Halasi, Maróti; [14]). *Legyen V egy véges vektortér egy p karakterisztikájú test felett. Ha $G \leq GL(V)$ egy p -feloldható csoport, amely teljesen reducibilisen hat V -n, akkor $|G| \leq 24^{-1/3}|V|^{c_1}$, ahol c_1 a fenti konstans.*

Egy X véges csoport és p prím esetén jelölje X egy főláncának Abel, nem Abel, p -feloldható, centrális, illetve nem centrális főfaktorai

rendjeinek szorzatát rendre $a(X)$, $b(X)$, $a_p(X)$, $c(X)$, illetve $\text{ncf}(X)$. Ha valamelyik típusú faktor nem létezik, akkor legyen a szóban forgó függvény értéke 1. A Jordan-Hölder tétel értelmében ezek az invariánsok függetlenek a főlánc választásától.

Pyber [40] egy eredménye szerint ha G egy n -ed fokú primitív permutáció-csoport, akkor $a(G) \leq 24^{-1/3} n^{1+c_1}$. A 6. Tétel kapcsán felmerül, hogy ez a korlát esetleg az $a_p(G)$ invariánst is felülről becsüli, ahol p egy bizonyos prím.

A 7. tézis a következő.

7. Tétel (Guralnick, Maróti, Pyber; [13]). *Legyen $G \leq S_n$ egy primitív permutáció-csoport és legyen p az n egy prím osztója. Ekkor $a_p(G) | \text{Out}(G) | \leq 24^{-1/3} n^{1+c_1}$, ahol c_1 a fenti konstans.*

A 7. Tételben található $\text{Out}(G)$ csoport a 11. Tétel bizonyítása során tűnt fel. Itt csak arra mutatunk rá, hogy ha A egy G csoport normalizátora S_n -ben, akkor $b(A/G) \leq (\log_2 n)^{2 \log_2 \log_2 n}$ ha G primitív (és $b(A/G) \leq n^{\log_2 n}$ ha G tranzitív). Az utóbbi korlátot használjuk a következő fejezetben.

Wolf [48] bebizonyította, hogy ha G egy nilpotens csoport, amely hűen és teljesen reducibilisen hat egy V véges vektortéren, akkor $|G| \leq |V|^{c_2}/2$, ahol $c_2 = \log_9 32$.

A 8. Tézis ezt az eredményt általánosítja.

8. Tétel (Guralnick, Maróti, Pyber; [13]). *Ha $G \leq S_n$ egy primitív permutáció-csoport, akkor $c(G) \leq n^{c_2}/2$, ahol c_2 a fenti konstans.*

Végezetül az $\text{ncf}(G)$ invariánst vizsgáljuk, de ebben az esetben G nem permutáció-csoport, hanem egy tetszőleges véges csoport. A 9. Tétel kimondásához szükségünk van a G csoport $F(G)$ Fitting részcsoporthára. Ez triviálisan hat G minden főfaktorán. Továbbá jelölje a G csoport egy g elemének konjugáltsági osztályát $\text{cl}_G(g)$.

9. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy véges csoport.*

Ekkor

$$\text{ncf}(G) \leq \left(\prod_{g \in G} |\text{cl}_G(g)| \right)^{p/((p-1)|G|)},$$

ahol p a $G/F(G)$ csoport rendjének a legkisebb prím osztója (ha ilyen van).

8. Permutáció-csoportok faktorairól

Aschbacher és Guralnick [1] bebizonyították, hogy ha A egy véges permutáció-csoport, amelynek foka n , akkor az A' kommutátor csoport indexe A -ban legfeljebb $3^{n/3}$. Továbbá, ha A primitív, akkor $|A : A'| \leq n$. Ezzel kapcsolatban és Galois elméleti indíttatásból merült fel az a kérdés, hogy mi mondható $|A : G|$ -ről abban az esetben mikor G és A olyan részcsoporthai S_n -nek, ahol G normális A -ban. Galois elméleti szempontból természetes feltenni, hogy G tranzitív. Ellenkező esetben e fejezet eredményei sokkal gyengébbek.

A 10. Tételben szimplektikus csoportok, teljes ortogonális csoportok, az utóbbiak 2 indexű részcsoporthai, valamint szemilineáris csoportok jelennek meg.

10. Tétel (Guralnick, Maróti, Pyber; [13]). *Legyenek G és A olyan n -ed fokú permutáció-csoportok, amelyekre $G \triangleleft A$ és G primitív. Ekkor $|A/G| < n$, kivéve ha G egy affin primitív permutáció-csoport és az $(n, A/G)$ pár $(3^4, \text{O}_4^-(2))$, $(5^4, \text{Sp}_4(2))$, $(3^8, \text{O}_6^-(2))$, $(3^8, \text{SO}_6^-(2))$, $(3^8, \text{O}_6^+(2))$, $(3^8, \text{SO}_6^+(2))$, $(5^8, \text{Sp}_6(2))$, $(3^{16}, \text{O}_8^-(2))$, $(3^{16}, \text{SO}_8^-(2))$, $(3^{16}, \text{O}_8^+(2))$ vagy $(3^{16}, \text{SO}_8^+(2))$. Továbbá ha A/G nem szekciója $\Gamma_{\text{L}_1}(q)$ -nek, amennyiben $n = q$ prím hatvány, akkor minden $n \geq 2^{14000}$ esetén $|A/G| < n^{1/2} \log_2 n$ teljesül.*

A 10. Tételben az $n - 1$ korlát akkor éles, amikor n prím és G egy ciklikus csoport. Vegyük észre, hogy minden p prím esetén végtelen sok olyan r prím létezik, hogy az $np = qp = r^{p-1}p$ rendű $G \leq \text{AGL}_1(q)$ primitív permutáció-csoportra az $N_{S_n}(G)/G$ faktorcsoporthoz

mérete $(n-1)(p-1)/p$. A 10. Tételben a $n^{1/2} \log n$ korlát egy $\log_9 8$ és 1 közötti konstans szorzótól eltekintve aszimptotikusan éles.

A 11. Tézis egy G primitív permutáció-csoport $\text{Out}(G)$ külső automorfizmus csoportjának rendjét vizsgálja.

11. Tétel (Guralnick, Maróti, Pyber; [13]). *Legyen G egy primitív permutáció-csoport S_n -ben. Ekkor $|\text{Out}(G)| < n$, kivéve ha $|\text{Out}(G)| = |N_{S_n}(G)/G| \geq n$ (lásd a 10. Tételt a hét kivétellel) vagy $n = q^2$, $q = 2^e$, $e > 1$ és $G = (C_2)^{2e} : \text{SL}_2(q)$.*

Megjegyezzük, hogy ha G a 11. Tétel kivételeinek végtelen soroza-
tának egy eleme, akkor $|\text{Out}(G)| < (n \log_2 n)/2$.

Megmutattuk, hogy ha $G \triangleleft A \leq S_n$ tranzitív permutáció csoportok és $n \geq 2$, akkor $a(A/G) \leq 4^{n/\sqrt{\log_2 n}}$. Ebből és a 7. Tétel után írottakból, adódik a következő.

12. Tétel (Guralnick, Maróti, Pyber; [13]). *Ha $G \triangleleft A \leq S_n$ tranzitív permutáció csoportok, akkor $|A : G| \leq 4^{n/\sqrt{\log_2 n}} \cdot n^{\log_2 n}$ minden $n \geq 2$ esetén.*

A 4-től eltekintve a 12. Tételben a korlát éles [40]. Azt is megjegyezzük, hogy egy $c^{n/\sqrt{\log_2 n}}$ típusú korlát már nem fog teljesülni abban az esetben, ha a $G \triangleleft A$ feltételt kicseréljük azzal, hogy G szubnormális A -ban. Valóban, ha A egy Sylow 2-részecsportja S_n -nek, ahol n egy 2-hatvány és G egy reguláris elemi Abel részecsportja A -nak, akkor $|A : G| = 2^n/2n$. A 13. Tézis azt mutatja, hogy létezik exponenciális korlát egy permutáció-csoport tranzitív szubnormális részecsportjának indexére.

13. Tétel (Guralnick, Maróti, Pyber; [13]). *Ha $G \triangleleft\triangleleft A \leq S_n$ tranzitív permutáció csoportok, akkor $|A : G| \leq 3^{n-1}$.*

Érdekes lenne tudni, hogy vajon kicserélhető-e a 13. Tételben a 3^{n-1} -es becslés 2^n -re.

9. Fixpont terek dimenziói

Legyen G egy véges csoport, F egy test és V egy véges dimenziós FG -modulus. A G csoport egy S nemüres részhalmazára legyen

$$\text{avgdim}(S, V) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \dim C_V(s)$$

az S elemei V -n való fixpont terei dimenzióinak számtani közepe. Itt $C_V(s)$ jelöli az s elem V -beli fixpontjainak halmazát. 1966-ban Neumann [36] a DPhil disszertációjában azt a sejtést fogalmazta meg, hogy ha V egy nemtriviális irreducibilis FG -modulus, akkor $\text{avgdim}(G, V) \leq (1/2) \dim V$. Ez a sejtés Neumann és Vaughan-Lee [37] 1977-es cikkében is szerepel, majd 1982-ben bekerült a Kourovka Notebook-ba [22] mint a 8.5-ös probléma. A problémát Neumann és Vaughan-Lee [37] feloldható G csoport esetén megoldotta, valamint abban az esetben is, mikor $|G|$ invertálható F -ben. Később Segal és Shalev [43] megmutatta, hogy tetszőleges G véges csoport esetén $\text{avgdim}(G, V) \leq (3/4) \dim V$ teljesül. Ezt Isaacs, Keller, Meier-frankenfeld és Moretó [19] a $\text{avgdim}(G, V) \leq ((p+1)/2p) \dim V$ korlátra javította, ahol p a G rendjének legkisebb prím osztója.

A 14. Tézis a következő.

14. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy véges csoport, F egy test és V egy véges dimenziós FG -modulus. Legyen N a G egy olyan normális részcsoportja, amelynek nincsen triviális kompozíció faktora V -n. Ekkor $\text{avgdim}(Ng, V) \leq (1/p) \dim V$ minden $g \in G$ esetén, ahol p a legkisebb prím osztója a G rendjének.*

Azon túl, hogy a 14. Tétel megoldja Neumann és Vaughan-Lee problémáját, azt több szempontból is általánosítja és javítja. Először is, V -nek nem kell irreducibilis G -modulusnak lennie; elegendő, hogy a G -modulusnak ne legyen triviális kompozíció faktora. Másodszorra, a $(1/2) \dim V$ korlátot nemcsak a $\text{avgdim}(G, V)$ invariánsra bizonyítjuk, hanem $\text{avgdim}(S, V)$ -re is, ahol S egy tetszőleges mellékosztálya a G csoport egy bizonyos tulajdonságú nor-

málosztójának. Végül a 14. Tétel egy élesebb korlátot tartalmaz, nevezetesen $(1/p) \dim V$ -t, ahol p a G rendjének legkisebb prím osztója.

A 15. Tétel megmondja, hogy a 14. Tétel korlátja milyen esetben éles.

15. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy véges csoport, F egy test, és V egy olyan véges dimenziós FG -modulus, amelynek nincsen triviális kompozíció faktora. Legyen p a G rendjének legkisebb prím osztója. Ekkor $\text{avgdim}(G, V) = (1/p) \dim V$ akkor és csak akkor teljesül, ha $G/C_G(V)$ exponense p .*

Neumann [36] a DPhil disszertációjában megmutatta, hogy ha V egy nemtriviális irreducibilis FG -modulus valamely F test és G feloldható véges csoport esetén, akkor létezik a G -ben olyan elem, amelynek a V -beli fixpont tere kicsi. Pontosabban azt bizonyította, hogy létezik olyan $g \in G$, amelyre $\dim C_V(g) \leq (7/18) \dim V$. Továbbá Neumann azt sejtette, hogy létezik $g \in G$, amelyre $\dim C_V(g)$ legfeljebb $(1/3) \dim V$. Segal és Shalev [43] bebizonyította, hogy tetszőleges G véges csoport esetén létezik olyan $g \in G$, amelyre $\dim C_V(g) \leq (1/2) \dim V$ teljesül. Később, gyengébb feltételek mellett (V olyan teljesen reducibilis FG -modulus, amelyre $C_V(G) = 0$) Isaacs, Keller, Meierfrankenfeld és Moretó [19] megmutatták, hogy létezik olyan $g \in G$, amelyre $\dim C_V(g) \leq (1/p) \dim(V)$, ahol p a G rendjének legkisebb prím osztója. Még gyengébb feltételek mellett javítjuk az előbbi állítást.

16. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy véges csoport, F egy test, és V egy véges dimenziós FG -modulus. Legyen N egy olyan normális részcsoportja G -nek, hogy V -nek, mint FN -modulusnak, nincsen triviális kompozíció faktora. Legyen x a G egy eleme és legyen p a G rendjének legkisebb prím osztója. Ekkor létezik olyan $g \in Nx$, hogy $\dim C_V(g) \leq (1/p) \dim V$ és létezik olyan $g \in N$, hogy $\dim C_V(g) < (1/p) \dim V$.*

Megjegyezzük, hogy a 16. Tétel következik a 14. Tételből csupán

abból, hogy $\dim C_V(1) = \dim V$. Megjegyezzük azt is, hogy ha a 16. Tételben V egy irreducibilis és hű modulus, akkor N egy tetszőleges, nemtriviális normálosztója lehet G -nek, mivel N egyetlen nem nulla vektorát sem fixálja V -nek. Neumann fentebb említett sejtését Guralnick és Malle [11] igazolta; ha V egy nemtriviális irreducibilis FG -modulus valamely G véges csoport és F test esetén, akkor létezik $g \in G$, amelyre $\dim C_V(g) \leq (1/3) \dim V$ teljesül.

10. BFC csoportok

Egy csoportot BFC csoportnak nevezzük, ha minden konjugátsági osztálya véges elemszámú és ezek korlátos méretűek. Egy G csoportot n -BFC csoportnak nevezzük, ha G BFC csoport és G konjugátsági osztályai méreteinek maximuma n . Neumann [35] egyik felfedezése az volt, hogy minden G BFC csoport G' kommutátor részcsoportha véges. Számos matematikus próbálta a BFC csoportok kommutátor részcsoporthainak rendjét felülről becsülni.

Nem sokkal Neumann imént említett felfedezése után Wiegold [47] adott egy korlátot G' rendjére abban az esetben, amikor G egy n -BFC csoport, és általában azt sejtette, hogy $|G'| \leq n^{(1/2)(1+\log_2 n)}$. Később Macdonald [29] megmutatta, hogy $|G'| \leq n^{6n(\log_2 n)^3}$, majd Vaughan-Lee [45] bebizonyította Wiegold sejtését abban az esetben, amikor a csoport nilpotens. Feloldható G csoportok esetén az eddigi legélesebb korlátot Neumann és Vaughan-Lee [37] igazolta és ez $|G'| \leq n^{(1/2)(5+\log_2 n)}$. Ugyanebben a cikkben az is szerepel, hogy ha G egy tetszőleges n -BFC csoport, akkor $|G'| \leq n^{(1/2)(3+5\log_2 n)}$. A véges csoportok klasszifikációs tételének segítségével Cartwright [5] az iménti korlátot a $|G'| \leq n^{(1/2)(41+\log_2 n)}$ becslésre javította. Ezt Segal és Shalev [43] tovább élesítette azzal, hogy belátták, hogy $|G'| \leq n^{(1/2)(13+\log_2 n)}$, ahol G egy n -BFC csoport.

A 9. Tétel segítségével be lehet látni, hogy amennyiben G egy n -BFC csoport, akkor $\text{ncf}(G) < n^2$. Ez a [37] cikk A. Sejtését igazolja. Ha ezt az állítást alkalmazzuk a [43] cikk 511. oldalán, akkor

az eddigi legélesebb általános becslését kapjuk az n -BFC csoportok kommutátor részcsoportjainak rendjére vonatkozóan.

17. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy n -BFC csoport valamilyen $n > 1$ esetén. Ekkor $|G'| < n^{(1/2)(7+\log_2 n)}$.*

Segal és Shalev [43] megmutatták, hogy ha G egy olyan n -BFC csoport, amelynek nincsen nem triviális Abel normálosztója, akkor $|G| < n^4$. A 18. Tétel ezt az eredményt javítja.

18. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy n -BFC csoport valamely $n > 1$ esetén. Ha a G csoport $F(G)$ Fitting részcsoportja véges, akkor $|G| < n^2 k(F(G))$. Speciálisan, ha G -nek nincsen nem triviális Abel normálosztója, akkor $|G| < n^2$.*

Az utolsó tézis olyan n -BFC csoportokról szól, amelyek adott számú elemmel generálhatók. Segal és Shalev [43] bebizonyították, hogy egy ilyen csoport kommutátor részcsoportjának rendje n egy polinomjával becsülhető felülről. Egészen pontosan, megmutatták, hogy $|G'| \leq n^{5d+4}$, amennyiben G egy olyan n -BFC csoport, amely d elemmel generálható.

A 9. Tételt a [43] cikk 515. oldalán alkalmazva, azt kapjuk, hogy $|G'| \leq n^{3d+2}$. Ezzel a [43] cikk 1.5-ös Következményét a következőképpen élesíthetjük.

19. Tétel (Guralnick, Maróti; [12]). *Legyen G egy d elemmel generálható csoport. Ekkor*

$$|\{[x, y] : x, y \in G\}| \geq |G'|^{1/(3d+2)}.$$

Bibliography

- [1] M. Aschbacher és R. M. Guralnick, Abelian quotients of primitive groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), 89–95.
- [2] B. Baumeister, A. Maróti, H. P. Tong-Viet, Finite groups have more conjugacy classes. *Forum Math.* **29** (2017), no. 2, 259–275.
- [3] R. Brauer, Representations of finite groups. 1963 Lectures on Modern Mathematics, Vol. I pp. 133–175 Wiley, New York.
- [4] R. Brauer és W. Feit, On the number of irreducible characters of finite groups in a given block. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **45** (1959) 361–365.
- [5] M. Cartwright, The order of the derived group of a BFC group. *J. London Math. Soc.* **30** (1984), 227–243.
- [6] J. P. Cossey, Z. Halasi, A. Maróti, H. N. Nguyen, On a conjecture of Gluck. *Math. Z.* **279** (2015), no. 3-4, 1067–1080.
- [7] S. Dolfi, Intersections of odd order Hall subgroups. *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005) 61–66.
- [8] S. Dolfi, Large orbits in coprime actions of solvable groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), 135–152.
- [9] M. Garonzi és A. Maróti, On the number of conjugacy classes of a permutation group. *J. Combin. Theory Ser. A* **133** (2015), 251–260.
- [10] D. Gluck és K. Magaard, Base sizes and regular orbits for coprime affine permutation groups. *J. London Math. Soc.* (2) **58** (1998), 603–618.
- [11] R. M. Guralnick és G. Malle, Products of conjugacy classes

Bibliography

- and fixed point spaces. *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), no. 1, 77–121.
- [12] R. M. Guralnick és A. Maróti, Average dimension of fixed point spaces with applications. *Adv. Math.* **226** (2011), no. 1, 298–308.
 - [13] R. M. Guralnick, A. Maróti, L. Pyber, Normalizers of primitive permutation groups. *Adv. Math.* **310** (2017), 1017–1063.
 - [14] Z. Halasi és A. Maróti, The minimal base size for a p -solvable linear group. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), no. 8, 3231–3242.
 - [15] Z. Halasi és K. Podoski, Every coprime linear group admits a base of size two. *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 8, 5857–5887.
 - [16] L. Héthelyi, E. Horváth, T. M. Keller, A. Maróti, Groups with few conjugacy classes. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **54** (2011), no. 2, 423–430.
 - [17] L. Héthelyi és B. Külshammer, On the number of conjugacy classes of a finite solvable group. *Bull. London Math. Soc.* **32** (2000), no. 6, 668–672.
 - [18] L. Héthelyi és B. Külshammer, On the number of conjugacy classes of a finite solvable group. II. *J. Algebra* **270** (2003), no. 2, 660–669.
 - [19] I. M. Isaacs, T. M. Keller, U. Meierfrankenfeld, A. Moretó, Fixed point spaces, primitive character degrees and conjugacy class sizes. *Proc. Am. Math. Soc.* **134** 11, (2006), 3123–3130.
 - [20] T. M. Keller, Lower bounds for the number of conjugacy classes of finite groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **147** (2009), no. 3, 567–577.
 - [21] T. M. Keller, Finite groups have even more conjugacy classes. *Israel J. Math.* **181** (2011), 433–444.
 - [22] The Kourovka Notebook. Unsolved problems in group theory. Sixteenth augmented edition, 2006. Edited by V. D. Mazurov

and E. I. Khukhro.

- [23] L. G. Kovács és C. R. Leedham-Green, Some normally monomial p -groups of maximal class and large derived length. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **37** (1986), no. 145, 49–54.
- [24] L. G. Kovács és G. R. Robinson, On the number of conjugacy classes of a finite group. *J. Algebra* **160** (1993), no. 2, 441–460.
- [25] B. Külshammer, Landau’s theorem for p -blocks of p -solvable groups. *J. Reine Angew. Math.* **404** (1990), 189–191.
- [26] B. Külshammer és G. R. Robinson, Alperin-McKay implies Brauer’s problem 21. *J. Algebra* **180** (1996), no. 1, 208–210.
- [27] E. Landau, Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante. *Math. Ann.* **56** (1903), no. 4, 671–676.
- [28] M. W. Liebeck és L. Pyber, Upper bounds for the number of conjugacy classes of a finite group. *J. Algebra* **198** (1997), no. 2, 538–562.
- [29] I. D. Macdonald, Some explicit bounds in groups with finite derived groups. *Proc. London Math. Soc. (3)* **11** (1961), 23–56.
- [30] G. Malle, Fast-einfache Gruppen mit langen Bahnen in absolut irreduzibler Operation. *J. Algebra* **300** (2006), no. 2, 655–672.
- [31] G. Malle és A. Maróti, On the number of p' -degree characters in a finite group. *Int Math Res Notices* Vol. **2016** No. 20 (2016), 6118–6132.
- [32] G. Malle és B. Späth, Characters of odd degree. *Ann. of Math. (2)* **184** (2016), no. 3, 869–908.
- [33] A. Maróti, Bounding the number of conjugacy classes of a permutation group. *J. Group Theory* **8** (2005), no. 3, 273–289.
- [34] A. Maróti, A lower bound for the number of conjugacy classes of a finite group. *Adv. Math.* **290** (2016), 1062–1078.
- [35] B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets. *J. London Math. Soc.* **29** (1954), 236–248.

Bibliography

- [36] P. M. Neumann, A study of some finite permutation groups. DPhil thesis, Oxford, 1966.
- [37] P. M. Neumann és M. R. Vaughan-Lee, An essay on BFC groups. *Proc. London Math. Soc.* (3) **35** (1977), 213–237.
- [38] P. P. Pálffy, A polynomial bound for the orders of primitive solvable groups. *J. Algebra* **77** (1982), 127–137.
- [39] L. Pyber, Finite groups have many conjugacy classes. *J. London Math. Soc.* (2) **46** (1992), no. 2, 239–249.
- [40] L. Pyber, Asymptotic results for permutation groups, Groups and computation, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 11 (ed. L. Finkelstein and W. M. Kantor) Amer. Math. Soc. Providence RI 1993, pp. 197–219.
- [41] U. Riese és P. Schmid, Real vectors for linear groups and the $k(GV)$ -problem. *J. Algebra* **267** (2003), 725–755.
- [42] P. Schmid, The solution of the $k(GV)$ problem. ICP Advanced Texts in Mathematics, 4. Imperial College Press, London, 2007.
- [43] D. Segal és A. Shalev, On groups with bounded conjugacy classes. *Quart. J. Math. Oxford* **50** (1999), 505–516.
- [44] Á. Seress, The minimal base size of primitive solvable permutation groups. *J. London Math. Soc.* **53** (1996) 243–255.
- [45] M. R. Vaughan-Lee, Breadth and commutator subgroups of p -groups. *J. Algebra* **32** (1974) 278–285.
- [46] E. P. Vdovin, Regular orbits of solvable linear p' -groups. *Sib. Élektron. Mat. Izv.* **4** (2007), 345–360.
- [47] J. Wiegold, Groups with boundedly finite classes of conjugate elements. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **238** (1956), 389–401.
- [48] T. R. Wolf, Solvable and nilpotent subgroups of $GL(n, q^m)$. *Canad. J. Math.* **34** (1982), 1097–1111.
- [49] T. R. Wolf, Large orbits of supersolvable linear groups. *J. Algebra* **215** (1999), 235–247.