

Bírálat

Maróti Attila "Combinatorial aspects of finite linear groups"

(Véges lineáris csoportok kombinatorikai vonatkozásai)

című MTA-doktori értekezéséről

A dolgozat véges csoportok elméletével foglalkozik. A vizsgált kérdések részben reprezentációelméleti indíttatásúak. A megoldásuk használja a véges egyszerű csoportok osztályozásának következményeit, a permutációcsoportok elméletét, és a reprezentációelmélet bizonyos eszközeit.

Az angol nyelvű értekezés bevezető fejezete ismerteti az eredményeket, azok történeti háttérével, valamint a szerző kapcsolódó, de a disszertációba be nem vett tételeivel együtt.

A második fejezet tartalmazza annak bizonyítását, hogy egy a p prímmel osztható rendű véges csoport konjugált osztályainak száma legalább $2\sqrt{p-1}$ (Theorem 1.3). Az egyenlőtlenség éles, és a tétel pontosan leírja az egyenlőséget teljesítő csoportokat. Megjegyezzük, hogy a konjugált osztályok száma mind strukturális, mind reprezentációelméleti szempontból alapvető jellemzője egy véges csoportnak (hiszen ez egyszersmind az irreducibilis komplex reprezentációi száma).

A konjugált osztályok számára vonatkozó felső becsléseket illetően a harmadik fejezet Maróti és Garonzi tételének (Theorem 1.5) bizonyítását tárgyalja: legalább negyedfokú permutációcsoportnak legfeljebb $5^{\frac{n-1}{3}}$ konjugált osztálya van. A bizonyításhoz szükséges annak az önmagában is érdekes állításnak az igazolása, hogy az A_n -től és S_n -től különböző n -edfokú primitív permutációcsoport bármely részcsoportjában a konjugált osztályok száma

legfeljebb az n partícióinak a száma.

Permutációcsoportok konjugált osztályai számára vonatkozó korábbi felső becslések szükségesek voltak Brauer moduláris reprezentációelméleti $k(B)$ -problémájának a p -feloldható csoportok esetében való megoldásához, az úgynevezett $k(GV)$ -tételhez. Ez utóbbi tétel bizonyítása következményekkel jár permutációcsoportok minimális bázisának számára. Permutációcsoport bázisán az alaphalmaz olyan részhalmaza értendő, melynek pontonkénti stabilizátora a csoport egységelemén kívül nem tartalmaz más elemet.

A negyedik fejezet bemutatja Maróti és Halasi eredményét (Theorem 1.6), miszerint egy p karakterisztikájú véges test feletti véges dimenziós teljesen reducibilis hűségű G -modulusban (ahol G p -feloldható csoport) van legfeljebb kételemű (illetve legfeljebb négyelemű alaptest esetén háromelemű) permutációs bázis. A bizonyítás lépéseiből adódik a következő: a véges V vektortéren hűségűen és teljesen reducibilisen ható p -feloldható csoport elemszáma legfeljebb $24^{-1/3}|V|^{c_1}$ ahol $c_1 = \log_9(48 \cdot 24^{1/3})$ (Theorem 1.7).

Az ötödik fejezet Maróti, Guralnick és Pyber cikkén alapul, és fő állítása (Theorem 1.8) az, hogy egy G primitív normálosztó indexe egy n -edfokú permutációcsoportban kisebb, mint n , kivéve ha G egy affin primitív permutációcsoport és az A/G faktorcsoporthoz (valamint n) egy explicit véges listához tartozik. Theorem 1.9 megadja azokat az n -edfokú primitív permutációcsoportokat, amelyek külső automorfizmuscsoportja legalább n elemű. A fejezet tartalmaz felső becsléseket primitív permutációcsoportok abel-féle (illetve nem abel-féle) kompozíciófaktorai rendjei szorzatára.

A GV szemidirekt szorzat (ahol V véges vektortér, amelyen G lineárisan hat) konjugált osztályai számának direkt tanulmányozása természetesen

vezet a G csoport V -beli fixpont-alterei átlagos dimenziójának vizsgálatához. Ez utóbbi kérdéskörrel szól az értekezés utolsó, hatodik fejezete, mely Maróti és Guralnick közös eredményeit mutatja be. Theorem 1.16 szerint a V véges dimenziós vektortér lineáris transzformációi csoportjában az átlagos fixpont-altér dimenzió legfeljebb $\frac{1}{p} \dim(V)$ (ahol p a csoport rendjének legkisebb prímosztója) minden olyan normálosztó szerinti melékosztályra, amelyre nézve V -nek nincs triviális kompozíciófaktora.

Az értekezés a csoportelmélet jelentős érdeklődésre számot tartó problémáival foglalkozik. A bemutatott vizsgálatokat közvetve vagy közvetlenül Richard Brauer klasszikus problémái motiválták: adjunk a csoport rendjétől függő alsó becslést a csoport konjugált osztályai számára (vagy másként a komplex irreducibilis karakterek számára), továbbá becsüljük meg a csoportalgebra egy blokkjához tartozó irreducibilis karakterek számát ($k(B)$ -probléma). Az elért eredmények jelentős előrelépést hoztak a tanulmányozott problémákkal kapcsolatban. A végső állítások látványosak, többségük egyszerűen megfogalmazható. Erre kiemelkedően szép példa a Theorem 1.3, amely korábban ismert speciális esetekről szóló állításokat szabadít meg a megszorító feltételektől, és megmutatja, hogy változatlan numerikus korlátal tetszőleges véges csoportra érvényes a megfelelő állítás. A Theorem 1.5-beli egyenlőtlenség számos korábbi dolgozat becslését javítja, és nincs messze a legjobb lehetséges becsléstől, amint azt a negyedfokú szimmetrikus csoport direkt hatványai mutatják. A Theorem 1.16 bizonyítja Peter Neumann 1966-ban megfogalmazott sejtését, sőt, a sejtést több irányba általánosítja és erősíti.

A disszertációban bemutatott tételek mélyek. A bizonyításuk nagy tár-

gyi tudást, a szakirodalom beható ismeretét és a kérdéskör eszköztárában való alapos jártasságot feltételezett. Egyes eredmények alkalmazzák a véges egyszerű csoportok osztályozását. Néhány esetben a GAP számítógépes algebrai programcsomag használatára is szükség volt. Általában sok redukciós lépésből, nagyszámú eset különböző módszerekkel való kezeléséből, technikai jellegű állítások sorozatából állnak össze az összetett érvelések, melyek igazolják az elegánsan megfogalmazható végeredményt. A dolgozatban szereplő gondolatok jórésze alkalmazást nyert a szerző és mások további munkáiban.

A bevezető fejezet alapos körültekintéssel elhelyezi az irodalomban az értekezésben bizonyítással együtt közölt eredményeket (a következőket emelem ki: Theorem 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.16), vázolja a némileg eltérő jellegű kérdések motivációját és a köztük lévő kapcsolatokat, felidézi a szerző egyéb, szorosan kapcsolódó munkáit, ezáltal jellemző képet ad a munkásságáról.

A doktori munka tudományos eredményeit elegendőnek tartom az MTA doktora cím megszerzéséhez, a nyilvános védés kitűzését javaslom.

Budapest, 2019. január 28-án

Domokos Mátyás
(tudományos tanácsadó)
MTA Rényi Intézet