

Bírálat

Maróti Attila Combinatorial Aspects of Finite Linear Groups

című MTA doktori értekezéséről

Az értekezés témája. A véges csoportok elmélete a 20. századi matematika egyik sikertörténete, ami az 1980-as évek elején a véges egyszerű csoportok osztályozásában csúcsosodott ki. A modern kutatások a véges csoportok kombinatorikus és aszimptotikus viselkedésének vizsgálatait állítják középpontba. Ide vonatkozóan már számos jól dokumentált sejtést és nyitott problémát fogalmaztak meg, amik közül talán a leghíresebbek R. Brauer 1963-as dolgozatában felsoroltak. A kérdések megértése viszonylag elemi ismereteket igényel, de szinte minden, a trivialitáson túlmenő eredmény mély eszközök kreatív használatát igénylik. Maróti Attila disszertációjának eredményei az absztrakt véges csoportok elméletét és a véges csoportok reprezentációelméletét gazdagítják, számos régi probléma és sejtés megoldásával, vagy az eredmények jelentős javításával. A módszerek közül kiemelkedik a kombinatorikus leszámlálások ötletes alkalmazása.

Az értekezés felépítése. A 99 oldalas disszertáció 6 számozott fejezetből áll, egy bevezetésből és öt olyanból, amelyek egy-egy cikk eredményeit foglalják össze. Az első, viszonylag hosszú bevezető fejezetben egységes környezetben, tágabb kontextusba helyezve mutatja be a disszertáció eredményeit, azok előéletét és a kapcsolódási pontokat neves sejtésekhez és nyitott problémákhoz. A bevezetésben sikerült a feldolgozott 5 cikket egy logikai szála fűzni, mindezt jól olvasható módon, a szélesebb matematikus közösség számára is fogyasztható formában. Megjegyezzük, hogy az értekezés téziszfüzete lényegében ennek a fejezetnek a magyar fordítása, kicsit eltérő alfejezet tördeléssel. Ebből következik, hogy a téziszfüzet is azon ritka esetek közé tartozik, amik valóban az eredmények szélesebb körnek való bemutatását adják.

A további 5 fejezet által bemutatott 5 cikk közül egy önálló munka, 4 pedig társszerzőkkel született: Halasi Zoltán és Martino Garonzi fiatal matematikusokkal, illetve R. Guralnickkal és Pyber Lászlóval, a modern csoportelmélet sztárjaival. Három cikk az *Advances in Mathematics* D1 szintű folyóiratban jelent meg. Az eredményeket és a használt módszereket megnézve minden esetben kijelenthető, hogy Maróti Attila a társszerzőkkel egyenrangú szerepet töltött be a cikkek megszületésében.

A 2. fejezet egy véges G csoport konjugáltsági osztályainak $k(G)$ számára ad alsó becsléseket. A kérdésfeltevés nagyon régi, a Brauer-féle listában a 3. probléma fogalmazza meg úgy, hogy $k(G)$ -t becsüljük alulról G rendjének függvényében. Ezt fogalmazza át Pyber László egy észrevétele, miszerint bizonyos esetekben $k(G) \geq 2\sqrt{p} - 1$, hol p a G rendjének prímosztója. Az 1.3 tételben Maróti bebizonyítja, hogy minden G véges csoportra és G minden p prímosztójára $k(G) \geq 2\sqrt{p} - 1$ teljesül, valamint az egyenlőség esetét teljesen karakterizálja. A feladat viszonylag egyszerűen redukálható lineáris csoportokra az alábbi értelemben: Legyen F p karakterisztikájú véges test, ahol p nem osztja G rendjét. Legyen V irreducibilis, hű FG -modulus és jelölje $n(G, V)$ a G -pályák számát V -ben. Ekkor teljesül $k(G) + n(G, V) - 1 \geq 2\sqrt{p} - 1$. A bizonyítás a moduláris reprezentációkra és a véges lineáris csoportokhoz kapcsolódó finom becslések szövetéből áll össze. A

disszertációban nem szerepel, de érdemes megemlíteni, hogy az 1.3 tételt felhasználva Malle és Maróti becslést adtak a p -hez relatív prím fokú komplex irreducibilis karakterek $\text{Irr}_{p'}(G)$ számára.

A 3. fejezetben a konjugáltsági osztályok $k(G)$ számára adandó felső becsléseket vizsgálja a jelölt. Ez a kérdés szorosan összefügg Brauer $k(B)$ -problémájával, illetve speciális esetben a $k(GV)$ -problémával. Ez utóbbit Nagao és Glück vezették be, és a következőt mondja ki: Legyen V véges hű FG -modulus valamely F véges testre és véges G csoportra. Ekkor $k(GV) \leq |V|$, ha $|G|$ és $|F|$ relatív prímek. A nem relatív prím $k(GV)$ -probléma kezelésében játszanak fontos szerepet a $k(G)$ -re adott n -től függő felső becslések, ahol G n fokú permutációcsoport. A fejezet fő eredménye az 1.5 tétel, ami szerint $n \geq 4$ esetén $k(G) \geq 5^{(n-1)/3}$. Az eredmény közel éles, amint azt Pyber László konstrukciói mutatják: Bármely $0 < c < 5^{1/4}$ konstanshoz végtelen sok olyan n fokú tranzitív G permutációcsoport van, amire $k(G) > c^{n-1}$. A bizonyításban lényeges szerepet kap az n egész partícióinak $p(n)$ száma, ami egyben az S_n szimmetrikus csoport konjugáltsági osztályainak is száma. A 3.4 tétel kimondja, hogy ha G n fokú primitív permutációcsoport és nem S_n vagy A_n , akkor $k(G) \leq p(n)$. Ennek bizonyítása az én szívemhez különösen közel áll, mert elegánsan alkalmazza a GAP komputeralgebra rendszert és a benne tárolt kis fokú primitív csoport könyvtárakat.

A 4. fejezet véges lineáris csoportok bázisméretével foglalkozik. A $H \leq \text{Sym}(\Omega)$ véges permutációcsoport bázisa alatt az Ω olyan részhalmazát értjük, aminek pontonkénti stabilizátora triviális. A H bázisainak minimális méretét H bázisméretének nevezzük és $b(H)$ -val jelöljük. Lineáris csoport esetén beszélhetünk erős bázisról is. Az 1.6 tétel p -feloldható $G \leq GL(V)$ csoport bázisméretére mutatja meg, hogy legfeljebb 2 lehet $q > 4$ esetén. A bizonyítás legnehezebb része a tenzorszorzat hatás esetének vizsgálata.

Az 5. fejezet témája primitív permutációcsoportok normalizátorai. Ez a leghosszabb, és kétségtől a leggazdagabb része a disszertációnak. A kiinduló pont a következő: Legyen A n fokú tranzitív permutációcsoport és G ennek tranzitív normálosztója. Az A/G faktorcsoporthoz bizonyos Galois-csoportnak tekinthetjük, aminek a rendjére szeretnénk felső korlátokat adni. A fejezet egyik fő eredménye az 1.8 tétel, ami szerint primitív G esetén $|A/G| < n$, kivéve $n = 3^4, 5^4, 3^8, 5^8$, illetve 3^{16} eseteket. A korlát éles, ha n prím és G ciklikus. Továbbá az 1.9 tétel szerint primitív G esetén $|\text{Out}(G)| < n$, kivéve hét sporadikus esetet (az előbb felsorol n -ekkel), valamint egy explicit leírt végtelen osztályt. Ebben a fejezetben a jelölt vizsgálja még az előbbi tételek aszimptotikus változatát (1.10 tétel), becsléseket ad különböző kombinatorikus csoportinvariánsokra (1.11-14 tételek) és korlátot ad tranzitív szubnormális G részcsoporthoz az $A \leq S_n$ részcsoporthoz (1.15 tétel). Ezek a becslések mind élesek, ha A primitív és G tranzitív normálosztó A -ban.

Az utolsó, 6. fejezetben a jelölt véges lineáris csoportok elemeinek a fixpont tereit vizsgálja. A fő eredmény az 1.16 tétel: Legyen G véges csoport, F test, és V véges dimenziós FG -modulus, amiben G -nek nincs triviális kompozíciófaktora. Ekkor a G elemeinek fixpont tereinek átlagos dimenziója legfeljebb $(1/p) \dim V$, ahol p a G rendjének legkisebb prímtényezője. Ez megválaszolja Neumann egy 1966-os sejtését, és általánosítja Isaacs, Keller, Meierfrankenfeld és Moretó egy friss eredményét. Az egyenlőség esetét is jellemzi, valamint számos alkalmazást ad.

Kritikai észrevételek. A disszertáció angolja szinte tökéletes, a matematikai nyelvezet

élvezetes, az 1-2 elírást vagy mondatismétlést nem is érdemes listázni. Egy furcsaságot tennék szóvá: A 3.6 tételt megelőző mondatot úgy lehet érteni, hogy a 3.6 tételt felhasználja az 1.3 tétel bizonyításában, ami azért zavaró, mert a 2. fejezetben bebizonyítja a 2.1 tételt, amiből következik az 1.3 tétel. Kritikaként róható még fel, hogy a tézisfüzetben a tételek számozása teljesen eltér a disszertáció számozásától. Továbbá hasznosnak tartottam volna, ha az egyes fejezetek elején külön leírja, hogy melyik cikket dolgozza fel, de szerintem a tételeket is érdemes lett volna még egyszer kimondani.

Összegzés. A benyújtott értekezésben foglalt eredményeket kiemelkedően értékesnek és érdekesnek tartom. A pályázó nagyon mély ismeretekkel rendelkezik a véges csoportok, a reprezentációelmélet és a kombinatorika területén, ezek módszereit nagy szakértelemmel és kreativitással használja. Rendelkezik az MTA doktoraitól elvárható önálló kutatási elképzelésekkel és eredményekkel. Önállóan és szerzőtársaival együttműködve számos évtizedes sejtés és nyitott probléma megoldását adja meg. Egyértelműen megállapítható, hogy Maróti Attila jelentős tudományos eredményekkel gazdagította szakterületét, meghatározó módon járult hozzá annak fejlődéséhez, a kombinatorikus csoportelmélet nemzetközileg elismert vezető kutatói közé tartozik. A nyilvános vita kitűzését indokoltnak tartom, a fokozat odaítélését javaslom.

Kérdések. A 4.1 tétel lényegében a $PGL(2, q)$ és $PGL(3, q)$ csoportok bázisairól szól, és a bizonyítás második felében használja C. Hering tranzitív lineáris csoportokra vonatkozó tételét, ami viszont függ a véges egyszerű csoportok osztályozásától. Másrésztől $PGL(2, q)$ és $PGL(3, q)$ részcsoportjairól sokat tudunk, gondolván az 1905-ös Dickson-tételre, vagy H.H. Mitchell 1909-es cikkére. A kérdésem, hogy a jelölt lát-e esélyt arra, hogy a 4.1 tételt a klasszifikációt nem használva bizonyítsuk?

Szeged, 2019. február 25.

Nagy Gábor Péter