

Opponensi vélemény
Maróti Attila
Combinatorial Aspects of Finite Linear Groups című
Akadémiai doktori disszertációjáról

A dolgozat a véges csoportok kombinatorikai vonatkozásai és a véges csoportok reprezentációelmélete közötti határterületen helyezkedik el.

Itt kívánom megjegyezni, hogy mind az öt, a disszertációban szereplő cikk tartalmilag erősen kötődik R. Brauer által felvetett problémákhoz. Brauer híres harmadik problémája azt kérdezi, hogy adjunk lényegesen jobb alsó korlátot $k(G)$ -re, mint $\log \log |G|$ ahol G véges csoport és $k(G)$ a G konjugált osztályainak száma.

Megjegyzendő, hogy a $\log \log |G|$ becslést már Burnside is tudta és Pyber adott először ennél jobb becslést, majd Keller javított a becslésen, majd Maróti adott jobb értékeket.

Maróti egy társszerzőkkel írt cikkében (mely nem szerepel a disszertációban) a máig ismert legjobb alsó korlátot kapta, nevezetesen:

Tétel

Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $\delta > 0$ szám, úgy, hogy minden véges csoport, amelynek rendje n és $n \geq 4$ legalább $\delta \cdot \left(\frac{\log n}{(\log \log n)^{3+\varepsilon}} \right)$ konjugált osztállyal rendelkezik.

Bauer híres 21. problémájában egy explicit $f(|D|)$ alsó korlát létezését kérdezi, ahol f monoton növvő függvény az egész számokon és G tetszőleges véges csoport, p egy prímosztója $|G|$ -nek és B egy p -blokk, akkor $k(B)$ legalább $f(|D|)$ ($k(B)$ a B -ben irreducibilis karakterek száma, D a B blokk defekt csoportja). Ezt a sejtést p -feloldható csoportokra B. Külshammer oldotta meg. Ebben a dolgozatban a szerző egy explicit (jóllehet gyengébb) alsó becslést ad $k(G)$ -re (nem $k(B)$ -re), de a becslés a p prímet veszi tekintetbe.

Legyen G egy véges csoport és p egy prím szám úgy, hogy p pontos osztója $|G|$ -nek. Pyber észrevette, hogy Brauer egy 1959-es eredményéből következik, hogy bizonyos esetekben alsó korlát adható meg p függvényében $k(G)$ -re. Pyber több kérdést is megfogalmazott $k(G)$ egy lehetséges alsó korlátjára vonatkozóan $|G|$ prímosztói függvényében. A legerősebb ilyen irányú sejtés, hogy

$$k(G) \geq 2\sqrt{p-1}.$$

Több fontos eredmény született ezzel kapcsolatban. Például:

Legyen G feloldható csoport, akkor $k(G) \geq 2\sqrt{p-1}$. Ha $p^2 \mid |G|$ akkor $k(G) \geq \frac{49p+1}{60}$

Malle, Keller, Külshammer több cikkben foglalkoztak ezzel a problémával. Ebben a disszertációban erre a kérdésre végső választ kapunk.

1.3. Tétel

Legyen G véges csoport, p egy tetszőleges prímosztója $|G|$ -nek. Ekkor G -nek legalább $2\sqrt{p-1}$ konjugált osztálya van. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\sqrt{p-1}$ egész szám és $G = C_p \times C_{\sqrt{p-1}}$ és $C_G(C_p) = C_p$

Visszatérve a p -blokkokhoz, Külshammer és Héthelyi azt kérdezték, hogy

$$k(B) \geq 2\sqrt{p-1},$$

ahol B egy pozitív defektű blokk.

Ez a probléma és Brauer 21. problémája szorosan kapcsolódik a híres MacKay sejtéshez:

Legyen p egy prímosztója $|G|$ -nek. Jelölje $\text{Irr}_{p'}(G)$ (G) azon irreducibilis komplex karaktereinek halmazát, amelynek foka relatív prím p -hez. Ekkor igaz-e, hogy $|\text{Irr}_{p'}(G)| = |\text{Irr}_{p'}(N_G(P))|$ ahol $N_G(P)$ G egy P p -Sylow részcsoportjának normalizátora.

Az 1.3. Tétel és bizonyítása a következő alsó korlátot adja $|\text{Irr}_{p'}(G)|$ -re tetszőleges G véges csoportra és tetszőleges p prímosztójára $|G|$ -nek.

1.4. Tétel (Malle, Maróti)

Legyen G véges csoport és p egy prímosztója $|G|$ -nek. Ekkor $|\text{Irr}_{p'}(G)| \geq 2\sqrt{p-1}$.

A másik fontos és sokat vizsgált probléma, hogy $k(G)$ -re felső korlátot adjunk. Ez összefügg a reprezentációelmélet egyik legmélyebb problémájával, nevezetesen a $k(B)$ problémával. R. Brauer 1959-ben a következőt kérdezte:

Ha B egy tetszőleges blokkja egy tetszőleges G véges csoportnak, akkor $k|B| \leq |D|$, ahol D egy defekt csoportja B -nek.

Ismert, hogy

$$k(B) \leq \left(\frac{1}{4}\right)|D|^2 + 1$$

1962-ben Nagao megmutatta, hogy p -feloldható csoportokra a $k(B)$ probléma ekvivalens az úgynevezett $k(GV)$ problémával. Nevezetesen:

Legyen V egy véges hűséges FG modulus, ahol F egy véges test. Legyen GV a G és a V szemidirekt szorzata. Jelölje $k(GV)$ a GV konjugált osztályainak számát. Ekkor igaz-e, hogy $k(GV) \leq |V|$, ahol $|G|$ és $|V|$ relatív prímek.

Ezt a problémát végül sok matematikus együttes erőfeszítéssel 2004-ben megoldotta. A bizonyítás 500 oldal. A problémakörhöz kapcsolódik az a kérdés, hogy adjunk korlátot $k(G)$ -re akkor, amikor G egy permutációcsoport, amelynek foka n .

Kovács és Robinson bebizonyították, hogy

$$k(G) \leq 5^{n-1}$$

Feloldható csoportokra

$$k(G) \leq 3^{(n-1)/2}$$

Maróti bebizonyította, hogy

$$k(G) \leq 3^{\frac{(n-1)}{2}}$$

tetszőleges permutációcsoportra, ha foka > 3 .

Ami a $k(GV)$ problémát illeti, az általános ötlet az, hogy V tartalmaz egy v vektort, úgy, hogy $C_G(v)$ speciális tulajdonsággal rendelkezik, akkor $k(GV) < |V|$ automatikusan teljesül. Az ilyen feltételeket centralizátor kritériumoknak nevezzük. Halassi és Podoski megmutatta, hogy ha G egy véges csoport, ami hűen hat egy V véges vektortéren, úgy, hogy $(|G|, |V|) = 1$, akkor léteznek v és w vektorok V -ben, úgy, hogy $C_G(v) \cap C_G(w) = 1$.

Ezt az eredményt értékelhetjük úgy, mint egy bázis méretére vonatkozó eredményt. Az egyik fő eredmény a bázis számot illetően permutációcsoport esetén Seress eredménye, amely szerint

$$b(H) \leq 4,$$

ha H egy feloldható primitív permutációcsoport és $b(H)$ H minimális bázisszáma.

A következő tétel általánosítja Seress eredményét és kiterjeszti Halasi és Podoski tételét p -feloldható csoportokra.

1.6. Tétel (Halasi, Maróti)

Legyen V egy véges vektortér egy q elemű p karakterisztikájú test fölött. Ha $G \leq GL(V)$ egy p -feloldható csoport, ami teljesen reducibilisen hat V -n, akkor $b(G) \leq 2$ ha $q \geq 4$. Továbbá, ha $q < 4$, akkor $b(G) \leq 3$.

Legyen G egy véges csoport, F egy test, és V egy véges dimenziós FG modulus. Ha a $k(GV)$ -re közvetlenül egy felső korlátot akarunk adni, akkor szükséges tudnunk G orbitjainak számát

a V elemein, ami az orbit számlálási tétel miatt a számtani közepe a G elemeinek fixpont terei méreteinek. Ez motiválja a következő invariáns bevezetését.

Legyen S egy tetszőleges nem üres részhalmaza a G véges csoportnak. Definíáljuk a

$$\text{avgdim}(S, V) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \dim_v(s)$$

azaz az S V -n vett hatásának fixpont tereinek dimenzióinak számtani közepét.

1966-ban P. Neumann azt sejtette, hogy ha V egy irreducibilis nem triviális FG modulus, akkor

$$\text{avgdim}(G, V) \leq \frac{1}{2} \dim V$$

Számos tétel született ebben a témakörben.

A következő tétel nem csak megoldja Neumann sejtését, de általánosítja is azt több vonatkozásban.

1.16. Tétel

Legyen G egy véges csoport, F egy test, V egy véges dimenziós FG modulus. Legyen N egy normális részcsoportha G -nek, amelynek nincs triviális kompozíció faktora V -n. Ekkor

$$\text{avgdim}(N_g, V) \leq \frac{1}{p} \cdot \dim V,$$

minden $g \in G$ -re, ahol p a legkisebb prímosztója $|G|$ -nek.

BFC csoportok

Egy csoportról azt mondjuk, hogy BFC csoport, ha konjugált osztályai véges rendűek és ezek a rendek felülről korlátosak.

Egy csoportról azt mondjuk, hogy n -BFC csoport, ha BFC csoport és ha konjugált osztályainak méreteinek legkisebb felső korlátja n .

B. H. Neumann bebizonyította, hogy egy BFC csoport kommutátor részcsoportha véges rendű.

A disszertációban felső korlátokat kapunk $|G'|$ -re n függvényében, ahol G egy n -BFC csoport.

Két jelölés

Legyen $c(G)$ illetve $ncf(G)$ a G véges csoport centrális illetve nem centrális főfaktorainak rendjének szorzata.

1.22. Tétel (Következmény)

$$ncf(G) \leq \prod_{g \in G} |cl_G(g)|^{\frac{p}{(p-1)|G|}}$$

ahol p a legkisebb prímosztója $|G/F(G)|$ -nek.

1.23. Tétel (Guralnick, Maróti)

Legyen G egy n -BFC csoport, $n > 1$. Ekkor

$$ncf(G) < n^{\frac{p}{p-1}} \leq n^2$$

ahol p a legkisebb prímosztója $|G/F(G)|$ -nek.

1.24. Tétel (Guralnick, Maróti)

Legyen G egy n -BFC csoport, $n > 1$. Ekkor

$$|G'| < n^{\frac{1}{2}(7+\log n)}$$

1.25. Következmény (Guralnick, Maróti)

Legyen egy G csoport, amelynek m kommutátora van, ahol $m \geq 2$ egész szám. Ekkor

$$|G'| < m^{\frac{1}{2}(7+\log m)}$$

Segal és Shalev megmutatták, hogy $|G'| < n^4$, ha G n -BFC csoport, amelynek nincs nem triviális ábel normálosztója. Ezt általánosítja az 1.26. Tétel.

1.26. Tétel (Guralnick, Maróti)

Legyen G egy n -BFC csoport, $n > 1$. Ha $F(G)$ véges, akkor

$$|G| < n^2 k(FG)$$

Speciálisan, ha G -nek nincs nem triviális ábel normálosztója, akkor $|G'| < n^2$.

A következő eredmény olyan n -BFC csoportokra vonatkozik, amelyek egy adott számú generátorral rendelkeznek. Segal és Shalev bebizonyította, hogy $|G'| < n^{5d+4}$, ahol d elem generálja G -t és G egy n -BFC csoport. Ezt a Segal-Shalev eredményt általánosítja a következő eredmény.

1.27. Következmény (Guralnick, Maróti)

Legyen G egy n -BFC csoport, amelyet d elem generál. Ekkor

$$|G'| \leq n^{3d+2}$$

1.28. Következmény (Guralnick, Maróti)

Legyen G d elemmel generált csoport. Ekkor

$$|\{[x, y]; x, y \in G\}| \geq |G'|$$

Összefoglalás, értékelés, ajánlás

A jelölt 5 témakörrel foglalkozik a disszertációjában. Az eredmények öt cikkben jelentek meg. Mind az öt cikk igen neves folyóiratban jelent meg.

Az öt témakör a csoportelmélet klasszikus, régi, hagyományos ágaihoz tartozik, amelyekkel igen neves csoportelmélészek foglalkoztak. Mind az öt, a disszertációban szereplő eredmény jelentős előrehaladás az adott témakörökben és nagy mértékben megjavították az addig ismert eredményeket.

1. témakör:

A csoport konjugáltsági osztályainak számára vonatkozó alsó korlátok a csoport rendjének egy prímosztója, illetve a csoport rendjének függvényében.

Ezt már R. Brauer az 50-es években megfogalmazta. De a probléma gyökere Landau, Burnside, Frobenius munkáira vezethetők vissza a 19. század végére.

2. témakör:

R. Brauer 3. problémájához kapcsolódik, ami a $k(B)$ sejtés. A $k(B)$ sejtés egy fontos rész-esete a $k(GV)$ tétel. Ennek a bizonyításában fontos volt a permutációcsoportok konjugáltság osztályainak számára vonatkozó felső becslések a csoport fokszámának függvényében. Az ilyen típusú exponenciálisak n -ben, ahol n a fokszám. Ilyen típusú becslést adott Kovács, Robinson, majd Liebeck és Pyber, Riese és Schmid. A jelölt azt az Itálános becslést adta, hogy amennyiben G egy n -ed fokú permutációcsoport, ahol $n \geq 3$, akkor G konjugált osztályainak a száma legfeljebb $3^{\frac{n+1}{2}}$.

A dolgozat ezzel kapcsolatos fő eredménye ez előbbi korlát további javítása, amely Martino Garonzival való közös eredmény.

Egy ide kapcsolódó másik eredmény úgy szól, hogy amennyiben H egy tetszőleges részcsoportha egy A_n és S_n -től különböző n -ed fokú primitív permutációcsoportnak, akkor H -nak legfeljebb annyi konjugáltsági osztálya van, ahány partíciója van az n számnak.

3. témakör: bázis probléma.

A bázis fogalma már Bochert egy 19. század végi eredményében is szerepel. Később hasonló szerepben tűnik fel a bázis primitív permutációcsoportok rendjének becslésében. A jelen dolgozat bázisokra vonatkozó eredménye Seress Ákos, illetve Halasi és Podoski munkáihoz kapcsolódik szorosabban. A fő eredmény, ami Halasi Zoltánnal közös munka, az előbbi tételeket általánosítja illetve élesíti.

Legyen V egy véges vektortér a p karakterisztikájú q elemű test fölött. Legyen G egy p -feloldható csoport, amely hűen és teljesen reducibilisen hat V -n. Ha $q > 4$, akkor G minimális bázisszáma V -n legfeljebb kettő, továbbá ha $q \leq 4$, akkor ez a szám legfeljebb három.

Seress Ákos egyik motivációja Pálffy és Wolf egy 1982-es eredménye, nevezetesen, hogy minden n -ed fokú feloldható primitív permutációcsoport rendje legfeljebb $24^{-\frac{1}{3}} \cdot n^c$, ahol $c = 3,243 \dots$

A bázisokról szóló, a dolgozatban szereplő eredmény egy következménye ennek a tételnek egy általánosítása.

4. témakör:

A 4. témakör pozitív permutáció csoportok szimmetrikus csoportbeli normalizátoráról szól. Guralnick és Pyber Lászlóval közös munka egyik fő eredménye úgy szól, hogy amennyiben G egy n -ed fokú primitív permutáció csoport és A egy olyan másik csoport, amelyben G normális, akkor $|A/G| < n$ kivéve, ha G affin típusú primitív permutációcsoport és az $(n, A/G)$ pár megadott 11 féle.

A témakör második fő eredménye kissé általánosabb az előzőnél. Ha G n -ed fokú primitív permutációcsoport, akkor G külső automorfizmusának rendje kisebb, mint n , kivéve, ha G affin típusú és nyolc konkrét eset valamelyike teljesül.

A bizonyítékok egy mellékterméke az előbb említett Pálffy-Wolf tétel egy általánosítása.

5. témakör:

Az ötös témakör Guralnick és a pályázó cikke, amely fixpont terek dimenzió átlagáról szól. 1966-ban Neumann azt sejtette, hogy amennyiben V egy nem triviális irreducibilis FG modulus, ahol F egy véges test és G egy véges csoport, akkor a G -csoport V -n vett hatásában a G -beli elemek fixpont tereinek átlag dimenziója legfeljebb V dimenziójának fele. Ezzel a sejtéssel sokan foglalkoztak (például Neumann, Vaughn-Lee, Segal, Shalev, Isaacs, Keller, Moreto, Meierfrankenfeld).

E tételnek további erősítése is létezik. Például az, hogy az átlagdimenzió legfeljebb $\frac{1}{p} \dim V$ ahol p a G csoport rendjének legkisebb prímosztója.

E tételnek a BFC csoportok esetén van alkalmazása. A BFC és n -BFC csoportok definícióit korábban már láttuk. Wiegold adott elsőként korlátot G' méretére abban az esetben, amikor G n -BFC csoport. Továbbá azt sejtette, hogy

$$|G'| \leq n^{\frac{1}{2}(1+\log n)}$$

Ezzel a sejtéssel foglalkozott Macdonald, Vaughn-Lee, Neumann, Segal, Shalev, Cartwright. Guralnick és maróti az eddig ismert legerősebb korlátot adta n -BFC csoport kommutátor részcsoportjának méretére.

Értékelés

Mint már korábban említettem és az ismertetésből is kitűnik, a jelölt olyan témákkal foglalkozik a disszertációjában, amelyek sok évtizedes múltra tekintenek vissza és a csoportelmélet klasszikus fejezetéhez tartoznak. Megjegyzendő, hogy ezekben a témakörökben a kutatás igen nagy intenzitással folyik a mai napig. Igen figyelemre méltó, hogy a jelölt ilyen témakörökben nagyon jelentős és új eredmények egész sorát produkálta. Az eredmények nem csak újak, hanem jelentősen elősegítették a tudományág fejlődését. A bizonyítások fontos új ötleteket tartalmaznak, amely szintén megmutatja a jelölt intuícióját. Így a disszertáció nyilvános vitára bocsátását és a doktori cím odaítélését melegen javaslom.

Dr. Héthelyi László