

A bírálóbizottság értékelése

Az érkekezés témaköre a kombinatorikus csoportelmélet, valamint a véges csoportok reprezentációelméletének határterületén helyezkedik el. A bevezető fejezete, amely lényegében a téziszfüzet angol nyelvű megfelelője, történeti kontextusba helyezve ismerteti az eredményeket, megemlítve azok kapcsolódási pontjait nevezetes sejtésekhez és nyitott problémákhoz. A következő fejezetekben bemutatott vizsgálatok alapját Brauer 1963-as dolgozatában megfogalmazott kérdése adja, amely a G véges csoport konjugáltsági osztályainak $k(G)$ számára vonatkozó, csupán a csoport rendjétől függő alsó korlátot keres. A $\log_2 \log_2 |G|$ korlátot már Brauer is ismerte, később Pyber, majd Keller adtak ennél jobb becslést. A maig ismert legjobb alsó korlát Maróti Attila első tézise. Brauer egy eredménye kapcsán Pyber vetett fel kérdéseket arról, hogyan lehetne $k(G)$ -t G rendjének egy p prímosztója függvényében alulról becsülni. A $k(G) \geq 2(p-1)^{1/2}$ sejtés már korábban létezett, bizonyítása viszont Malle, Keller, Külshammer munkái nyomán csak különböző megszorító feltételek mellett volt ismert. Az érkekezés 2. tézise, hogy ez a korlát tetszőleges csoportra érvényes, sőt az egyenlőséget teljesítő csoportok is pontosan le vannak írva. A tétel felhasználásával igazolható, hogy ugyanez az alsó korlát vonatkozik G p -hez relatív prim fokú komplex irreducibilis karakterei halmazának számosságára (3. tézis). A $k(G)$ felső becslésére vonatkozó 4. tézis szerint minden $n \geq 4$ -edfokú permutációcsoportnak legfeljebb $5^{(n-1)/3}$ konjugáltsági osztálya van. Ez Kovács és Robinson egy korábbi tételének élesítése, a probléma motivációja pedig Brauer moduláris reprezentációelméleti ún. $k(B)$ sejtését p -feloldható csoportokra igazoló $k(GV)$ tétel. Az eredmény a lineáris csoportok minimális bázisszámára is következményekkel jár. Az 5. tézis Seress egy ide vonatkozó tételének általánosítása, valamint Halasi és Podoski egy korábbi tételének kiterjesztése p -feloldható csoportokra. Az ezzel párhuzamosan adódó 6. tézis, amely a véges V vektortéren hűen és teljesen irreducibilisen ható p -feloldható csoport elemszámára ad felső korlátot, Pálffy és Wolf egy korábbi tételét általánosítja. A 7-9. tézisekben véges csoportok főláncának p -feloldható, centrális, valamint nem centrális főfaktorai rendjeinek szorzatára vannak felső becslések. Az érkekezés 5. fejezetének fő eredménye a 10. tézis: egy G primitív normálosztó indexe egy n -edfokú permutációcsoportban kisebb, mint n , kivéve, ha G egy affin primitív permutációcsoport és az A/G faktorcsoporthoz (valamint n) egy explicit véges listához tartozik. A 11. tézis megadja azokat az n -edfokú primitív permutációcsoportokat, melyek külső automorfizmuscsoportja legalább n elemű. A 12-13. tézisek permutációcsoportok tranzitív normális és szubnormális részcsoportjainak indexére adnak exponenciális felső korlátot. A 14-16. tézisek fixpontterek dimenzióátlagáról szólnak. A 16. tézis szerint a V véges dimenziós vektortér lineáris transzformációi csoportjában az átlagos fixpont-altér dimenzió legfeljebb $(\dim V)/p$, (p a csoport rendjének legkisebb prímosztója) minden olyan normálosztó szerinti mellékosztályra, amelyre nézve V -nek nincs triviális kompozíciófaktora. Ez megválaszolja és általánosítja Neumann egy 1966-os sejtését, továbbá az egyenlőség esetét is jellemzi. A 17-19. tézisek az n -BFC csoportok rendjére, valamint azok kommutátor-részcsoportjainak rendjére vonatkozó eddigi legjobb becslések, Segal és Shalev eredményeinek élesítései.

Megállapítható, hogy Maróti Attila sok évtizedes múltra visszatekintő, a csoportelmélet klasszikus fejezeteihez tartozó, sokak által vizsgált nevezetes kérdésekkel kapcsolatban ért el számottevő eredményeket. A tézisek között kiemelt 19 tétel mindegyikét Q1 presztízssű folyóiratban publikálta, a bizonyítások mélysége kiemelkedő tárgyi tudást és kreativitást, a kérdéskör eszköztárában való alapos jártasságot tanúsít. A bírálóbizottság a tézisek mindegyikét elfogadja mint új, a szakterület fejlődéséhez alapvetően hozzájáruló eredményeket.