# A Galjorkin-féle végeselem-módszer gyenge konvergenciája sztochasztikus parciális differenciálegyenletek közelítésekor

Kovács Mihály

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Chalmers University of Technology
és University of Gothenburg

Göteborg
2018

# 1. Bevezetés

A sztochasztikus parciális differenciálegyenleteknek számos alkalmazási területe van olyan modellezési feladatok leírásakor, amikor a rendszerben megtalálható belső vagy szerkezeti, például a rendszer komplexitásával kapcsolatos, bizonytalanságot matematikai eszközök segítségével igyekszünk leírni [21, 56, 59]. A terület jelenleg is meglehetősen aktívnak számít, és ezen aktivitást tovább fokozta, hogy Martin Hairer 2014-ben Fields-éremben részesült a területen elért eredményeiért. A kontextustól függően egy sztochasztikus parciális differenciálegyenlet megoldásának egy funkcionálja bizonyos fizikai jelentéssel bírhat, például a rendszerben tárolt energiát írhatjuk le vele. A dolgozat főbb eredményei azzal a kérdéssel kapcsolatosak, hogy mennyire pontos különböző lineáris és szemilineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenletek (SZPDEk) megoldása egy funkcionáljának numerikus közelítése additív Wiener-, illetve Lévy-zaj esetén.

Sokoldalú felhasználhatósága és viszonylag egyszerű implementálhatósága miatt a Galjorkin-féle végeselem-módszer a parciális differenciálegyenletek egyik leggyakrabban használt térbeli közelítési módszerei közé tartozik. A dolgozatban tárgyalt egyenleteket tehát a térváltozóban ezen módszerrel diszkretizáljuk, habár ezen módszer analízise lényegesen nehezebb, mint például egy spektrális közelítés analízise. Megjegyezzük továbbá, hogy a dolgozatban bemutatott módszerek alkalmasak más, például wavelet közelítés analízisére is. A SZPDEk elmélete ma meglehetősen szerteágazó. A végeselem-analízishez talán legjobban illő elmélet, az operátorfélcsoportokon vagy még általánosabban az evolúciós egyenleteken alapuló megközeltés, amely Wiener-zaj esetén a [21], illetve az ennek megfelelő elmélet Lévy-zaj esetén az [56] monográfiákban került kidolgozásra. Ezen elméletnek megfelelően fogjuk tárgyalni a dolgozatban vizsgált egyenleteket, amelyek sztochasztikus parabolikus, hiperbolikus, illetve Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek, valamint ezek numerikus közelítését.

Az egyenletek időbeli közelítését az adott egyenlet szerkezetének figyelembevételével végezzük. Parabolikus egyenletek esetén ez az implicit Euler-módszert jelenti, míg Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek esetén az implicit Euler-módszeren alapuló, konvolúció-kvadratúrával kiegészítve. A sztochasztikus hullámegyenletet az exponenciális függvénynek a racionális törtfüggvények egy osztálya általi közelítésén alapuló módszerrel diszkretizáljuk. Ezen módszerek egyike a jól ismert Crank–Nicolson-módszer.

Az SZPDEk numerikus módszerei erős konvergenciájának, azaz a hiba négyzete várható értéke (négyzetgyöke) konvergenciájának vizsgálata a 1990-es évekig nyúlik vissza, és azóta rengeteg ezzel kapcsolatos tanulmány született. Egy teljes lista összeállítása gyakorlatilag lehetetlen lenne, ezért a [33] tanulmányra hivatkozunk ezzel kapcsolatban, ahol az ilyen típusú eredmények áttekintése található, méghozzá meglehetős alapossággal elkészítve. Az ezen típusú eredmények bizonyításakor használt legfontosabb sztochasztikus eszköz az Itô-izometria, legalábbis amikor az egyenletben megjelenő nemlineáris tagok globálisan Lipschitz-folytonosak valamilyen értelemben. A numerikus hiba analízise ezekben az esetekben könnyen visszavezethető megfelelő determinisztikus hibabecslésekre.

A helyzet alapvetően változik meg, amikor az úgynevezett gyenge hibát tekintjük. Ez utóbbi nem más, mint az egyenlet megoldása egy $T > 0$ időpontban felvett értéke egy $g$ funkcionáljának (ahol $g$ az állapottéren értelmezett valós értékű függvény) és ezen funkcionál a numerikus megoldáson felvett értékének várható értékben vett különbségének abszolút értéke. Egy egyszerű helyettesítés segítségével könnyen látható, hogy ez a hiba Lipschitz-folytonos $g$ funkcionálok esetén, a numerikus közelítés valószínűségeloszlásának gyenge konvergenciájához kapcsolódik. Lipschitz-folytonos $g$ funkcionál esetén azonnal következik, hogy az erős hiba rendje egy felső korlátja a gyenge hiba rendjének. Ez a becslés azonban általában nem éles. Általános jelenségnek tekinthető, hogy amikor a zaj térbeli kovarianciája nem elég sima, akkor a gyenge hiba rendje az erős hiba rendjének kétszerese. Ennek különböző SZPDEk esetén való belátásához a sztochasztikus analízis kifinomultabb eszközeihez kell folyamodnunk. A dolgozatban két különböző megközelítési módszert tárgyalunk részletesen.

Az első megközelítés, amelyet a dolgozat első fejezetében Wiener-zaj esetén, illetve a harmadik fejezetében Lévy-zaj esetén alkalmazunk, az egyenlet megoldásához kapcsolódó Kolmogorov-egyenletet és az Itô-formulát használja fel a gyenge hiba kifejtésére. Ez a megközelítés először D. Talay [63] tanulmányában jelenik meg sztochasztikus közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldásának gyenge konvergenciájának vizsgálatakor. SZPDEk esetén T. Shardlow [62] alkalmazta először ezt a módszert a sztochasztikus hővezetési egyenletre spektrális Galjorkin-approximációt használva, kommutatív Wiener-zaj esetén, azaz amikor az egyenletben megjelenő zaj kovarianciaoperátora és az egyenletben megjelenő differenciáloperátor sajátfüggvényei megegyeznek. Később ezt az eredményt A. Debussche és J. Printems [23] általánosította Galjorkin-féle végeselem-módszer esetén nemkommutatív zajt tételezve fel. Ezzel egyidőben, az S. Larrsonnal és M. Geisserttel írt [28] közös cikkünkben is megtettük ugyanezt, habár egy kicsit kevésbé általános funkcionálok esetén. Ezzel kapcsolatban megemlíthető még az S. Larrsonnal és F. Lindgrennel írt [38] közös cikkünk, ahol magasabb térbeli konvergencia-rendet is el tudunk érni megfelelő végeselemcsaládot használva. Később a módszert többen is továbbfejlesztették [3, 22, 64, 66], többségükben egy további sztochasztikus analízisbeli eszköz, a Malliavin-kalkulus segítségével. Az összes fent említett dolgozat a sztochasztikus hővezetési egyenletet vizsgálja, kivéve [38, 39], ahol a lineáris sztochasztikus Cahn–Hilliard-egyenletre is adtunk hibabecslést, amely eredmény a dolgozat első fejezetében kerül bemutatásra.

Hiperbolikus egyenletek, például a sztochasztikus Schrödinger-egyenlet vagy a sztochasztikus hullámegyenlet esetén kevesebb eredmény ismert. Az első ebbe a körbe tartozó eredmény A. de Bouard és A. Debussche [24] nevéhez fűződik, akik az egydimenziós sztochasztikus Schrödinger-egyenlet egy időbeli szemidiszkretizációjának gyenge konvergenciáját vizsgálták Wiener-zaj esetén. Az egy térbeli dimenziós sztochasztikus szemilineáris hullámegyenlet véges differenciás közelítésének gyenge konvergenciáját E. Hausenblas [31] cikkében tárgyalta egy meglehetősen szűk funkcionálosztályt tekintve. Ezt követően S. Larrsonnal és F. Lindgrennel írt [38, 39] közös cikkeinkben, a lineáris esetben, tetszőleges térbeli dimenzió esetén, először térbeli végeselemes szemidiszkretizációt, majd egy teljes térbeli és időbeli diszkretizációt tekintve adtunk éles hibabecslést a gyenge konvergencia rendjére. Ezek az eredmények a dolgozat első fejezetében kerülnek tárgyalásra. Ezt az analízist X. Wang [65] egy trigonometrikus időbeli diszkretizációt alkalmazva terjesztette ki a szemilináris sztochasztikus hullámegyenletre.

Sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek numerikus közelítése Wiener-zaj esetén először A. Karczewska és P. Rozmej [34] dolgozatában került tárgyalásra mindenféle hibabecslés nélkül. Egy ilyen típusú egyenletosztály esetén az első hibabecslések az erős konvergenciát tekintve a J. Printems-al írt [46] közös cikkünkben, a gyenge konvergenciát tekintve pedig a [47] cikkünkben jelentek meg. Ezek az eredmények a dolgozat első fejezetében kerülnek tárgyalásra, ahol az erős hibabecslést kiterjesztjük egy tágabb egyenletosztályra a B. Baeumerral és M. Geisserttel írt [4] közös cikkünk néhány eredménye segítségével. Ezen egyenletek egyik fő sajátossága, hogy az egyenlet memóriatagjának köszönhetően a megoldás nem Markov-folyamat. Ezért nem írható fel a megoldáshoz kapcsolódó Kolmogorov-egyenlet, amennyiben az egyenlet természetes állapotterét vesszük alapul. Ezt a nehézséget, legalábbis a lineáris esetben, egy olyan új Markov-folyamat bevezetésével lehet orvosolni, amely folyamat valószínűségeloszlása megegyezik a megoldás valószínűségeloszlásával egy előírt $T > 0$ időpontban. Ezután a hiba analízise elvégezhető ezen új folyamathoz tartozó Kolmogorov-egyenlet segítségével. Ezt a módszert először A. Debussche and J. Printems [23] alkalmazta a sztochasztikus hővezetési egyenlet vizsgálatakor azzal a céllal, hogy a Kolmogorov-egyenletben szereplő, a nemkorlátos differenciáloperátort tartalmazó tagot eltüntesse. Sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek esetén ez a módszer még ennél is nagyobb segítséget nyújt azáltal, hogy egy nem Markov-folyamat esetén is alkalmazni tudunk Markov-folyamatokkal kapcsolatos módszereket.

A Kolmogorov-egyenletet használjuk fel a harmadik fejezetben is, ahol lineáris SZPDEket tárgyalunk Lévy-zajjal. A Wiener-zaj esetében kidolgozott megközelítés alkalmazása csak jelentős változtatásokkal lehetséges. Az egyik probléma abból fakad, hogy – ellentétben a Wiener-zajjal – a Lévy-zaj esetében nem található az irodalomban megfelelően általános Kolmogorov-egyenlet végtelen dimenzióban. A dolgozatban egy ilyen egyenletet is levezetünk, amely ugyan nem a lehető legáltalánosabb, de megfelelően általános ahhoz, hogy a hibaanalízist elvégezhessük. A másik fő nehézséget az jelenti, hogy a végtelen dimenziós Lévy-folyamatok szerinti sztochasztikus integrálnak két különböző konstrukciója is létezik az irodalomban, és mi mindkét elméletből használunk eszközöket. Az egyik konstrukcióban operátor értékű folyamatokat lehet integrálni Hilbert-tér értékű Lévy-folyamatok szerint (ez a konstrukció az [56, Chapter 8] és az [53, 54] monográfiákban található meg), míg a másikban (lásd [51, 58]) Hilbert-tér értékű integrandusokat lehet integrálni Poisson-véletlen-mértékek szerint. Ez a probléma azért jelentős, mert a SZPDE-ket az első elmélet szerint tárgyaljuk, míg a gyenge hiba kifejtésében egy olyan Itô-formulát használunk, amely a második elmélet keretén belül található meg [51, Theorem 3.6]. Ezért a dolgozatban feltárjuk a két felépítés közötti kapcsolatot, és ezáltal mindkét elméletből használni tudjuk a megfelelő eszközöket. Lévy-zajos sztochasztikus közönséges differenciálegyenletek numerikus közelítéseinek gyenge hibabecslését több szerző munkáiban is megtalálhatjuk, lásd például [32, 52, 57, 60] az ezekben található további referenciákkal együtt. A Lévy-zajos SZPDEk numerikus approximációjának erős hibabecslése tekintetében is található számos dolgozat, lásd például [14, 15, 16, 26, 29, 30, 48]. A Lévy-zajos SZPDEk numerikus approximációjának gyenge hibabecslése azonban egy eddig alig tárgyalt területnek számít. Az első eredmény ebben az irányban az F. Lindner és R. Schilling által publikált [49] cikk, amelyet a dolgozat harmadik fejezetében kiterjesztünk több irányban is – ezen eredmények a két említett szerzővel írt [45] cikkünkön alapulnak. Végül megemlítjük a nemrég megjelent [17] dolgozatot, ahol a sztochasztikus hővezetési egyenletre vonatkozó eredményünket a térbeli diszkretizáció esetén egy más módszerrel, a Poisson–Malliavin-kalkulus segítségével egy nagyon kicsit tágabb funkcionálosztályra is bebizonyították. Habár ez a dolgozat nem általánosít sokat az általunk bizonyított eredményen, a használt módszer ígéretesnek tűnik ahhoz, hogy komplikáltabb, nemlineáris, Lévy-zajos SZPDEk gyenge approximációit is vizsgálni lehessen a jövőben.

A szemilineáris SZPDEk numerikus közelítésének gyenge konvergenciájának analízise Wiener-zaj esetében a második fejezetben kerül tárgyalásra, a fentiekben ismertetett módszerektől teljesen különböző, második megközelítést követve. Itt a szemilineáris sztochasztikus hővezetési egyenletet és a sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek egy osztályát tárgyaljuk. Ezt a megközelítést az A. Anderssonnal és S. Larssonnal írt [1] közös dolgozatunkban publikáltuk. Alapját egy Newton–Leibniz-formulára alkalmazott dualitási érvelés képezi, valószínűségi változók tereiből álló jól megválasztott Gelfand-hármast használva. A hármasban a klasszikus Szoboljev–Malliavin-terek helyett ezek egy megfelelően finomított változatát használjuk, amit A. Andersson, S. Larsson és R. Kruse vezettek be a [2] dolgozatban. Ezen terek használata lehetővé teszi, hogy teljesen kihasználjuk a sztochasztikus problémához tartozó lineáris determinisztikus egyenlet megoldási operátorának regularizáló hatását. Ez a sztochasztikus hővezetési egyenlet esetében az analitikus félcsoportok egy jellemző tulajdonsága, míg Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek esetén (megfelelő memóriafüggvényosztályt tekintve) ugyancsak igaz, habár csak bizonyos mértékig. A technika meglehetősen nagy apparátust mozgat meg. Ennek oka, hogy sztochasztikus szemilineáris Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek esetén a lineáris esetben alkalmazott módszer (azaz, hogy egy másik Markov-folyamatot vezetünk be, amely folyamat valószínűségeloszlása megegyezik a megoldás (ami nem Markov folyamat) valószínűségeloszlásával egy előírt $T > 0$ időpontban, majd ezen folyamathoz tartozó Kolmogorov-egyenlet segítségével végezzük el a hiba becslését) nem válik be. Ezért egy Kolmogorov-egyenleten alapuló hibabecslés nem tűnik kivitelezhetőnek, legalábbis ha az egyenlet természetes állapotterét használjuk. Használni lehetne egy olyan állapotteret is, amely figyelembe veszi a folyamat múltját is, így visszajutva a Markov-folyamatok világába. Ekkor azonban a megoldási operátor kritikus simító hatása eltűnik. A dolgozatban szereplő megközelítésnek két főbb előnyét emelnénk ki. Az első, hogy egy közös absztrakt keretben tudjuk tárgyalni a szemilineáris sztochasztikus hővezetési egyenletet és a sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek egy osztályát. A második pedig, hogy a megoldás trajektóriáinak funkcionáljainak egy osztályát is tárgyalni tudjuk. Ez a funkcionálosztály speciális ugyan, de ahhoz elegendően tág, hogy a megoldás kovarianciafüggvényének, illetve magasabb rendű statisztikáinak gyenge hibaanalízisét elvégezzük. Ilyen típusú eredmények eddig nem voltak ismertek, és mostanáig is csak egy további, részben általánosabb, részben meglehetősen korlátozott eredmény ismert. C. E. Bréhier, M. Hairer és A. Stewart idén megjelent [18] cikkükben egy elég általános, a trajektóriákon értelmezett függvényosztályt tekintenek szemilineáris SZPDEk egy osztályán belül Wiener-zajjal. Ez a hibaanalízis azonban csak kommutatív zaj esetén és csak térbeli spektrális Galjorkin-approximációt tekintve érvényes. Nem nyilvánvaló, hogy módszereik alkalmazhatóak-e időbeli diszkretizáció esetén, illetve egy kifinomultabb térbeli (például Galjorkin-féle végeselem-diszkretizáció) esetén.

Végül megemlítünk egy harmadik lehetséges módszert is, ezt azonban a dolgozatban nem használjuk: ez az úgynevezett enyhe Itô-formulán alapul [20], és például a [19, 25] tanulmányokban került alkalmazásra.

A fentiekben leírtakból jól látható, hogy a SZPDEk gyenge hibaanalízise egyáltalán nem egy lezárt kutatási terület. Olyan egyenletek esetén, amelyekben a nemlineáris tagok nem rendelkeznek valamilyen fajta globális Lipschitz–tulajdonsággal, gyakorlatilag nem ismertek gyenge konvergenciával kapcsolatos éles becslések. Ilyen egyenlet például a sztochasztikus Allen–Cahn-, a Cahn–Hilliard–Cook- vagy a stochasztikus Navier–Stokes-egyenlet. Ehhez azt is hozzá kell tenni, hogy ezen egyenletek esetén az erős értelemben vett hibaanalízis is messze nem teljes és jelenleg is egy meglehetősen aktív kutatási területnek számít. A Lévy-zajos SZPDEk gyenge approximációinak analízise is gyerekcipőben jár még, és ez ugyancsak elmondható a SZPDEk megoldásainak trajektóriáin értelmezett funkcionálok gyenge hibaanalíziséről is.

Habár a disszertáció a numerikus approximációk gyenge konvergenciájával kapcsolatos eredményekre fókuszál, azokban az esetekben, amikor a vizsgált egyenletosztályra vonatkozóan az erős konvergencia rendje is saját eredmény, úgy ezek bizonyítását is elvégezzük.

Az alábbiakban fejezetek szerinti felbontásban, részletesebben tárgyaljuk a dolgozat legfontosabb eredményeit, amelyek lényegében az [1, 4, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 47] cikkek eredményeire támaszkodnak. Megjegyezzük, hogy a felsorolt tételek mindegyike a szerző saját eredménye. A tézisfüzet összeállításánál nem a dolgozat egészének a bemutatása volt a célunk, hanem egy olyan, önmagában is olvasható anyag elkészítése, amely egyben átfogó képet ad az értekezésről is. Terjedelmi okokból a szerző más kutatási területei nem kerültek tárgyalásra a munkában. A törtrendű parciális differenciálegyenletekhez kapcsolódó eredmények megtalálhatók az [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 35], a SZPDEk numerikus közelítésének erős konvergenciával kapcsolatos, a dolgozatban nem bemutatott eredmények pedig a [27, 36, 37, 40, 41, 42] cikkekben.

# 2. Lineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenletek additív Wiener-zajjal

Ebben a fejezetben additív Wiener-zajos lineáris sztochasztikus differenciálegyeletek gyenge közelítését tárgyaljuk. Kiemelten foglalkozunk a sztochasztikus hullámegyenlettel (2.3. alfejezet), illetve a sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek egy osztályával (2.4. alfejezet). A hibabecsléseket a 2.2. alfejezetben kimondott általános reprezentációs tétel segítségével lehet bebizonyítani. Összehasonlításképpen a megfelelő erős hibabecsléseket is tárgyaljuk.

## 2.1. Néhány alapfogalom és jelölés

Először bevezetünk néhány jelölést és fogalmat. Legyen $H$ és $U$ (végtelen-dimenziós) valós szeparábilis Hilbert-tér a $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_H$ illetve $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_U$ skalárszorzattal, valamint az ezekből származó $\|\cdot\|_H$ és $\|\cdot\|_U$ normával ellátva. Ha a szövegkörnyezetből világos, akkor elhagyjuk az indexet a skalárszorzatról, illetve a normáról. Jelölje $\mathcal{L}(U,H)$ a $T : U \to H$ korlátos lineáris operátorok terét a szokásos $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(U,H)}$ normával, ahol ugyancsak elhagyjuk az indexet, ha ez nem zavarja az érthetőséget. Ha $T \in \mathcal{L}(U,H)$, és léteznek olyan $\{a_j\} \subset H$ és $\{b_j\} \subset U$ sorozatok, amelyekre $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|\|b_j\| < \infty$ teljesül, és $T$ előáll a

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, b_j\rangle a_j, \quad x \in U,$$

alakban, akkor a $T$ operátort véges nyomú operátornak nevezzük. A véges nyomú operátorok $\mathcal{L}_1(U,H)$ tere Banach-tér a

$$\|T\|_{\mathrm{Tr}} = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|\|b_j\| : Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, b_j\rangle a_j \Big\}$$

normára nézve. Ha $T \in \mathcal{L}_1(U,U)$ és $\{e_j\} \subset U$ az $U$ Hilbert tér egy ortonormált bázisa, akkor a $T$ operátor

$$\operatorname{Tr} T = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j, e_j \rangle$$

nyoma jóldefiniált, és értéke nem függ az ortonormált bázis megválasztásától. Ha $T \in \mathcal{L}(U,H)$ és az $U$ Hilbert-tér valamely $\{e_j\} \subset U$ ortonormált bázisát tekintve

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 < \infty \tag{1}$$

teljesül, akkor a $T$ operátort Hilbert–Schmidt-operátornak nevezzük. Ebben az esetben az (1) által definiált végtelen sor összege független az ortonormált bázis megválasztásától. A Hilbert–Schmidt-operátorok $\mathcal{L}_2(U,H)$ tere szeparábilis Hilbert-tér a

$$\|T\|^2_{\mathcal{L}_2(U,H)} = \|T\|^2_{\mathrm{HS}} = \sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2$$

normára nézve.

Jelölje $C^n(H,\mathbb{R})$ az $n$-szer folytonosan Fréchet-differenciálható $f : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ függvények terét. A $C_{\mathrm{b}}(H,\mathcal{L}(H))$ jelölést alkalmazzuk az $f : H \to \mathcal{L}(H)$, $x \mapsto f(x)$ folytonos és korlátos függvények terére. Ha a Riesz reprezentációs tétel segítségével a $H$ Hilbert-teret azonosítjuk a $\mathcal{L}(H,\mathbb{R})$ térrel, akkor $x \in H$ esetén az $f'(x)$ deriváltat a $H$ egy elemének tekintjük. Ehhez hasonlóan az $f''(x)$ deriváltat az $\mathcal{L}(H)$ egy elemének fogjuk fel. Helyenként az $f_x$ és az $f_{xx}$ jelölést használjuk az $f'$ és az $f''$ helyett.

Legyen $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, és jelölje $L^p(\Omega;H)$ a $H$ Hilbert-tér értékű azon $X\colon(\Omega,\mathcal{F}) \to (H,\mathcal{B}(H))$ valószínűségi változók terét, ahol $\mathcal{B}(H)$ jelöli a $H$ Hilbert tér Borel-$\sigma$-algebráját, amelyekre

$$\|X\|^p_{L^p(\Omega;H)} = \mathbb{E}\big(\|X\|^p_H\big) = \int_\Omega \|X(\omega)\|^p_H \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) < \infty,\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Még általánosabban: ha $(M,\mathcal{M},\mu)$ egy mértéktér, és $1 \leqslant p < \infty$, akkor $L^p(M;H) = L^p(M,\mathcal{M},\mu;H)$ jelöli a $\mathcal{M}/\mathcal{B}(H)$-mérhető azon $f : M \to H$ függvények terét, amelyekre a $\|f\|_{L^p(M;H)} = (\int_M \|f\|^p_H \mathrm{d}\mu)^{1/p}$ norma véges.

Legyen $Q \in \mathcal{L}(U)$ egy önadjungált és pozitív szemidefinit operátor. Egy $U$-értékű $Q$-Wiener-folyamatot a következőképpen lehet felépíteni. Tekintsük az $U_0 := Q^{\frac{1}{2}}U$ úgynevezett Cameron–Martin-teret a $\langle x, y\rangle_0 := \langle Q^{-\frac{1}{2}}x, Q^{-\frac{1}{2}}y\rangle$ skalárszorzattal ellátva, ahol $Q^{-1}$ a $Q$ operátor pszeudoinverzét jelöli, ha $Q$ nem injektív. Legyen $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ az $U_0$ Hilbert-tér egy ortonormált bázisa, és legyenek $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ standard, egymástól teljesen független, valós Wiener-folyamatok (Brown-mozgások) az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Tekintsük a következő végtelen sort:

$$W(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)e_k. \tag{2}$$

Amennyiben $\operatorname{Tr} Q < \infty$, úgy a sor egy olyan sztochasztikus folyamathoz konvergál a $L^2(\Omega; U)$ normája szerint, amelynek van sztochasztikusan ekvivalens folytonos trajektóriájú módosítása, amelyet $U$-beli $Q$-Wiener-folyamatnak nevezünk [21, Section 4] és [59, Section 2]. Amikor azonban $\operatorname{Tr} Q = \infty$, akkor a (2) sor nem konvergál az $L^2(\Omega; U)$ normája szerint, hanem csak az $L^2(\Omega; U_1)$ normája szerint, ahol $U_1$ egy olyan Hilbert-tér, amelyre igaz, hogy az $U_0$ beágyazási operátora az $U_1$ térbe egy Hilbert–Schmidt-operátor. Ezt az $U_1$-értékű folyamatot, illetve ennek egy sztochasztikusan ekvivalens folytonos trajektóriájú módosítását, ugyanúgy $W$-vel jelöljük és $U$-beli $Q$-Wiener-folyamatnak nevezzük, habár a (2) sor ebben az esetben formálisnak tekinthető az $L^2(\Omega; U)$ normájára nézve. Ha $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ egy sztochasztikus alaptér, amely megfelel a szokásos feltételeknek, és $W$ egy $U$-beli $Q$-Wiener-folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, amely adaptált az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációra nézve, és $W(t) - W(s)$ független $\mathcal{F}_s$-től minden $0 \leqslant s \leqslant t$ esetén, akkor $W$-t $U$-beli $Q$-Wiener-folyamatnak nevezzük az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációra nézve.

Végül szükség lesz a sztochasztikus Itô-integrál egy egyszerűsített változatára, az úgynevezett Wiener-integrálra determinisztikus integrandus esetén (lásd például [21, Chapter 4] és [59, Chapter 2]). Legyen $F\colon [0, t) \to \mathcal{L}_2(U_0, H)$, $t > 0$, mérhető függvény, amely négyzetesen integrálható, azaz

$$\int_0^t \|F(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)} \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Ekkor az $\int_0^t F(s)\,\mathrm{d}W(s)$ egy jóldefiniált valószínűségi változó, amelyre igaz az úgynevezett Itô-izometria alábbi alakja:

$$\Big\| \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}W(s) \Big\|^2_{L^2(\Omega;H)} = \int_0^t \|F(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)} \,\mathrm{d}s.$$

## 2.2. A gyenge hiba egy általános kifejtése

Ebben az alfejezetben bemutatjuk azt az általános tételt, amelynek segítségével a dolgozat első fejezetében vizsgált egyenlettípusok esetén a numerikus megoldás gyenge konvergenciájának rendjét meghatározzuk. Jelentősége egyrészt abban rejlik, hogy alkalmazható mind parabolikus, mind pedig hiperbolikus egyenletekre, de még Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek esetén is. Másrészt pedig a tétel alkalmas mind az időbeli, mind a térbeli szemidiszkretizáció analízisére és természetesen a teljes diszkretizáció vizsgálatára is. A tézisfüzetben csak teljes diszkretizációkat tekintünk, de a dolgozatban szerepelnek időbeli szemidiszkretizációra vonatkozó becslések is.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ egy sztochasztikus alaptér és $W$ egy $U$-beli $Q$-Wiener-folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációra nézve. Legyen $Y$ és $\widetilde{Y}$ a következő módon definiálva:

$$Y(t) := Y(0) + \int_0^t E(T-s)B\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in [0,T],$$

valamint

$$\widetilde{Y}(t) := \widetilde{Y}(0) + \int_0^t \widetilde{E}(T-s)\widetilde{B}\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in [0,T],$$

ahol $T > 0$ és az $(E(t))_{t\in[0,T]}$, valamint az $(\widetilde{E}(t))_{t\in[0,T]}$ a $H$ Hilbert-tér korlátos operátoraiból álló operátorcsaládok. A sztochasztikus integrálok létezéséhez feltesszük, hogy az $(E(t))_{t\in[0,T]}$ illetve az $(\widetilde{E}(t))_{t\in[0,T]}$ olyan operátorcsaládok, amelyekre teljesül, hogy a $t \mapsto \widetilde{E}(t)\widetilde{B}$, illetve hogy a $t \mapsto E(t)B$ mint $[0,T] \to \mathcal{L}_2(U_0, H)$ leképezések mérhetők és

$$\int_0^T \|E(t)B\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)}\mathrm{d}t < \infty, \tag{3}$$

valamint

$$\int_0^T \|\widetilde{E}(t)\widetilde{B}\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)}\mathrm{d}t < \infty. \tag{4}$$

Tekintsük a következő különbséget

$$e(T) = \mathbb{E}\left(G(\widetilde{Y}(T)) - G(Y(T))\right), \tag{5}$$

ahol $G : H \to \mathbb{R}$ egy adott funkcionál. Legyen

$$Z(t, \tau, \xi) := \xi + \int_\tau^t E(T-s)B\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in [\tau, T],$$

ahol $\tau \in [0,T)$ és $\xi$ egy $H$-értékű, $\mathcal{F}_\tau$-mérhető valószínűségi változó. Legyen $u : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ a következő alakú:

$$u(t,x) := \mathbb{E}\, G(Z(T,t,x)), \quad (t,x) \in [0,T] \times H,$$

ahol $G : H \to \mathbb{R}$ egy adott funkcionál.

**2.1. Tétel** (Theorem 1.2.1 a dolgozatban)**.** *Legyen $T > 0$ és legyenek $(E(t))_{t\in[0,T]}$ és $(\widetilde{E}(t))_{t\in[0,T]}$ a $H$ Hilbert-tér korlátos operátoraiból álló olyan operátorcsaládok, amelyekről feltételezzük, hogy $\{E(t)\}_{t\in[0,T]}$ erősen folytonos, $t \mapsto \widetilde{E}(t)\widetilde{B}$ mint $[0,T] \to \mathcal{L}_2(U_0, H)$ leképezés mérhető, $B, \widetilde{B} \in \mathcal{L}(U,H)$ és amelyekre teljesülnek a (3) és a (4) feltételek. Ha $G : H \to \mathbb{R}$ olyan funkcionál, amelyre igaz, hogy $G \in C^2(H, \mathbb{R})$ és $G'' \in C_b(H, \mathcal{L}(H))$, valamint ha $Y(0), \widetilde{Y}(0) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H)$, akkor az (5) egyenlettel definiált $e(T)$ gyenge hiba felírható az*

$$e(T) = \mathbb{E}\big(u(0, \widetilde{Y}(0)) - u(0, Y(0))\big) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \mathrm{Tr}\Big(u_{xx}(t, \widetilde{Y}(t))\mathcal{O}(t)\Big)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

*alakban, ahol*

$$\mathcal{O}(t) = \big(\widetilde{E}(T-t)\widetilde{B} + E(T-t)B\big)Q\big(\widetilde{E}(T-t)\widetilde{B} - E(T-t)\widetilde{B}\big)^*$$

*vagy*

$$\mathcal{O}(t) = \big(\widetilde{E}(T-t)\widetilde{B} - E(T-t)B\big)Q\big(\widetilde{E}(T-t)\widetilde{B} + E(T-t)B\big)^*.$$

Ezt az eredményt először a sztochasztikus hullámegyenletre alkalmazzuk.

## 2.3. A sztochasztikus hullámegyenlet

Az eredmények megfogalmazásához be kell vezetnünk néhány jelölést és fogalmat. Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos és konvex tartomány, és tekintsük az $L^2(\mathcal{D})$ függvényteret a szokásos $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{D})}$ normával és $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathcal{D})}$ skalárszorzattal. Legyen $\Lambda := -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial^2/\partial\xi_j^2$ a Laplace-operátor az $L^2(\mathcal{D})$ függvénytéren homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel, azaz a $D(\Lambda) := \{v \in H_0^1(\mathcal{D}) : \ \Lambda u \in L^2(\mathcal{D})\}$ értelmezési tartománnyal. A szokásos $H^n(\mathcal{D})$ jelölést alkalmazzuk az $n \in \mathbb{N}_0$-ed rendű $L^2$-Szoboljevterek jelölésére a $\mathcal{D}$ tartományon, és $H_0^1(\mathcal{D})$ jelöli a $C_c^\infty(\mathcal{D})$ kompakt tartójú függvények lezárását a $H^1(\mathcal{D})$ tér normája szerint. Bevezetjük továbbá a $\dot{H}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, simasági tereket:

$$\dot{H}^\alpha := D(\Lambda^{\alpha/2}) := \Big\{ v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k : \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R},$$
$$\|v\|_{\dot{H}^\alpha} := \|\Lambda^{\alpha/2} v\|_{L^2(\mathcal{D})} = \Big( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha v_k^2 \Big)^{1/2} < \infty \Big\},$$

ahol $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D(\Lambda)$ az $L^2(\mathcal{D})$ függvénytér, a $\Lambda$ operátor sajátfüggvényeiből álló, ortonormált bázisa a megfelelő $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ sajátértékekkel. Még pontosabban, negatív $\alpha$ esetén a $\dot{H}^\alpha$ tér az $L^2(\mathcal{D})$ függvénytér lezárása az $\|\cdot\|_{\dot{H}^\alpha}$ normája szerint.

A sztochasztikus hullámegyenlet állapotterének leírásához bevezetjük a

$$\mathcal{H}^\alpha := \dot{H}^\alpha \times \dot{H}^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

Hilbert-tereket a

$$\langle v, w\rangle_{\mathcal{H}^\alpha} = \langle v_1, w_1\rangle_{\dot{H}^\alpha} + \langle v_2, w_2\rangle_{\dot{H}^{\alpha-1}}$$

skalárszorzattal, ahol $v = [v_1, v_2]^T$ és $w = [w_1, w_2]^T$. A skalárszorzatból származó normákra a

$$\|v\|^2_{\mathcal{H}^\alpha} := \|v_1\|^2_{\dot{H}^\alpha} + \|v_2\|^2_{\dot{H}^{\alpha-1}}$$

jelölést használjuk. Legyen a $H$ Hilbert-tér a (7) speciális, $\alpha = 0$ választással kapott esete a $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{H}^0}$ normával és a $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathcal{D})} + \langle \Lambda^{-1/2}\cdot, \Lambda^{-1/2}\cdot\rangle_{L^2(\mathcal{D})}$ skalárszorzattal.

A sztochasztikus hullámegyenlet elsőrendű rendszerré átírt vátozata a következű absztrakt Itô-alakban írható fel:

$$\mathrm{d}X(t) + AX(t)\,\mathrm{d}t = B\,\mathrm{d}W(t),\ t \in [0,T]; \quad X(0) = X_0, \tag{8}$$

ahol $A : D(A) \subset H \to H$ és $B : \dot{H}^{-1} \to H$ a következő operátormátrixok:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \tag{9}$$

és ahol az $A$ operátormátrix értelmezési tartománya

$$D(A) = \Big\{ x \in H : Ax = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\Lambda x_1 \end{bmatrix} \in H = \dot{H}^0 \times \dot{H}^{-1} \Big\}$$
$$= \mathcal{H}^1 = \dot{H}^1 \times \dot{H}^0.$$

Itt a $\Lambda$ operátort mint $\dot{H}^1 \to \dot{H}^{-1}$ leképezést tekintjük a

$$\langle \Lambda x, y \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} = \langle \nabla x, \nabla y \rangle_{L_2(D)}$$

definíció szerint. A (8) egyenlet gyenge megoldása a $[0,T]$ intervallumon egy olyan $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $H$-értékű, előrejelezhető folyamat, amelynek trajektóriái 1 valószínűséggel Bochner-integrálhatóak a $[0,T]$ intervallumon, valamint minden $t \in [0,T]$ és $\eta \in \mathcal{D}(A^*)$ esetén az

$$\langle X(t), \eta \rangle + \int_0^t \langle X(s), A^* \eta \rangle \, \mathrm{d}s = \langle X_0, \eta \rangle + \int_0^t \langle \eta, B \, \mathrm{d}W(s) \rangle$$

egyenlet 1 valószínűséggel teljesül. A (8) egyenlet $H$-értékű

$$X = \left[ X_1(t), X_2(t) \right]^\top$$

gyenge megoldása a

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)B \, \mathrm{d}W(s) \tag{10}$$

formulával adható meg, ahol $(E(t))_{t\geq 0}$ a $-A$ operátor által generált operátorfélcsoport, amennyiben persze a sztochasztikus integrál jóldefiniált, és ha $X_0$-ról feltesszük hogy $\mathcal{F}_0$-mérhető.

A numerikus közelítés tárgyalásához további fogalmakat és jelöléseket vezetünk be. Legyen $r \geqslant 2$ egy pozitív egész szám, és tekintsük a $H_0^1(\mathcal{D})$ függvénytér egy $(V_{h,0}^r)_{0<h<1} \subset H_0^1(\mathcal{D})$ véges dimenziós altércsaládját. Legyen az $R_h : \dot{H}^1 \to V_{h,0}^r$ operátor a $\dot{H}^1$ tér $V_{h,0}^r$ alterére való merőleges vetítése:

$$\langle \nabla R_h v, \nabla \chi \rangle = \langle \nabla v, \nabla \chi \rangle, \quad v \in \dot{H}^1, \chi \in V_{h,0}^r. \tag{11}$$

A hibaanalízis során feltételezzük, hogy az $R_h$ úgynevezett Ritz-projekcióra érvényes a

$$\|R_h v - v\| \leq Ch^\gamma \|v\|_{\dot{H}^\gamma}, \ v \in \dot{H}^\gamma, \ 1 \leq \gamma \leq r, \tag{12}$$

hibabecslés. A diszkrét Laplace-operátort a

$$\Lambda_h : V_{h,0}^r \to V_{h,0}^r, \quad \langle \Lambda_h \psi, \chi \rangle = \langle \nabla \psi, \nabla \chi \rangle, \quad \psi, \chi \in V_{h,0}^r,$$

egyenlettel definiáljuk. Az $A$ operátor diszkretizált $A_h : V_{h,0}^r \times V_{h,0}^r \to V_{h,0}^r \times V_{h,0}^r$ változatát az

$$A_h := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \Lambda_h & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix adja meg.

Legyen továbbá $R$ az exponenciális függvénynek egy úgynevezett $I$-stabil racionális approximációja, azaz egy olyan racionális törtfüggvény, amelyre

$$\begin{aligned} |R(iy) - e^{-iy}| &\leqslant C|y|^{p+1}, \quad & |y| \leqslant b, \\ |R(iy)| &\leqslant 1, & y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

teljesül valamely pozitív $p$ egész szám és valamely $b > 0$ állandó esetén. Legyen

$$E_{h,\Delta t} := R(\Delta t A_h), \quad \Delta t > 0,$$

és tekintsük a sztochasztikus hullámegyenlet megoldásának

$$(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N} = ([X^n_{h,\Delta t,1}, X^n_{h,\Delta t,2}]^\top)_{n=0,\ldots,N}$$

közelítését a

$$X^j_{h,\Delta t} = E_{h,\Delta t}(X^{j-1}_{h,\Delta t} + B_h \Delta W^j),\ j = 1, \ldots, N; \quad X^0_{h,\Delta t} = P_h X_0, \tag{13}$$

algoritmus szerint megadva, ahol $B_h := P_h B = [0, P_{h,2}]^T$ és ahol $P_h = [P_{h,1}, P_{h,2}]^T$. Itt a $P_{h,1} \colon \dot{H}^0 \to V^r_{h,0}$ és a $P_{h,2} \colon \dot{H}^{-1} \to V^r_{h,0}$ a következő ortogonális vetítések: $\langle P_{h,1} f, \chi\rangle = \langle f, \chi\rangle$, $\chi \in V^r_{h,0}$, ha $f \in \dot{H}^0$, valamint $\langle P_{h,2} f, \chi\rangle = \langle f, \chi\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1}$, $\chi \in V^r_{h,0}$, ha $f \in \dot{H}^{-1}$.

A sztochasztikus hullámegyenlet esetén érvényes következő hibabecslés a gyenge konvergencia rendjét mutatja.

**2.2. Tétel** (Theorem 1.3.13 a dolgozatban)**.** *Tegyük fel, hogy*

$$\|\Lambda^{\beta-1/2} Q \Lambda^{-1/2}\|_{\mathrm{Tr}} < \infty$$

*és hogy* $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; \mathcal{H}^{2\beta})$ *valamely* $\beta \geqslant 0$ *esetén. Ha az*

$$(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$$

*családot a (13) egyenlettel definiáljuk, és* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *a (8) egyenlet gyenge megoldása, ahol* $A, B$ *a (9) egyenletben megadott operátormátrixok, akkor egy olyan* $g : \dot{H}^0 \to \mathbb{R}$ *függvény esetén, amelyre* $g \in C^2(\dot{H}^0, \mathbb{R})$ *és* $g'' \in C_b(\dot{H}^0, \mathcal{L}(\dot{H}^0))$ *teljesül, a következő hibabecslés érvényes:*

$$\left|\mathbb{E}\big(g(X^N_{h,\Delta t,1}) - g(X_1(T))\big)\right| \leqslant C(T)\big(h^{\min(2\beta\frac{r}{r+1}, r)} + \Delta t^{\min(2\beta\frac{p}{p+1}, 1)}\big),$$

*ahol* $T = N\Delta t$ *és a* $C(T) > 0$ *állandó nem függ* $h$*-tól és* $\Delta t$*-től.*

Mint az a következő eredményből látható, nem túl nagy $\beta$ esetén a gyenge konvergencia rendje kétszerese az erős konvergencia rendjének.

**2.3. Tétel** (Theorem 1.3.14 a dolgozatban)**.** *Tegyük fel, hogy*

$$\|\Lambda^{\frac{\beta-1}{2}} Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}}^2 < \infty$$

*és hogy* $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; \mathcal{H}^\beta)$ *valamely* $\beta \geq 0$ *esetén. Ekkor a sztochasztikus hullámegyenlet gyenge megoldásának első* $X_1(T)$ *komponensét a numerikus megoldás első* $X_{h,\Delta t,1}^N$ *komponense a következő erős rendben közelíti:*

$$\|X_{h,\Delta t,1}^N - X_1(T)\|_{L^2(\Omega:\dot{H}^0)} \leqslant C(T)\big(h^{\min(\beta\frac{r}{r+1},r)} + \Delta t^{\min(\beta\frac{p}{p+1},1)}\big),$$

*ahol* $T = N\Delta t$ *és a* $C(T) > 0$ *állandó nem függ* $h$*-tól és* $\Delta t$*-től.*

A dolgozatban megmutatjuk (Theorem 1.1.1), hogy általános esetben

$$\|\Lambda^{\frac{\beta-1}{2}} Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}}^2 \leqslant \|\Lambda^{\beta-1/2} Q \Lambda^{-1/2}\|_{\mathrm{Tr}}\,,$$

de kommutatív zaj esetén egyenlőség áll fenn. Így a fenti két tétel a feltételek szempontjából összehasonlítható.

## 2.4. Sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos és konvex tartomány és legyen megint $\Lambda := -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial^2/\partial\xi_j^2$ a Laplace-operátor a $H := L^2(\mathcal{D})$ függvénytéren homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel, azaz a $D(\Lambda) := \{v \in H_0^1(\mathcal{D}) : \ \Lambda u \in L^2(\mathcal{D})\} = \dot{H}^2$ értelmezési tartománnyal. Tekintsük a következő sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletet absztrakt Itô-alakban írva:

$$\mathrm{d}X + \left(\int_0^t b(t-s) A X(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}W, \quad t \in (0,T]; \quad X(0) = X_0, \tag{14}$$

ahol $W$ egy $H$-beli $Q$-Wiener-folyamat az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációra nézve és $b$ egy lokálisan integrálható, valós értékű függvény. A (14) egyenlet gyenge megoldása a $[0,T]$ intervallumon egy olyan $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $H$-értékű, előrejelezhető folyamat, amelynek trajektóriái 1 valószínűséggel Bochner-integrálhatóak a $[0,T]$ intervallumon, valamint minden $t \in [0,T]$ és $\eta \in \mathcal{D}(A^*)$ esetén az

$$\langle X(t), \eta\rangle + \int_0^t \int_0^r b(r-s)\,\langle X(s), A^*\eta\rangle\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r = \langle X_0, \eta\rangle + \int_0^t \langle \eta, \,\mathrm{d}W(s)\rangle$$

egyenlet 1 valószínűséggel teljesül. Ha $(S(t))_{t\in[0,T]}$ jelöli az

$$\dot{u}(t) + \int_0^t b(t-s)Au(s)\,\mathrm{d}s = 0, \quad t \in (0,T]; \quad u(0) = x, \tag{15}$$

egyenlet megoldási operátorcsaládját (úgynevezett rezolvenscsaládját), akkor a (14) egyenlet gyenge megoldása az

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)\,\mathrm{d}W(s)$$

formulával adható meg, amennyiben persze a sztochasztikus integrál jóldefiniált, és ha $X_0$-ról feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0$-mérhető. Az eredmények kimondásakor feltételezzük, hogy a $b$ memóriafüggvény kielégíti legalább az egyik alábbi feltételt, esetleg ezek egy kombinációját.

**2.4. Feltétel.** A memóriafüggvény $0 \neq b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, 3-monoton, $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$ és

$$\limsup_{t\to 0,\infty} \frac{\frac{1}{t}\int_0^t sb(s)\,\mathrm{d}s}{\int_0^t -s\dot{b}(s)\,\mathrm{d}s} < +\infty. \tag{16}$$

A [61, Proposition 3.10] segítségével belátható (lásd még [55]), hogy ha $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 3-monoton, akkor a (16) tulajdonság ekvivalens azzal, hogy

$$\rho := 1 + \frac{2}{\pi}\sup\{|\arg\widehat{b}(\lambda)|,\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \in (1,2). \tag{17}$$

A (17) formulával definiált $\rho$ paraméter kulcsfontosságú, mivel ez határozza meg a lineáris determinisztikus egyenlet rezolvenscsaládjának regularizáló hatását.

**2.5. Feltétel.** A $b$ memóriafüggvény kielégíti a 2.4. Feltételt és $b$ 4-monoton.

**2.6. Feltétel.** *A $b$ memóriafüggvény $\widehat{b}$ Laplace-transzformáltja kiterjeszthető egy, a $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ |\arg(z)| < \theta\}$ szektoriális tartományon értelmezett analitikus függvénnyé, ahol $\theta > \pi/2$, és a kiterjesztett Laplace-transzformált kielégíti a $|\widehat{b}^{(k)}(z)| \le C|z|^{1-\rho-k}$, $k = 0,1$, $z \in \Sigma_\theta$, egyenlőtlenséget.*

A $b(t) = Ct^{\rho-2}e^{-\eta t}$, $1 < \rho < 2$, $\eta \ge 0$, egy fontos olyan függvénycsalád, amely kielégíti mind a három feltételt. Amikor $\eta = 0$, akkor a (14) integro-differenciálegyenlet időben törtrendű differenciálegyenletként is felfogható.

Tekintsük a $H_0^1(\mathcal{D})$ függvénytér egy $(V_h)_{0<h<1} \subset H_0^1(\mathcal{D})$ véges dimenziós altércsaládját, és legyenek a $P_h : H \to V_h$ és $R_h : \dot{H}^1 \to V_h$ operátorok a $H$ illetve a $\dot{H}^1$ skalárszorzatainak megfelelő merőleges vetítések. A hibaanalízis során feltételezzük, hogy az $R_h$ Ritz-projekcióra érvényes a

$$\|R_h v - v\| \le Ch^\gamma \|v\|_{\dot{H}^\gamma}, \ v \in \dot{H}^\gamma, \ 1 \le \gamma \le 2, \tag{18}$$

hibabecslés. A diszkrét Laplace-operátort a

$$A_h : V_h \to V_h, \quad \langle A_h \psi, \chi \rangle = \langle \nabla\psi, \nabla\chi \rangle, \quad \psi, \chi \in V_h, \tag{19}$$

egyenlettel definiáljuk.

Tekintsük a következő algoritmust $n \geqslant 1$ esetén:

$$X_{h,\Delta t}^n - X_{h,\Delta t}^{n-1} + \Delta t \left( \sum_{k=1}^{n} \omega_{n-k} \, A_h X_{h,\Delta t}^k \right) = P_h(W(t_n) - W(t_{n-1})), \tag{20}$$

ahol $X_{h,\Delta t}^0 = P_h X_0$ és ahol az $(\omega_k)_{k\ge 0}$ súlyok az

$$\left( \frac{1-z}{\Delta t} \right)^{1-\rho} = \sum_{k \geqslant 0} \omega_k z^k, \quad |z| < 1, \tag{21}$$

kifejtésből számolhatóak.

**2.7. Tétel** (Theorem 1.5.33 a dolgozatban)**.** *Tegyük fel, hogy a $b$ memóriafüggvény teljesíti a 2.4. és a 2.6. Feltételeket. Legyen $T > 0$, legyen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ a (14) egyenlet gyenge megoldása, és legyen $(X_{h,\Delta t}^n)_{n=0,\dots,N}$ a (20) algoritmussal definiálva, ahol $T = N\Delta t$. Legyen $g : H \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre $g \in C^2(H, \mathbb{R})$ és $g'' \in C_b(H, \mathcal{L}(H))$ teljesül, és legyen $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H)$. Ha*

$$\|A^{(\beta - \frac{1}{\rho})/2} Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely $0 < \beta \le 1/\rho$ esetén, akkor létezik egy $h$-tól és $\Delta t$-től független $C > 0$ állandó, amelyre $h^{2/\rho} + \Delta t < T$ esetén teljesül, hogy*

$$\left|\mathbb{E}\big(g(X_{h,\Delta t}^N) - g(X(T))\big)\right| \leqslant C \ln \left( \frac{T}{h^{\Delta t + 2/\rho}} \right) (h^{2\beta} + \Delta t^{\rho\beta}).$$

Az erős konvergencia rendjével kapcsolatban igaz a következő tétel.

**2.8. Tétel** (Theorem 1.5.28 a dolgozatban). *Tegyük fel, hogy*

$$\|A^{(\beta-\frac{1}{\rho})/2}Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}} < +\infty$$

*valamely* $0 < \beta \leqslant \frac{1}{\rho}$ *esetén,* $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; \dot{H}^{2s(1+\varepsilon)})$ *valamely* $\varepsilon > 0$ *esetén, ahol* $0 \leqslant s \leqslant 1$*, és tegyük fel, hogy a* $b$ *memóriafüggvény teljesíti a 2.5. Feltételt. Legyen* $T > 0$*, legyen* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *a (14) gyenge megoldása, és legyen* $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$ *a (20) algoritmussal definiálva, ahol* $T = N\Delta t$*. Ekkor létezik egy* $C > 0$ *állandó, valamint egy másik* $K = K(T, \gamma, \rho) > 0$ *állandó, amelyek függetlenek* $h$*-tól és* $\Delta t$*-től, és amelyekre*

$$\|X^N_{h,\Delta t} - X(T)\|_{L^2(\Omega;H)} \leq C(h^{2s} + \Delta t^s)\|X_0\|_{L^2(\Omega;\dot{H}^{2s(1+\varepsilon)})} + K(h^\beta + \Delta t^\gamma)$$

*teljesül, ahol* $\gamma < \frac{\rho\beta}{2}$*.*

Hasonlóan a sztochasztikus hullámegyenlethez, amennyiben a kezdeti feltétel kellően sima, egy, mindkét tétel feltételeinek megfelelő memóriafüggvény esetén, a gyenge konvergencia rendje kétszerese az erős konvergencia rendjének.

# 3. Szemilineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenletek additív Wiener-zajjal

Ebben a fejezetben a szemilineáris sztochasztikus hővezetési egyenletnek és a szemilineáris sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek egy osztályának gyenge közelítését tárgyaljuk. Az ebben a fejezetben bemutatott eredményeknél megengedjük, hogy a megoldás funkcionáljai – habár speciális módon, de – függjenek a megoldás trajektóriáitól is. Ennek azért van jelentősége, mert így a megoldás statisztikai tulajdonságainak (például a kovarianciájának) közelítési rendjét is becsülni lehet, lásd Corollary 2.3.8 a dolgozatban.

## 3.1. Néhány alapfogalom és jelölés

Legyen $H$ egy valós, szeparábilis Hilbert-tér. Jelölje $\mathcal{G}^2_{\mathrm{p}}(H, \mathbb{R})$ azon $\phi : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvények osztályát, amelyek minden $h \in H$ esetén minden irányban kétszer differenciálhatóak, az elsőrendű iránymenti deriváltjaik megadhatók minden $e \in H$ esetén valamely $\phi'(h) \in H$ segítségével

$$\partial_e\phi(h) = \langle\phi'(h), e\rangle$$

alakban, és a másodrendű iránymenti deriváltjaik megadhatók minden $e, f \in H$ esetén valamely $\phi''(h) \in \mathcal{L}(H)$ szimmetrikus operátor segítségével

$$\partial^2_{e,f}\phi(h) = \langle \phi''(h)e, f\rangle$$

alakban, valamint a $h \mapsto \partial_e\phi(h)$ és a $h \mapsto \partial^2_{e,f}\phi(h)$ függvények folytonosak minden $e, f \in H$ esetén. Legyen $m \in \mathbb{N}_0$, és jelölje $\mathcal{G}^{2,m}_{\mathrm{p}}(H, \mathbb{R})$ azon $\phi \in \mathcal{G}^2_{\mathrm{p}}(H, \mathbb{R})$ függvények halmazát, amelyre

$$\|\phi''(h)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant C(1 + \|h\|^m), \quad h \in H,$$

teljesül. Végül jelölje $\mathcal{M}_T$ a korlátos Borel-mértékek halmazát a $[0, T]$ intervallumon.

## 3.2. A szemilineáris sztochasztikus hővezetési egyenlet

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, $d \leqslant 3$, egy korlátos és konvex tartomány és legyen $\Lambda := -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial^2/\partial\xi_j^2$ a Laplace-operátor az $L^2(\mathcal{D})$ függvénytéren homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel, azaz a $D(\Lambda) := \{v \in H^1_0(\mathcal{D}) : \Lambda u \in L^2(\mathcal{D})\} = \dot{H}^2$ értelmezési tartománnyal. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény, amelynek első és második deriváltja (globálisan) korlátos. Definiáljuk az $f : H \to H$ leképezést a

$$(f(r))(x) = g(r(x)),\ x \in \mathcal{D}, r \in H,$$

formulával és tekintsük a következő szemilineáris sztochasztikus hővezetési egyenletet absztrakt Itô-alakban írva:

$$\mathrm{d}X(t) + AX(t)\,\mathrm{d}t = f(X(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t),\ t \in (0, T]; \quad X(0) = x_0, \tag{22}$$

ahol $W$ egy $H$-beli $Q$-Wiener-folyamat az $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrációra nézve és $x_0 \in H$ egy determinisztikus kezdeti feltétel. Ha $(S(t))_{t\geq 0}$ jelöli a $-A$ operátor által generált operátorfélcsoportot, akkor a (22) egyenlet úgynevezett enyhe megoldása egy olyan $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $H$-értékű, előrejelezhető folyamat, amely minden $t \in [0, T]$ esetén 1 valószínűséggel kielégíti az

$$X(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t S(t-s)\,\mathrm{d}W(s) \tag{23}$$

egyenletet, ahol persze azt is megköveteljük, hogy a jobb oldalon szereplő tagok jóldefiniáltak legyenek. A 2.4. alfejezet jelöléseit használva tekintsük a (22) egyenlet megoldásának közelítését az úgynevezett Euler–Maruyama-módszer szerinti

$$
\begin{aligned}
X^n_{h,\Delta t} &= B^1_{h,\Delta t} X^{n-1}_{h,\Delta t} + \Delta t B^1_{h,\Delta t} f(X^{n-1}_{h,\Delta t}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} B^1_{h,\Delta t}\, \mathrm{d}W(s), \\
&\qquad\qquad n = 1, \ldots, N, \\
X^0_{h,\Delta t} &= P_h x_0,
\end{aligned} \tag{24}
$$

rekurzióval megadva, ahol $B^1_{h,\Delta t} = (I + \Delta t A_h)^{-1} P_h$. Ugyanúgy, mint a 2.4. alfejezetben, feltételezzük, hogy érvényes a (18) becslés. Az előzőekben tárgyaltaknál egy még általánosabb funkcionálosztályt tekintve, azaz megengedve azoknak a megoldás trajektóriáitól való függését is, a gyenge konvergencia rendjére a következő becslés adható.

**3.1. Tétel** (Theorem 2.3.7 a dolgozatban a (22) egyenletre alkalmazva)**.** *Legyen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ a (22) egyenlet enyhe megoldása, és legyen $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$ a (24) egyenlettel definiált közelítés. Legyen $\widetilde{X}_{h,\Delta t}(t) = X^n_{h,\Delta t}$, ha $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n = 0, \ldots, N-1$, és $\widetilde{X}_{h,\Delta t}(t) = X^N_{h,\Delta t}$, ha $t \in [t_N, T]$, ahol $\Delta t \in (0,1)$, $t_n = n\Delta t$, $n = 0, \ldots, N$, és $t_N < T \leqslant t_N + \Delta t$. Tegyük fel, hogy $x_0$ determinisztikus, $x_0 \in \dot{H}^3$ és hogy*

$$\left\| A^{\frac{\beta-1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely $\beta \in (0,1]$ esetén. Ha $K \geqslant 1$, $m_1, \ldots, m_K \in N_0$, $\varphi_i \in \mathcal{G}^{2,m_i}_{\mathrm{p}}(H, \mathbb{R})$, $\nu_i \in \mathcal{M}_T$, $i = 1, \ldots, K$, $\Phi(Z) = \prod_{i=1}^K \varphi_i(\int_0^T Z(t)\,\mathrm{d}\nu_{i,t})$ és $\gamma \in [0, \beta)$, akkor létezik egy $h$-tól és $\Delta t$-től független $C > 0$ állandó, amelyre*

$$\left|\mathbb{E}\big(\Phi(\widetilde{X}_{h,\Delta t}) - \Phi(X)\big)\right| \leqslant C\big(h^{2\gamma} + \Delta t^{\gamma}\big), \quad h, \Delta t \in (0,1),$$

*teljesül.*

Az erős konvergencia rendjével kapcsolatban igaz a következő tétel.

**3.2. Tétel** (Theorem 2.3.2 a dolgozatban a (22) egyenletre alkalmazva)**.** *Legyen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ a (22) egyenlet enyhe megoldása, és legyen $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$ a (24) egyenlettel definiált közelítés. Tegyük fel, hogy $x_0$ determinisztikus, $x_0 \in \dot{H}^3$ és hogy*

$$\left\| A^{\frac{\beta-1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely $\beta \in (0,1]$ esetén. Ekkor minden $\gamma \in [0,\beta)$ és $p \in [2,\infty)$ esetén létezik egy $h$-tól és $\Delta t$-től független $C > 0$ állandó, amelyre*

$$\max_{n\in\{0,\dots,N\}} \left\| X^n_{h,\Delta t} - X(t_n) \right\|_{L^p(\Omega;H)} \leqslant C\big(h^\gamma + \Delta t^{\frac{\gamma}{2}}\big), \quad h, \Delta t \in (0,1),$$

*teljesül.*

A két tételt összevetve láthatjuk, hogy ebben az esetben is kétszer akkora a gyenge konvergencia rendje, mint az erős konvergenciáé.

## 3.3. Szemilineáris sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek

Tekintsük a következő sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletet absztrakt Itô-alakban írva:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X + \left( \int_0^t b(t-s) A X(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t &= f(X(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W, \quad t \in (0,T]; \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{25}$$

ahol $A$, $f$ és $W$ ugyanazt jelöli, mint a 3.2. alfejezetben. Ha $(S(t))_{t\in[0,T]}$ jelöli a (15) egyenlet rezolvenscsaládját, akkor a (25) egyenlet úgynevezett enyhe megoldása egy olyan $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $H$-értékű, előrejelezhető folyamat, amely minden $t \in [0,T]$ esetén 1 valószínűséggel kielégíti a a (23) egyenletet, ahol persze azt is megköveteljük, hogy a jobb oldalon szereplő tagok jóldefiniáltak legyenek. A (25) egyenlet megoldásának közelítését a lineáris esetben alkalmazott algoritmusnak a szemilineáris esetre adaptált, alábbi változatával végezzük el a 2.4. alfejezet jelöléseit használva:

$$\begin{aligned} &X^n_{h,\Delta t} - X^{n-1}_{h,\Delta t} + \Delta t \left( \sum_{k=1}^n \omega_{n-k}\, A_h X^k_{h,\Delta t} \right) \\ &\qquad\qquad = \Delta t P_h f(X^{n-1}_{h,k}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_h\,\mathrm{d}W(t), \quad n = 1,\dots,N, \\ &X^0_{h,k} = P_h x_0. \end{aligned} \tag{26}$$

Ugyanúgy, mint a 2.4. alfejezetben, feltételezzük, hogy érvényes a (18) becslés. A 3.2. alfejezetben bevezetett funkcionálosztályt tekintve a gyenge konvergencia rendjére a következő becslés adható.

**3.3. Tétel** (Theorem 2.3.7 a dolgozatban a (25) egyenletre alkalmazva)**.** *Tegyük fel, hogy a b memóriafüggvény teljesíti a 2.4. és a 2.6.*

*Feltételeket. Legyen* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *a (25) egyenlet enyhe megoldása, és legyen* $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\dots,N}$ *a (26) egyenlettel definiált közelítés. Legyen* $\widetilde{X}_{h,\Delta t}(t) = X^n_{h,\Delta t}$*, ha* $t \in [t_n, t_{n+1})$*,* $n = 0,\dots,N-1$*, és* $\widetilde{X}_{h,\Delta t}(t) = X^N_{h,\Delta t}$*, ha* $t \in [t_N, T]$*, ahol* $\Delta t \in (0,1)$*,* $t_n = n\Delta t$*,* $n = 0,\dots,N$*, és* $t_N < T \leqslant t_N + \Delta t$*. Tegyük fel, hogy* $x_0$ *determinisztikus,* $x_0 \in \dot{H}^3$ *és hogy*

$$\left\|A^{\frac{\beta-1/\rho}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely* $\beta \in (0, 1/\rho]$ *esetén. Ha* $K \geqslant 1$*,* $m_1,\dots,m_K \in \mathbb{N}_0$*,* $\varphi_i \in \mathcal{G}^{2,m_i}_{\mathrm{p}}(H,\mathbb{R})$*,* $\nu_i \in \mathcal{M}_T$*,* $i = 1,\dots,K$*,* $\Phi(Z) = \prod_{i=1}^K \varphi_i(\int_0^T Z(t)\,\mathrm{d}\nu_{i,t})$ *és* $\gamma \in [0,\beta)$*, akkor létezik egy* $h$*-tól és* $\Delta t$*-től független* $C > 0$ *állandó, amelyre*

$$\left|\mathbb{E}\big(\Phi(\widetilde{X}_{h,\Delta t}) - \Phi(X)\big)\right| \leqslant C\big(h^{2\gamma} + \Delta t^{\rho\gamma}\big), \quad h, \Delta t \in (0,1),$$

*teljesül.*

Az erős konvergencia rendjével kapcsolatban igaz a következő tétel.

**3.4. Tétel** (Theorem 2.3.2 a dolgozatban a (25) egyenletre alkalmazva)**.** *Tegyük fel, hogy a* $b$ *memóriafüggvény teljesíti a 2.4. és a 2.6. Feltételeket. Legyen* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *a (25) egyenlet enyhe megoldása, és legyen* $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\dots,N}$ *a (26) egyenlettel definiált közelítés. Tegyük fel, hogy* $x_0$ *determinisztikus,* $x_0 \in \dot{H}^3$ *és hogy*

$$\left\|A^{\frac{\beta-1/\rho}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely* $\beta \in (0, 1/\rho]$ *esetén. Ekkor minden* $\gamma \in [0,\beta)$ *és* $p \in [2,\infty)$ *esetén létezik egy* $h$*-tól és* $\Delta t$*-től független* $C > 0$ *állandó, amelyre*

$$\max_{n\in\{0,\dots,N\}} \left\|X^n_{h,\Delta t} - X(t_n)\right\|_{L^p(\Omega;H)} \leqslant C\big(h^{\gamma} + \Delta t^{\frac{\rho\gamma}{2}}\big), \quad h, \Delta t \in (0,1),$$

*teljesül.*

A két tételt összevetve láthatjuk, hogy ebben az esetben is kétszer akkora a gyenge konvergencia rendje, mint az erős konvergenciáé.

# 4. Lineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenletek additív Lévy-zajjal

Ebben a fejezetben additív Lévy-zajos lineáris sztochasztikus differenciálegyeletek gyenge közelítését tárgyaljuk. Kiemelten foglalkozunk a sztochasztikus hővezetési egyenlettel (4.3. alfejezet), a sztochasztikus hullámegyenlettel (4.4. alfejezet), illetve a sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek egy osztályával (4.5. alfejezet). A hibabecsléseket a 4.2. alfejezetben kimondott általános reprezentációs tétel segítségével lehet bebizonyítani.

## 4.1. Néhány alapfogalom és jelölés

Először bevezetjük a Hilbert-tér értékű Lévy-folyamat fogalmát. A téma egy teljeskörű tárgyalása például az [56] monográfiában található meg. Legyen $U_1$ egy valós és szeparábilis Hilbert-tér és $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ egy sztochasztikus alaptér, amely megfelel a szokásos feltételeknek. Az $L = (L(t))_{t\geqslant 0}$ sztochasztikus folyamatot egy $U_1$-értékű Lévy-folyamatnak nevezzük, ha $L = (L(t))_{t\geqslant 0}$ egy $U_1$ értékű $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptált sztochasztikus folyamat, amelyre igaz, hogy minden $t, h \geqslant 0$, esetén $L(t+h) - L(t)$ független $\mathcal{F}_t$-től. A továbbiakban $L$-nek mindig egy sztochasztikusan ekvivalens càdlàg módosítását tekintjük. Feltesszük, hogy $L$ nulla várható értékű és négyzetesen integrálható, azaz hogy $\mathbb{E}L(t) = 0$ és $\mathbb{E}\|L(t)\|_{U_1}^2 < \infty$. Ezenkívül, mivel a Wiener-folyamatokat már tárgyaltuk, feltételezzük azt is, hogy $L$-nek nincs Wiener-komponense. Jelölje $\nu$ az $L$ Lévy-folyamat ugrásainak intenzitásának eloszlását. A feltételeinkből az következik, hogy

$$\int_{U_1} \|y\|_{U_1}^2 \nu(\mathrm{d}y) < \infty,$$

és hogy az $L$ folyamat karakterisztikus függvénye $t \geqslant 0$ és $x \in U_1$ esetén az

$$\mathbb{E}e^{i\langle x, L(t)\rangle_{U_1}} = \exp\Big\{ -t \int_{U_1} \big(1 - e^{i\langle x,y\rangle_{U_1}} + i\langle x, y\rangle_{U_1}\big)\nu(\mathrm{d}y)\Big\}$$

alakban írható fel. Jelölje $Q_1 \in \mathcal{L}_1(U_1)$ az $L$ folyamat kovariancia operátorát. A $Q_1$ operátorra teljesül, hogy

$$\langle Q_1 x, y\rangle_{U_1} = \int_{U_1} \langle x, z\rangle_{U_1} \langle y, z\rangle_{U_1} \nu(\mathrm{d}z), \quad x, y \in U_1,$$

lásd [56, Theorem 4.47]. Jelölje

$$(U_0, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{U_0}) := \big(Q_1^{1/2}(U_1), \langle Q_1^{-1/2}\,\cdot\,, Q_1^{-1/2}\,\cdot\,\rangle_{U_1}\big)$$

az $L$ folyamat Cameron–Martin-terét, ahol $Q_1^{-1/2}$ a $Q_1^{1/2}$ operátor pszeudoinverzét jelöli, ha $Q_1$ nem injektív. Legyen továbbá $U$ egy olyan

Hilbert-tér, amelyre igaz, hogy

$$U_0 \subset U \subset U_1,$$

ahol a tartalmazások folytonos beágyazást is jelentenek. Jelölje $J_0 \in \mathcal{L}(U_0, U)$ az $U_0$ Hilbert-tér $U$-ba való beágyazási operátorát és legyen

$$Q := J_0 J_0^* \in \mathcal{L}(U).$$

Douglas tétele (lásd például [56, Appendix A.4] vagy [59, Corollary C.0.6]) segítségével belátható, hogy az $L$ folyamat $U_0$ Cameron–Martin-tere előállítható az

$$(U_0, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{U_0}) = \big(Q^{1/2}(U), \langle Q^{-1/2}\,\cdot\,, Q^{-1/2}\,\cdot\,\rangle_U\big)$$

alakban is. Megjegyezzük, hogy ellentétben az előzőekben tárgyalt Wiener-folyamatokkal, Lévy-folyamatok esetén a $Q_1$ illetve a $Q$ operátorok nem határozzák meg egyértelműen a folyamat eloszlását. Ennek ellenére ezek az operátorok fontos szerepet játszanak az analízis során.

Végül szükség lesz a sztochasztikus Itô-integrál egy egyszerűsített változatára determinisztikus integrandus esetén. Mivel feltettük, hogy $L$ négyzetesen integrálható, így az integrandusok osztálya és az Itô-izometria alakja megegyezik a Wiener-folyamatoknál tárgyaltakkal. Legyen $F\colon [0,\infty) \to \mathcal{L}_2(U_0, H)$ mérhető függvény, amely négyzetesen integrálható, ahol $H$ egy valós, szeparábilis Hilbert-tér, azaz

$$\int_0^t \|F(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)}\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Ekkor az $\int_0^t F(s)\,\mathrm{d}L(s)$ egy jóldefiniált valószínűségi változó, amelyre igaz az úgynevezett Itô-izometria alábbi alakja:

$$\Big\| \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}L(s) \Big\|^2_{L^2(\Omega;H)} = \int_0^t \|F(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)}\,\mathrm{d}s.$$

Ennek az izometriának az a következménye, hogy a Wiener-zaj esetében a lineáris egyenletekkel kapcsolatban ismert erős hibabecslések egy az egyben átvihetők az ebben a fejezetben tárgyalt egyenletekre is, így a továbbiakban csak a gyenge hiba rendjével foglalkozunk.

## 4.2. A gyenge hiba egy általános kifejtése

Ebben az alfejezetben bemutatjuk azt az általános tételt, amelynek segítségével a dolgozat harmadik fejezetében vizsgált egyenlettípusok esetén a numerikus megoldás gyenge konvergenciájának rendjét tudjuk meghatározni. A Wiener-zajos lineáris egyenletekhez hasonlóan jelentősége abban rejlik, hogy alkalmazható mind parabolikus, mind pedig hiperbolikus egyenletekre, de még Volterra-típusú integrodifferenciálegyenletek esetén is, akár szemi-, akár teljes diszkretizációt tekintve. Ehhez a következő feltételezésekkel élünk (részben összefoglalva az előbb tárgyaltakat).

**4.1. Feltétel.** A következő feltételek teljesülését követeljük meg:

(i) $H$, $U$ és $U_1$ valós, szeparábilis-Hilbert terek;

(ii) $L = (L(t))_{t \geqslant 0}$ egy $U_1$-értékű, nulla várható értékű, négyzetesen integrálható, Wiener-komponenssel nem rendelkező Lévy-folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbb{P})$ sztochasztikus alaptéren $U_0$ Cameron–Martin-térrel, amelyre igaz, hogy $U_0 \subset U \subset U_1$, ahol a tartalmazás folytonos beágyazást is feltételez;

(iii) $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H)$;

(iv) $B \in \mathcal{L}(U, H)$ és $(E(t))_{t \in [0,T]} \subset \mathcal{L}(H)$ egy erősen folytonos operátorcsalád, amelyre teljesül, hogy

$$\int_0^T \|E(t)B\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)} \mathrm{d}t < \infty;$$

(v) minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan $\Phi_\varepsilon \in \mathcal{L}_2(U_0, H)$ és egy $C_\varepsilon > 0$ állandó, amelyekre teljesül, hogy

$$\|E(t)Bx\|_H \leqslant \|\Phi_\varepsilon x\|_H, \quad (t, x) \in [\varepsilon, T] \times U_0;$$

(vi) $(\widetilde{E}(t))_{t \in [0,T]} \subset \mathcal{L}(H)$ egy olyan operátorcsalád, amelyre teljesül, hogy a $t \mapsto \widetilde{E}(t)\widetilde{B}$, mint $[0, T] \to \mathcal{L}_2(U_0, H)$ leképezés, mérhető és

$$\int_0^T \|\widetilde{E}(t)B\|^2_{\mathcal{L}_2(U_0,H)} \mathrm{d}t < \infty.$$

Legyen $Y$ és $\widetilde{Y}$ a következő módon definiálva:

$$Y(t) := E(T)X_0 + \int_0^t E(T-s)B \,\mathrm{d}L(s), \quad t \in [0, T],$$

valamint

$$\widetilde{Y}(t) := \widetilde{E}(T)X_0 + \int_0^t \widetilde{E}(T-s)\widetilde{B} \,\mathrm{d}L(s), \quad t \in [0, T],$$

ahol $T > 0$ és $(E(t))_{t\in[0,T]}$, valamint $(\widetilde{E}(t))_{t\in[0,T]}$ a $H$ Hilbert-tér korlátos operátoraiból álló operátorcsaládok. Tekintsük a következő különbséget:

$$e(T) = \mathbb{E}\left(G(\widetilde{Y}(T)) - G(Y(T))\right), \tag{27}$$

ahol $G : H \to \mathbb{R}$ egy adott funkcionál. Legyen

$$Z(t,\tau,\xi) := \xi + \int_\tau^t E(T-s)B \,\mathrm{d}L(s), \quad t \in [\tau, T],$$

ahol $\tau \in [0,T)$ és $\xi$ egy $H$-értékű, $\mathcal{F}_\tau$-mérhető valószínűségi változó. Legyen $u : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ a következő módon definiálva:

$$u(t,x) := \mathbb{E}\, G(Z(T,t,x)), \quad (t,x) \in [0,T] \times H,$$

ahol $G : H \to \mathbb{R}$ egy adott funkcionál.

**4.2. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a 4.1. Feltétel teljesül, és legyen $G : H \to \mathbb{R}$ egy olyan funkcionál, amelyre igaz, hogy $G \in C^2(H,\mathbb{R})$ és $G'' \in C_b(H,\mathcal{L}(H))$. Ekkor*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \int_{U_1} \Big| & u\big(t, \widetilde{Y}(t) + \widetilde{E}(T-t)By\big) - u\big(t, \widetilde{Y}(t) + E(T-t)By\big) \\ & - \left\langle u_x(t,\widetilde{Y}(t)), \big(\widetilde{E}(T-t)B - E(T-t)B\big)y\right\rangle_H \Big| \,\nu(\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}t \;<\; \infty,\end{aligned}$$

*és a (27) egyenlettel definiált $e(T)$ gyenge hiba felírható az*

$$\begin{aligned}e(T) &= \mathbb{E}\big\{u(0,\widetilde{E}(T)X_0) - u(0,E(T)X_0)\big\} \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \int_{U_1} \Big\{ u\big(t, \widetilde{Y}(t) + \widetilde{E}(T-t)By\big) - u\big(t, \widetilde{Y}(t) + E(T-t)By\big) \\ &\qquad - \left\langle u_x(t,\widetilde{Y}(t)), \big(\widetilde{E}(T-t)B - E(T-t)B\big)y\right\rangle_H \Big\} \,\nu(\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{28}$$

*alakban.*

Ha összehasonlítjuk a gyenge hiba Wiener-zaj esetén belátott (6) egyenlet szerinti általános kifejtését és a Lévy-zaj esetén belátott (28) egyenlet szerinti általános kifejtését, akkor láthatjuk, hogy ezek jelentősen különböznek.

Az alábbiakban kimondott állításokat a 4.2. Tétel segítségével láthatjuk be. Megjegyezzük, hogy mind a sztochasztikus hővezetési egyenlet, mind a sztochasztikus hullámegyenlet megfelelően megválasztott állapottér, valamint $A$ és $B$ operátorok segítségével felírható a következő absztrakt Itô-alakban:

$$\mathrm{d}X(t) + AX(t)\,\mathrm{d}t = B\,\mathrm{d}L(t), \quad t \geqslant 0; \quad X(0) = X_0. \tag{29}$$

A (29) egyenlet gyenge megoldása a Wiener-zaj esetén bevezetett gyenge megoldás fogalmával analóg módon definiálható, mint egy olyan $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $H$-értékű, előrejelezhető folyamat, amelynek trajektóriái 1 valószínűséggel Bochner-integrálhatóak a $[0,T]$ intervallumon, valamint minden $t \in [0,T]$ és $\eta \in \mathcal{D}(A^*)$ esetén az

$$\langle X(t), \eta\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*\eta\rangle\,\mathrm{d}s = \langle X_0, \eta\rangle + \int_0^t \langle \eta, B\,\mathrm{d}L(s)\rangle$$

egyenlet 1 valószínűséggel teljesül. A gyenge megoldás az

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)B\,\mathrm{d}L(s)$$

formulával adható meg, ahol $(E(t))_{t\geq 0}$ a $-A$ operátor által generált operátorfélcsoport, amennyiben persze a sztochasztikus integrál jóldefiniált, és ha $X_0$-ról feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0$-mérhető.

## 4.3. A sztochasztikus hővezetési egyenlet

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos és konvex tartomány és legyen $\Lambda := -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial^2/\partial\xi_j^2$ a Laplace-operátor az $L^2(\mathcal{D})$ függvénytéren homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel, azaz a $D(\Lambda) := \{v \in H_0^1(\mathcal{D}) :\ \Lambda u \in L^2(\mathcal{D})\} = \dot{H}^2$ értelmezési tartománnyal. Ekkor a

$$H := U := L^2(\mathcal{D}), \quad (A, D(A)) := (\Lambda, D(\Lambda)), \quad B := \mathrm{id}_{L^2(\mathcal{D})},$$

választással a (29) absztrakt Itô-féle sztochasztikus differenciálegyenlet a sztochasztikus hővezetési egyenletet írja le.

Az eddigieknek megfelelően tekintsük a $H_0^1(\mathcal{D})$ függvénytér egy $(V_h)_{h>0} \subset H_0^1(\mathcal{D})$ véges dimenziós altércsaládját és legyenek a $P_h : H \to V_h$ és $R_h : \dot{H}^1 \to V_h$ operátorok a $H$, illetve a $\dot{H}^1$ skalárszorzatainak megfelelő merőleges vetítések. A diszkrét $A_h : V_h \to V_h$ Laplace-operátort a (19) egyenlettel definiáljuk. Az $R_h$ Ritz-projekcióról feltételezzük, hogy kielégíti a (18) hibabecslést.

A sztochasztikus hővezetési egyenlet időbeli diszkretizációját a $[0,T]$ időintervallumon az implicit Euler-módszer segítségével adjuk meg

$\Delta t = T/N$ lépésközzel, ahol $N \in \mathbb{N}$. Legyenek az időbeli diszkretizáció rácspontjai $t_n = n\Delta t$, $n = 0, \dots, N$. A sztochasztikus hővezetési egyenlet megoldásának $(X^n_{h,\Delta t})_{n=1,\dots,N}$ közelítését a

$$\begin{aligned} X^n_{h,\Delta t} - X^{n-1}_{h,\Delta t} + \Delta t A_h X^n_{h,\Delta t} &= P_h(L(t_n) - L(t_{n-1})),\ n = 1, \dots, N; \\ X^0_{h,\Delta t} &= P_h X_0 \end{aligned} \tag{30}$$

algoritmus szerint végezzük el.

**4.3. Tétel.** *Legyen $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H)$, és tegyük fel, hogy*

$$\|A^{(\beta-1)/2} Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely $\beta \in (0, 1]$ esetén. Legyen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ a (29) sztochasztikus hővezetési egyenlet gyenge megoldása, valamint legyen $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\dots,N}$ a (30) algoritmus által definiált közelítés. Ha $g : H \to \mathbb{R}$ egy olyan funkcionál, amelyre $g \in C^2(H, \mathbb{R})$ és $g'' \in C_b(H, \mathcal{L}(H))$ teljesülnek, akkor létezik egy $h$-tól és $\Delta t$-től független $C > 0$ állandó, amelyre igaz, hogy*

$$\left|\mathbb{E}\big(g(X^N_{h,\Delta t}) - g(X(T))\big)\right| \leqslant C(h^{2\beta} + \Delta t^{\beta})|\log(h^2 + \Delta t)|,$$

*amennyiben $h^2 + \Delta t \leqslant 1/e$.*

## 4.4. A sztochasztikus hullámegyenlet

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos és konvex tartomány. A 2.3. alfejezet jelöléseit használva legyen

$$H := \mathcal{H}^0 = \dot{H}^0 \times \dot{H}^{-1} = L^2(\mathcal{D}) \times H^{-1}(\mathcal{D}), \quad U := \dot{H}^0 = L^2(\mathcal{D}),$$

valamint legyenek $A : D(A) \subset H \to H$ és $B \in \mathcal{L}(U, H)$ a (9) egyenletben definiált operátorok. Ezekkel a választásokkal a (29) absztrakt Itô-féle sztochasztikus differenciálegyenlet a sztochasztikus hullámegyenlet elsőrendű rendszerként felírt alakját adja meg, ahol a megoldási vektor $(X(t))_{t\geqslant 0} = ([X_1(t), X_2(t)]^\top)_{t\geqslant 0}$. A sztochasztikus hullámegyenlet megoldásának $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\dots,N}$ közelítését, megint a 2.3. alfejezet jelöléseit használva, a

$$\begin{aligned} &X^n_{h,\Delta t} = E_{h,\Delta t}\big(X^{n-1}_{h,\Delta t} + P_h B(L(t_n) - L(t_{n-1}))\big), \quad n = 1, \dots, N; \\ &X^0_{h,\Delta t} = P_h X_0, \end{aligned} \tag{31}$$

algoritmus szerint végezzük el. A (11) egyenlettel definiált Ritz-projekcióról itt is azt feltételezzük, hogy kielégíti a (12) hibabecslést. A gyenge konvergencia rendjére nézve igaz a következő eredmény.

**4.4. Tétel.** *Legyen $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; \mathcal{H}^{2\beta})$ valamely $\beta > 0$ esetén, és legyen $g : \dot{H}^0 \to \mathbb{R}$ egy olyan funkcionál, amelyre $g \in C^2(\dot{H}^0, \mathbb{R})$ és $g'' \in C_b(\dot{H}^0, \mathcal{L}(\dot{H}^0))$ teljesülnek. Tegyük fel, hogy a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül:*

(i) $\|\Lambda^{(\beta-1)/2} Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$ *és* $\sup_{x \in \dot{H}^0} \|\Lambda^{\frac{\beta}{2}} g''(x) \Lambda^{-\frac{\beta}{2}}\|_{\mathcal{L}(\dot{H}^0)} < \infty$,

(ii) $\lim_{m\to\infty} \int_{U_1} \|\Lambda^{-\frac{1}{2}} p_m y\|_{\dot{H}^0} \|\Lambda^{\beta-\frac{1}{2}} p_m y\|_{\dot{H}^0}\, \nu(\mathrm{d}y) < \infty$, *ahol $p_m$ a $\dot{H}^0$ térnek a $\Lambda$ operátor első $N$ ortonormált sajátvektora által kifeszített* $\mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *altérre való merőleges vetítését jelöli.*

*Legyen $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$ a (31) algoritmus által definiált közelítés, ahol $T = N\Delta t$. Ekkor létezik egy $h$-tól és $\Delta t$-től független $C > 0$ állandó, amelyre $h, \Delta t \in (0,1)$ esetén*

$$\left|\mathbb{E}\big(g(X^N_{h,\Delta t,1}) - g(X_1(T))\big)\right| \leqslant C\big(h^{\min(2\beta\frac{r}{r+1}, r)} + \Delta t^{\min(2\beta\frac{p}{p+1}, 1)}\big)$$

*teljesül.*

## 4.5. Sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletek

Az eddigiekhez hasonlóan legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos és konvex tartomány, és legyen $\Lambda := -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial^2/\partial\xi_j^2$ a Laplace-operátor a $H := L^2(\mathcal{D})$ függvénytéren homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel, azaz a $D(\Lambda) := \{v \in H^1_0(\mathcal{D}) :\ \Lambda u \in L^2(\mathcal{D})\} = \dot{H}^2$ értelmezési tartománnyal. Tekintsük a következő, absztrakt Itô-alakban megadott sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenletet:

$$\mathrm{d}X(t) + \left(\int_0^t b(t-s) A X(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}L(t),\ t \in (0,T], \tag{32}$$

az $X(0) = X_0 \in H$ kezdeti feltétel mellett. A (32) egyenlet gyenge megoldása a Wiener-zaj esetén bevezetett gyenge megoldás fogalmával analóg módon definiálható, mint egy olyan $(X(t))_{t\in[0,T]}$, $H$-értékű, előrejelezhető folyamat, amelynek trajektóriái 1 valószínűséggel Bochner-integrálhatóak a $[0,T]$ intervallumon, valamint minden $t \in [0,T]$ és $\eta \in \mathcal{D}(A^*)$ esetén az

$$\langle X(t), \eta\rangle + \int_0^t \int_0^r b(r-s)\, \langle X(s), A^*\eta\rangle\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}r = \langle X_0, \eta\rangle + \int_0^t \langle \eta, \mathrm{d}L(s)\rangle$$

egyenlet 1 valószínűséggel teljesül. A gyenge megoldás az

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)\,\mathrm{d}L(s)$$

formulával adható meg, ahol $(S(t))_{t\geq 0}$ a (15) egyenlet rezolvenscsaládja, amennyiben persze a sztochasztikus integrál jóldefiniált, és ha $X_0$-ról feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0$-mérhető. A Wiener-zaj esetén a 2.4. alfejezetben bevezetett algoritmust követve és ugyanazt a jelölést használva, tekintsük a (32) egyenlet megoldásának $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$ közelítését a következő iteráció szerint:

$$X^n_{h,\Delta t} - X^{n-1}_{h,\Delta t} + \Delta t\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_{n-k}\,A_h X^k_{h,\Delta t}\right) = P_h(L(t_n) - L(t_{n-1})),\ n \geqslant 1, \tag{33}$$

ahol $X^0_{h,\Delta t} = P_h X_0$ és ahol az $(\omega_k)_{k\geq 0}$ súlyok a (21) kifejtésből számolhatóak.

**4.5. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a b memóriaföggvény teljesíti a 2.4. és a 2.6. Feltételeket. Legyen $T > 0$, legyen $(X(t))_{t\in[0,T]}$ a (32) egyenlet gyenge megoldása, és legyen $(X^n_{h,\Delta t})_{n=0,\ldots,N}$ a (33) algoritmussal definiálva, ahol $T = N\Delta t$. Legyen $g : H \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre $g \in C^2(H,\mathbb{R})$ és $g'' \in C_b(H,\mathcal{L}(H))$ teljesülnek, és legyen $X_0 \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0,\mathbb{P};H)$. Ekkor, ha*

$$\|A^{(\beta-\frac{1}{\rho})/2}Q^{1/2}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$$

*valamely $0 < \beta \leq 1/\rho$ esetén, akkor létezik egy $h$-tól és $\Delta t$-től független $C > 0$ állandó, amelyre $h^{2/\rho} + \Delta t \leqslant 1/e$ esetén igaz, hogy*

$$\left|\mathbb{E}\left(g(X^N_{h,\Delta t}) - g(X(T))\right)\right| \leqslant C \ln\left(\frac{T}{h^{2/\rho}+\Delta t}\right)(\Delta t^{\rho\beta} + h^{2\beta}).$$

# Hivatkozások


[1] A. Andersson, M. Kovács, and S. Larsson, Weak error analysis for semilinear stochastic Volterra equations with additive noise, *J. Math. Anal. Appl.* **437**(3) (2016) 1283–1304.

[2] A. Andersson, R. Kruse, and S. Larsson, Duality in refined Sobolev-Malliavin spaces and weak approximation of SPDE, *Stochastic Partial Differential Equations: Analysis and Computations* **4** (2016) 113–149.

[3] A. Andersson and S. Larsson, Weak convergence for a spatial approximation of the nonlinear stochastic heat equation, *Math. Comp.* **85** (2016) 1335–1358.

[4] B. Baeumer, M. Geissert, and M. Kovács, Existence, uniqueness and regularity for a class of semilinear stochastic Volterra equations with multiplicative noise, *J. Diff. Eq.* **258**(2) (2015) 535–554.

[5] B. Baeumer, M. Haase, and M. Kovács, Unbounded functional calculus for bounded groups with applications, *J. Evol. Equ.* **9**(1) (2009) 171–195.

[6] B. Baeumer and M. Kovács, Approximating multivariate tempered stable processes, *J. Appl. Probab.* **49**(1) (2012) 167–183.

[7] B. Baeumer, M. Kovács, and M. M. Meerschaert, Fractional reproduction-dispersal equations and heavy tail dispersal kernels, *Bull. Math. Biol.* **69**(7) (2007) 2281–2297.

[8] B. Baeumer, M. Kovács, and M. M. Meerschaert, Numerical solutions for fractional reaction-diffusion equations, *Comput. Math. Appl.* **55**(10) (2008) 2212–2226.

[9] B. Baeumer, M. Kovács, and M. M. Meerschaert, Subordinated multiparameter groups of linear operators: properties via the transference principle, *Functional analysis and evolution equations*, 35–50, Birkhäuser, Basel, 2008.

[10] B. Baeumer, M. Kovács, M. M. Meerschaert, and H. Sankaranarayanan, Boundary conditions for fractional diffusion, *J. Comput. and Appl. Math.* **336** (2018) 408–424.

[11] B. Baeumer, M. Kovács, M. M. Meerschaert, R. L. Schilling, and P. Straka, Reflected spectrally negative stable processes and their governing equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (1) (2016) 227–248.

[12] B. Baeumer, M. Kovács, and H. Sankaranarayanan, Higher order Grünwald approximations of fractional derivatives and fractional powers of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367**(2) (2015), 813–834.

[13] B. Baeumer, M. Kovács, H. Sankaranarayanan, Fractional partial differential equations with boundary conditions, *J. Differential Equations* **264**(2) (2018) 1377–1410.

[14] A. Barth, A finite element method for martingale-driven stochastic partial differential equations, *Commun. Stoch. Anal.* **4**(3) (2010) 355–375.

[15] A. Barth and A. Lang, Simulation of stochastic partial differential equations using finite element methods, *Stochastics* **84**(2-3) (2012) 217–231.

[16] A. Barth and A. Lang, Milstein approximation for advection-diffusion equations driven by multiplicative noncontinuous martingale noises, *Appl. Math. Optim.* **66** (2012) 387–413.

[17] A. Barth and T. Stüwe, Weak convergence of Galerkin approximations of stochastic partial differential equations driven by additive Lévy noise, *Math. Comput. Simulation* **143** (2018) 215–225.

[18] C. E. Bréhier, M. Hairer, and A. Stewart, Weak error estimates for trajectories of SPDEs under Spectral Galerkin discretization, J. Comput. Math. **36**(2) (2018) 159–182.

[19] D. Conus, A. Jentzen, and R. Kurniawan, Weak convergence rates of spectral Galerkin approximations for SPDEs with nonlinear diffusion coefficients, *Preprint*, 2014, arXiv:1408.1108v1.

[20] G. Da Prato, A. Jentzen, and M. Röckner, A mild Itô formula for SPDEs, *Preprint*, 2012, arXiv:1009.3526v4.

[21] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[22] A. Debussche, Weak approximation of stochastic partial differential equations: the nonlinear case, *Math. Comp.* **80** (2011) 89–117.

[23] A. Debussche and J. Printems, Weak order for the discretization of the stochastic heat equation, *Math. Comp.* **78** (2009) 845–863.

[24] A. de Bouard and A. Debussche, Weak and strong order of convergence of a semidiscrete scheme for the stochastic nonlinear Schrödinger equation, *Appl. Math. Optim.* **54**(3) (2006) 369–399.

[25] L. J. de Naurois, A. Jentzen, and T. Welti, Weak convergence rates for spatial spectral Galerkin approximations of semilinear stochastic wave equations with multiplicative noise, *Preprint*, 2015, arXiv:1508.05168v1.

[26] T. Dunst, E. Hausenblas, and A. Prohl, Approximate Euler method for parabolic stochastic partial differential equations driven by space-time Lévy noise, *SIAM J. Numer. Anal.* **50**(6) (2012) 2873–2896.

[27] D. Furihata, M. Kovács, S. Larsson, and F. Lindgren, Strong convergence of a fully discrete finite element approximation of the stochastic Cahn–Hilliard equation, *SIAM. J. Numer. Anal.* **56**(2) (2018) 708–731.

[28] M. Geissert, M. Kovács, and S. Larsson, Rate of weak convergence of the finite element method for the stochastic heat equation with additive noise, *BIT* **49**(2) (2009) 343–356.

[29] E. Hausenblas, Finite element approximation of stochastic partial differential equations driven by Poisson random measures of jump type, *SIAM J. Numer. Anal.* **46** (2008) 437–471.

[30] E. Hausenblas and I. Marchis, A numerical approximation of parabolic stochastic partial differential equations driven by a Poisson random measure, *BIT* **46** (2006) 773–811.

[31] E. Hausenblas, Weak approximation of the stochastic wave equation, *J. Comput. Appl. Math.* **235**(1) (2010) 33–58.

[32] J. Jacod, T.G. Kurtz, S. Méléard, and P. Protter, The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **41**(3) (2005) 523–558.

[33] A. Jentzen and P. E. Kloeden, The numerical approximation of stochastic partial differential equations, *Milan J. Math.* **77** (2009) 205–244.

[34] A. Karczewska and P. Rozmej, On Numerical Solutions to stochastic Volterra equations, arXiv:math/0409026.

[35] M. Kovács and M. M. Meerschaert, Ultrafast subordinators and their hitting times, *Publ. Inst. Math.* (Beograd) (N.S.) **80**(94) (2006) 193–206.

[36] M. Kovács, S. Larsson, and F. Lindgren, Strong convergence of the finite element method with truncated noise for semilinear parabolic stochastic equations with additive noise, *Numer. Algorithms* **53**(2-3) (2010) 309–320.

[37] M. Kovács, S. Larsson, and F. Lindgren, Spatial approximation of stochastic convolutions, *J. Comput. Appl. Math.* **235**(12) (2011), 3554–3570.

[38] M. Kovács, S. Larsson, and F. Lindgren, Weak convergence of finite element approximations of linear stochastic evolution equations with additive noise, *BIT* **52** (2012) 85–108.

[39] M. Kovács, S. Larsson, and F. Lindgren, Weak convergence of finite element approximations of linear stochastic evolution equations with additive noise II: Fully discrete schemes, *BIT* **53** (2013) 497–525.

[40] M. Kovács, S. Larsson, F. Lindgren, On the backward Euler approximation of the stochastic Allen–Cahn equation, *J. Appl. Probab.* **52**(2) (2015) 323–338.

[41] M. Kovács, S. Larsson, and F. Lindgren, On the discretisation in time of the stochastic Allen–Cahn equation, *Mathematische Nachrichten* **291**(5-6) (2018) 966–995.

[42] M. Kovács, S. Larsson, and A. Mesforush, Finite element approximation of the Cahn–Hilliard–Cook equation, *SIAM J. Numer. Anal.* **49**(6) (2011) 2407–2429.

[43] M. Kovács, S. Larsson, and F. Saedpanah, Finite element approximation of the linear stochastic wave equation with additive noise, *SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010) 408–427.

[44] M. Kovács, S. Larsson, and K. Urban, On wavelet-Galerkin methods for semilinear parabolic equations with additive noise, Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012, 481–499, Springer Proc. Math. Stat., 65, Springer, Heidelberg, 2013.

[45] M. Kovács, F. Lindner, and R. L. Schilling, Weak convergence of finite element approximations of linear stochastic evolution equations with additive Lévy noise, *SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif.* **3**(1) (2015) 1159–1199.

[46] M. Kovács and J. Printems, Strong order of convergence of a fully discrete approximation of a linear stochastic Volterra type evolution equation, *Math. Comp.* **83**(298) (2014) 2325– 2346.

[47] M. Kovács and J. Printems, Weak convergence of a fully discrete approximation of a linear stochastic evolution equation with a

positive-type memory term, *J. Math. Anal. Appl.* **413** (2014) 939–952.

[48] A. Lang, Mean square convergence of a semidiscrete scheme for SPDEs of Zakai type driven by square integrable martingales, *Procedia Computer Science* **1** (2012) 1615–1623.

[49] F. Lindner and R.L. Schilling, Weak order for the discretization of the stochastic heat equation driven by impulsive noise, *Potential Anal.* **38**(2) (2013) 345–379.

[50] C. Lubich, I. Sloan, and V. Thomée, Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term, *Math. Comp.* **65** (1996) 1–17.

[51] V. Mandrekar, B. Rüdiger, and S. Tappe, Itô's formula for Banach space-valued jump processes driven by Poisson random measures, In: C. Dalang, M. Dozzi, F. Russo (eds.): *Seminar on stochastic analysis, random fields and applications VII. Centro Stefano Franscini, Ascona, May 2011.* Progress in Probability **67**. Birkhäuser, Basel 2013, 171–186.

[52] R. Mikulevičius and C. Zhang, On the rate of convergence of weak Euler approximation for nondegenerate SDEs driven by Lévy processes, *Stochastic Process. Appl.* **121** (2011) 1720–1748.

[53] M. Métivier, *Semimartingales. A course on stochastic processes*, de Gruyter Studies in Mathematics 2, de Gruyter, Berlin, 1982.

[54] M. Métivier and J. Pellaumail, *Stochastic integration*, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, New York, 1980.

[55] S. Monniaux and J. Prüss, A theorem of the Dore-Venni type for noncommuting operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349**(1997) 4787–4814.

[56] S. Peszat and J. Zabczyk, *Stochastic partial differential equations with Lévy noise. An evolution equation approach,* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 113, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[57] E. Platen and N. Bruti-Liberati, *Numerical solutions of stochastic differential equations with jumps in finance,* Springer, Berlin, 2010.

[58] C. Prévôt, Existence, uniqueness and regularity w.r.t. the initial condition of mild solutions of SPDEs driven by Poisson noise, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **13**(1) (2010) 133–163.

[59] C. Prévôt and M. Röckner: *A concise course on stochastic partial differential equations.* Springer, Lecture Notes in Mathematics 1905, Berlin, 2007.

[60] P. Protter and D. Talay, The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations, *Ann. Probab.* **25**(1) (1997) 393–423.

[61] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications,* Birkhäuser, Basel, 1993.

[62] T. Shardlow, Weak convergence of a numerical method for a stochastic heat equation, *BIT Numerical Mathematics* **43** (2003) 179–193.

[63] D. Talay, Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of the solution of a SDE and applications, Filtering and control of random processes (Paris, 1983), 294–313, Lect. Notes Control Inf. Sci., 61, Springer, Berlin, 1984.

[64] X. Wang, Weak error estimates of the exponential Euler scheme for semi-linear SPDEs without Malliavin calculus, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **36** (2016) 481–497.

[65] X. Wang, An exponential integrator scheme for time discretization of nonlinear stochastic wave equation, *J. Sci. Comput.* **64**(1) (2015) 234–263.

[66] X. Wang and S. Gan, Weak convergence analysis of the linear implicit Euler method for semilinear stochastic partial differential equations with additive noise, *J. Math. Anal. Appl.* **398**(1) (2013)151–169.