

Kovács Mihály:

**A Galjorkin-féle végeselem-módszer gyenge konvergenciája
sztochasztikus parciális differenciálegyenletek közelítésekor
(Weak convergence of Galerkin finite element approximations
of stochastic evolution equations with additive noise)**

című doktori munkájának bírálata

Kovács Mihály doktori munkája egy 111 oldalból álló angol nyelvű értekezésből, valamint egy 36 oldalból álló magyar nyelvű tézisfüzetből áll. Az angol nyelvű értekezés 1 bevezetésre és 3 fejezetre van tagolva, és el van látva tartalomjegyzékkel és irodalomjegyzékkel. A magyar nyelvű tézisfüzet 4 fejezetet, valamint hivatkozásokat tartalmaz.

A mű, mely a szerző tudományos munkásságának egy jellemző részét mutatja be, a szerző 10 cikkére támaszkodik, de a szerzőnek megjelent még további 16 cikke, melyek szintén szorosan kapcsolódnak a disszertáció témájához. Dícséretreméltó, hogy egységesítette a terminológiát, a jelölésrendszert és a tárgyalási módot. A disszertáció tartalmazza a téma motivációit, helyét a matematikai kutatásokban, az eredmények előzményeit, és az eredmények részletes bizonyításait.

A disszertáció eredményeit úgy lehet tömören megfogalmazni, hogy bizonyos típusú sztochasztikus parciális differenciálegyenletek megoldásainak bizonyos típusú közelítéseinek gyenge illetve erős hibájára ad becsléseket. A szerzőnek a disszertációban prezentált eredményei inkább a numerikus matematika tárgykörébe sorolhatóak, mert a sztochasztikából szükséges eredmények (gondolok itt a vizsgált egyenletek megoldhatóságára, az Itô-formula megfelelő általánosításaira, a Malliavin-kalkulusból származtatható becslésekre és más hasonló eszközökre) többnyire már készen álltak a felhasználásra. Az egyenletekben additív Wiener- illetve Lévy-zaj szerepel, ezért a megoldások általában explicit módon előállíthatóak a konstans variálás módszerével. A Lévy-folyamat esetén négyzetes integrálhatóságot tételez fel, ami szintén könnyíti a helyzetet. A megfelelő numerikus módszerek kidolgozásához és a hibabecslések levezetéséhez viszont magas szintű és széles körű ismeretekre volt szükség a determinisztikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszereiből és a funkcionálanalízisből is.

Az értekezés bevezetője elég jól összefoglalja az előzményeket, motivációkat, a használt eszközöket és módszereket, valamint tömören megfogalmazza az eredményeket. A motivációkkal kapcsolatban felsorol 3 alaposan megírt monográfiát. Da Prato és Zabczyk 1992-es, Peszat és Zabczyk 2007-es, valamint Prévôt és Röckner 2007-es monográfiái valóban tartalmaznak sok gondolatébresztő természettudományi példát és alkalmazási területet (elsősorban fizikából, kémiából és biológiából), amik alapján megállapítható a téma jelentősége. Valóban az is jó reklámja a témakörnek, hogy Martin Hairer 2014-ben Fields-medált kapott a területen elért eredményeiért.

Az első fejezetben a szerző lineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenleteket vizsgál additív Wiener-zajjal. Először a sztochasztikus hullámegyenlet esetén tekint térbeli végeselemes szemidiszkrétizációt, majd egy teljes térbeli és időbeli diszkrétizációt, és ad hibabecslést a gyenge konvergencia sebességére funkcionálok egy nagy családja esetén. Ez a sebességbecslés kétszerese az erős hibára adott sebességbecslésnek. Ez a jelenség a disszertációban később több más modellben is előfordul. Ezután bizonyos sztochasztikus parabolikus parciális differenciálegyenletekre vezet le hasonló becsléseket. Végül sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenleteket

vizsgál. Mindhárom egyenlettípus esetén használható a gyenge hibának egy előállítása, mely az Itô-formula és a folyamathoz tartozó Kolmogorov backward egyenlet segítségével vezethető le. Meg kell jegyezni, hogy a harmadik egyenlettípus esetén ez nem alkalmazható közvetlenül, mert a megoldás nem Markov-folyamat, viszont a szerzőnek minden $T \in (0, \infty)$ időponthoz sikerült találnia olyan Markov-folyamatot, melynek eloszlása a T időpontban megegyezik a megoldás T időpontbeli eloszlásával.

A második fejezetben a szerző szemilineáris sztochasztikus hővezetési egyenleteket és szemilineáris Volterra-típusú integro-differenciálegyenleteket vizsgál additív Wiener-zajjal. Itt sikerült funkcionálok egy lényegesen nagyobb családjára becslést adni a közelítés gyenge hibájára. Ez a család olyan funkcionálokat tartalmaz, melyek nem csak a megoldás és a közelítés valamely $T \in (0, \infty)$ időpontbeli értékétől függnek, hanem a megoldás és a közelítés $[0, T]$ időintervallumbeli trajektóriájától is.

A harmadik fejezetben a szerző lineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenleteket vizsgál additív, Wiener-komponens nélküli, de négyzetesen integrálható Lévy-zajjal, mégpedig sztochasztikus hővezetési egyenleteket, sztochasztikus hullámegyenleteket és sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenleteket. Itt is használható a gyenge hibának egy előállítása, mely az Itô-formula és a folyamathoz tartozó Kolmogorov backward egyenlet segítségével vezethető le, de itt nem a közönséges Itô-formulára van szükség, hanem annak a Lévy-folyamatok szerinti integrálokra történő általánosítására, és nem a közönséges Kolmogorov backward egyenletre van szükség, mert a folyamat nem diffúziós folyamat. Az Itô-formulának azt az alakját használja a szerző, mely a Lévy-folyamatok Poisson véletlen mértékek szerinti integrálokként állítja fel, ezért arról is meg kellett győződnie, hogy a Lévy-folyamatok szerinti integrálok előállíthatók Poisson véletlen mértékek szerinti integrálként is. A szerzőnek ezt elegendő volt négyzetesen integrálható integrandusokra ellenőrizni.

Mindezek alapján megállapítható, hogy a doktori műben bizonyított eredmények mélyek, bonyolult technikát és ötletességet igényeltek, jelentősek, fontosak, ráadásul alkalmazhatóak és hasznosak is.

A doktori mű tanulmányozása során felmerült kérdéseim és megjegyzéseim, melyek nem érintik a mű értékeit, a következők:

1. Mindegyik egyenlet mindegyik közelítésével kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy vajon lehet-e esetleg alsó becslést is adni a gyenge, illetve erős hibára? Optimálisak-e a kapott hibabecslések?
2. A véletlen változót, amire a várható érték vonatkozik, tanácsosnak tartom zárójelbe tenni (hiszen ez egy függvény), hogy világos legyen, hogy mire vonatkozik a várható érték; persze tisztában vagyok azzal, hogy igen sok könyv, illetve cikk nem követi ezt a konvenciót.
3. A parciális deriváltak jelölésére $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ illetve $\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2}$ helyett jobbnak tartom a ∂_1 illetve ∂_1^2 jelöléseket, mert az előbbi esetében az olvasónak tudnia kell, hogy az illető függvény változóit ξ_j -k jelölik, és nem mondjuk x, y , vagy esetleg u, v , vagy akármi más; persze tisztában vagyok azzal, hogy igen sok könyv, illetve cikk használja az első jelölésmódot.
4. 2. oldal, Theorem 1.1.1: $Q^{\frac{1}{2}}$ nyilván az egyértelműen létező önadjungált pozitív szemidefinit négyzetgyököt jelöli; ezt esetleg meg lehetett volna említeni.

5. 4. oldal, 4. sor: a Q^{-1} pszeudoinverz nyilván megint önadjungált és pozitív szemidefinit; ezt esetleg meg lehetett volna említeni.
6. 4. oldal: egy kicsit félrevezető, hogy cilindrikus Q -Wiener folyamat esetén is azt a kifejezést használja a szerző, hogy " Q -Wiener process in U ", holott $\text{Tr}(Q) = \infty$ esetén a folyamat nem U -beli értékű.
7. 5. oldal, (1.1.13)-ban $\int_0^T$ helyett $\int_0^t$ kellene.
8. 8. oldal, a bizonyítás első mondatában: "double expectation" helyett talán szokásosabb a "tower rule", a "law of iterated expectations", vagy akár a "law of total expectation" is.
9. 9. oldal, 1.3.1 alfejezet: sajnos megegyezik a folyamat jelölése és a Hilbert-tér jelölése, ahol a folyamat az értékeit felveszi; mindkettő U .
10. 9. oldal: a $\dot{H}^\alpha$ simasági tér definíciójában $\|v\|_{\dot{H}^\alpha}$ helyett $\|v\|_{\dot{H}^\alpha}$ kellene.
11. 11. oldal: Sztochasztikus parciális differenciálegyenletek esetében a gyenge megoldás alatt sajnos egészen mást értenek mint a sztochasztikus közönséges differenciálegyenletek esetében; erre a különbségre talán érdemes lenne felhívni a figyelmet!
12. 15. oldal, 1.3.2 alfejezet: miért nem az (1.3.5) képletben adott explicit formulát és az (1.3.7) megoldást használja a szerző az (1.3.6) közelítése helyett?
13. 15. oldal, 1.3.2 alfejezet: az olvasónak figyelnie kell, hogy melyik felsőindex nem felsőindex, hanem hatványozás; ezért talán szerencsésebb lenne zárójelbe tenni azokat a felsőindexeket, melyek nem hatványozást jelölnek.
14. 16. oldal: talán világosabb lenne Δt^p helyett $(\Delta t)^p$.
15. 20. oldal, Theorem 1.3.13: A tétel elolvasásakor nem világos, hogy r és p micsoda; persze az előző négy és fél oldalból kiderül.
16. 20. oldal, Theorem 1.3.13: Lehet-e levezetni becslést az X folyamat második koordinátájára is?
17. 21. oldal, (1.4.1): A $\mathcal{D}(\Lambda)$ definíciójában mit jelöl $\frac{\partial f}{\partial n}$?
18. 58. oldal: "Lips-chitz" hibás elválasztás.
19. 74. oldal, 3.1.1: A Lévy-folyamat definíciójából kimaradt, hogy stacionárius növekményűnek kell lennie.
20. 74. oldal, 3.1.1: Sajnos a négyzetes integrálhatóság erős feltétel; így például a stabilis folyamatokat kizárja a szerző.
21. 76. oldal, Remark 3.1.3 második része: Itt is kimaradt az, hogy az L_k folyamatnak stacionárius növekményűnek kell lennie.
22. 76. oldal, Remark 3.1.3 második része: Szerintem ehhez az irányhoz nem elég az, hogy az L_k , $k \in \mathbb{N}$ folyamatok korrelálatlanok, hanem kell a függetlenségük is!

23. 76. oldal: "Laplace tranform" helyett "Laplace transform" kellene.

Összefoglalva: a doktori munka témája időszerű, érdekes és fontos területe a sztochasztikus parciális differenciálegyenleteknek, a pályázó rendelkezik a téma kutatásához elengedhetetlenül szükséges, igen széles körű ismeretekkel, jól ismeri és biztos kézzel használja a szakirodalmat. A doktori műben szerencsésen ötvöződnek a sztochasztika, a parciális differenciálegyenletek és a numerikus matematika kérdései.

Az eddigiek alapján megállapítható, hogy Kovács Mihály doktori munkája minden tekintetben kielégíti az akadémiai doktori művel kapcsolatos elvárásokat. Kovács Mihály doktori munkájának minden saját eredményként feltüntetett tézisért új tudományos eredményként fogadom el. A doktori munkát nyilvános vitára messzemenően alkalmasnak találom.

Szeged, 2019 május 7.

Pap Gyula