

Válaszok Michaletzky György, az MTA doktora által feltett kérdésekre

Mindenekelőtt ezúton is köszönöm Michaletzky György, az MTA doktora opponensi munkáját és véleményét. A feltett kérdésekre az alábbi válaszokat adom.

Kérdés: A dolgozat egészen végigvonul az a feltételezés, hogy G kétszer folytonosan deriválható függvény, melynek második deriváltja korlátos. Ennek a feltevésnek következményeként a hibareprezentációs formulában – melynek bizonyítása mögött az Itô-formula áll – a második deriváltakat tartalmazó tagok könnyen becsülhetők. Lehetséges lenne-e konkrét hibaezponenseket találni ezen korlátossági feltevés nélkül, esetleg csak alkalmas növekedési feltételek megőrzésével?

A második deriváltra feltett korlátosság helyett feltehetjük, hogy a második derivált kielégít egy polinomiális növekedési feltételt:

$$\|G''(x)\| \leq C(1 + \|x\|^p) \quad (1)$$

valelmy $p \geq 0$ esetén. Ekkor azt kell kihasználnunk, hogy a megoldás bármelyik momentuma korlátos, feltéve, hogy ez igaz a kezdeti feltételre is. A bizonyítás során, ebben az esetben egy Hölder-egyenlőtlenséget kell alkalmaznunk megfelelő exponensekkel, és amennyiben a kezdeti feltétel bármelyik momentuma korlátos (például determinisztikus kezdeti érték esetén), ugyanazt az eredményt kaphatjuk, mint abban az esetben amikor G második hatványa korlátos. Egy ilyen típusú analízist végeztünk el a [1] cikkünkben a (1) növekedési feltétel mellett, a Kolmogorov-egyenletet használva, egy kicsit más problémára ugyan, de a fent ismertett eszközökkel. Amennyiben a kezdeti értéknek csak valamely rögzített momentuma véges, akkor a gyenge hiba exponense ennek megfelelően csökkenni fog.

Kérdés: Általánosabb skalár magfüggvény esetére kiterjeszthetők-e ezek a tételek, esetleg más módszer alkalmazásával?

Az eredmények, legalábbis részben, általánosabb skalár magfüggvény esetére is kiterjeszthetők. A [2] cikkünkben a magfüggvény Laplace-transzformáltjáról tételeztünk fel megfelelő regularitási és növekedési tulajdonságokat (Assumption 2.4 az említett cikkben). A dolgozatban használt magfüggvények Laplace-transzformáltjai rendelkeznek ugyan ezekkel, de ezen feltételek ennél általánosabbak. Az említett cikkben megadott regularitási és növekedési feltételek

mellett, illetve a [2, Assumption 2.4]-ben szereplő 2-regularitás helyett 3-regularitást megkövetelve, a dolgozatban szereplő megoldási operátor teljesíti az időbeli diszkretizáció gyenge hibájának analíziséhez szükséges

$$\|A^s S(t)\| \leq C t^{-s\rho}, \quad t > 0, \quad s \in [0, 1/\rho] \quad (2)$$

$$\|A^s \dot{S}(t)\| \leq C t^{-s\rho-1}, \quad t > 0, \quad s \in [0, 1/\rho]$$

$$\|\ddot{S}(t)\| \leq C t^{-2}, \quad t > 0, \quad (3)$$

simítási tulajdonságokat. A 3-regularitás a (3) becsléshez szükséges csak. A térbeli diszkerizáció gyenge hibabecslése ugyancsak elvégezhető ezen feltételek mellett spektrális Galjorkin-módszert alkalmazva, mivel erre a módszerre a nem sima kezdeti értékre adott determinisztikus hibabecslés egyszerűen belátható az S megoldási operátor (2) simító hatása alapján. A végeelem-módszer esetén, egyelőre nem áll rendelkezésre megfelelő, nem sima kezdeti értékre adott determinisztikus hibabecslés, a magfüggvények ilyen tág osztálya esetén. Ennek ellenére nem kizárt, hogy egy ilyen hibabecslés levezethető a Laplace-transzformáció complex inverziós formuláját alkalmazva, vertikális egyeneseken végezve az integrálást. A következő becslés tűnik bizonyíthatónak:

$$\|S_h(t) - S(t)\| \leq C t^{-1} h^{2/\rho}, \quad t > 0.$$

Ez optimális lenne a t^{-1} szingularitást tekintve, és elegendő is lenne a gyenge hiba analíziséhez, de nem optimális abban a tekintetben, hogy a becslésben szereplő hibaexponens nem éri el a végeelem módszer rendjét, ami lineáris elemek esetén 2. Ehhez egy

$$\|S_h(t) - S(t)\| \leq C t^{-\rho} h^2, \quad t > 0,$$

becslés lenne szükséges, amely egyelőre csak a Riesz-féle magfüggvény esetén létezik [3] (illetve ahhoz nagyon hasonló, analitikus magfüggvényekre.) Ez utóbbi cikkben alkalmazott módszer sajnos nem alkalmazható véges simaságú magfüggvényeknél mert a Laplace-transzformáció complex inverziós formulájában szereplő vertikális egyenest ebben az esetben nem lehet átalakítani a szükséges mértékben.

Irodalomjegyzék

- [1] D. Bolin, K. Kirchner and M. Kovács, Weak convergence of Galerkin approximations for fractional elliptic stochastic PDEs with spatial white noise. *BIT* **58**(4) (2018) 881–906.
- [2] B. Baeumer, M. Geissert, and M. Kovács, Existence, uniqueness and regularity for a class of semilinear stochastic Volterra equations with multiplicative noise, *J. Diff. Eq.* **258**(2) (2015) 535–554.
- [3] C. Lubich, I. Sloan, and V. Thomée, Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term, *Math. Comp.* **65** (1996) 1–17.

Budapest, 2019. május 30.

Dr. Kovács Mihály