

Válaszok Pap Gyula, az MTA doktora által feltett kérdésekre

Mindenekelőtt ezúton is köszönöm Pap Gyula, az MTA doktora opponensi munkáját és véleményét. A választ nem igénylő megjegyzéseket köszönöm, a további munkám során természetesen figyelembe fogom őket venni. A feltett kérdésekre az alábbi válaszokat adom.

Kérdés: Mindegyik egyenlet mindegyik közelítésével kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy vajon lehet-e esetleg alsó becslést is adni a gyenge, illetve erős hibára? Optimalisak-e a kapott hibabecslések?

A gyenge, illetve erős hibára adott alsó becslés jelenleg is aktívan kutatott terület. Az egyenlettől és a numerikus módszertől függően lehet alsó becsléseket adni. Ezek a becslések nagyban függenek attól, hogy a determinisztikus hibára van-e alsó becslés. Ezt illusztrálандó, tekintsük például a

$$dX(t) + AX(t) dt = dW(t); \quad X(0) = 0,$$

egyenletet, ahol $H = L_2(\mathcal{D})$, $A = -\Delta$ homogén Dirichlet-peremfeltételek mellett és W konvariancia-operátora az identitás operátor $Q = I$. Ennek az egyenletnek a végeelem-módszerrel adott közelítése, a dolgozatban bevezetett jelöléseket használva a

$$dX_h(t) + A_h X_h(t) dt = P_h dW(t); \quad X_h(0) = 0,$$

alakban írható fel. Ekkor az erős hiba négyzetére a következő azonosság adódik:

$$\mathbb{E}\|X(t) - X_h(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \|(e^{sA} - e^{sA_h} P_h) e_k\|^2 ds$$

ahol $\{e_k\}$ a H egy ortonormált bázisa. Amennyiben van alsó becslés a

$$\int_0^t \|(e^{sA} - e^{sA_h} P_h)x\|^2 ds$$

determinisztikus hibára, úgy alsó becslést kapunk az erős hibára is. Ezeket az alsó becsléseket, spektrális Galjorkin-módszer esetén könnyen megkaphatjuk, de a végeelem-módszert alkalmazva ezeket nem nagyon vizsgálták sem a determinisztikus sem a sztochasztikus esetben. A gyenge hiba esetén a stratégia általában az, hogy speciális funkcionálokat tekintünk, mint a

$\phi(x) = \|x\|^2$, amelyekkel explicit számításokat tudunk végezni. A fenti példán egy kis számolás után

$$|\mathbb{E}\phi(X(t)) - \mathbb{E}\phi(X_h(t))| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{-2s\lambda_k} ds - \sum_{k=1}^{N_h} \int_0^t e^{-2s\lambda_{h,k}} ds \right|$$

ahol a λ_k , illetve a $\lambda_{h,k}$ az A , illetve az A_h operátor sajátértékei és N_h a végeelem-tér dimenziója. Ez megint csak becsülhető alulról, amennyiben ismertek a sajátértékekre vonatkozó felső és alsó becslések. Spektrális Galjorkin-módszer esetén a fenti különbség egyszerűen becsülhető, ellentétben a végeelem-módszerrel. Összességében elmondható, hogy a végeelem módszerrel diszkretizált egyenletekre nincsenek az irodalomban alsó becslések. A spektrális Galjorkin-módszer explicitisége miatt az irodalomban található eredmények erre, illetve az időbeli diszkretizációra vonatkoznak és mind parabolikus egyenletekkel kapcsolatosak. A kérdéssel kapcsolatban még a [2] cikket említeném meg, amely új eredmények bizonyításán felül jól összegyűjti a témakör eddigi eredményeit. Bizonyos esetekben, numerikus kísérletek támaszthatják alá a becslések élességét, lásd [3] a sztochasztikus hullámegyenlet térbeli végeelem-diszkretizációjának erős hibájával, vagy [4] a sztochasztikus hullámegyenlet időbeli diszkretizációjával kapcsolatban.

Kérdés: 15. oldal, 1.3.2 alfejezet: miért nem az (1.3.5) képletben adott explicit formulát és az (1.3.7) megoldást használja a szerző az (1.3.6) közelítése helyett?

Valóban igaz, hogy az (1.3.7) megoldást is lehetne kiindulásként használni és rögtön felírni egy diszkrét konstansok variálásának módszerét, ahogy ezt később meg is tesszük. Természetesen a hiba analízise során is ezt az alakot használjuk. Az egyetlen ok, ami miatt az (1.3.6)-ot írtuk fel kiindulásként, hogy a módszer implementációja az (1.3.17) iteráció alapján történik.

Kérdés: Lehet-e levezetni becslést az X folyamat második koordinátájára is?

Igen, lehet. Jelölje $P^2: H \rightarrow \dot{H}^{-1}$ a második koordinátára való vetítést, azaz $P^2x = x_2$ fahol $x = [x_1, x_2]^T \in H$. A dolgozat jelöléseivel, a [1] cikkben levezetett

$$\|P^2(E_{h,\Delta t}^n P_h - E(t_n))\|_{\mathcal{L}(H^\beta, \dot{H}^0)} \leq C(t_n) \left(h^{\min(\beta \frac{r}{r+1}, r)} + \Delta t^{\min(\beta \frac{p}{p+1}, p)} \right),$$

$$t_n = n\Delta t \geq 0,$$

determinisztikus hibabecslés és a Lemma 1.3.5 alapján kaphatjuk a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|P^2(\tilde{E}_{h, \Delta t}(t)P_h - E(t))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{2\beta}, \dot{H}^0)} \leq C(T) \left(h^{\min(2\beta \frac{r}{r+1}, r)} + \Delta t^{\min(2\beta \frac{p}{p+1}, 1)} \right)$$

hibabecslést. A Theorem 1.3.6 szerint, amennyiben $\|\Lambda^{\beta-1/2}Q\Lambda^{-1/2}\|_{\text{Tr}} < \infty$ és $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; \mathcal{H}^{2\beta})$ valamely $\beta \geq 0$ esetén, a $V = \dot{H}^{-1}$, $L = P^2$, $\tilde{E}(t) = \tilde{E}_{h, \Delta t}(t)$, $\tilde{B} = B_h$ és $\tilde{P} = P_h$ választással a

$$\left| \mathbb{E} \left(g(X_{h, \Delta t, 2}^N) - g(X_2(T)) \right) \right| \leq C(T) \left(h^{\min(2\beta \frac{r}{r+1}, r)} + \Delta t^{\min(2\beta \frac{p}{p+1}, 1)} \right)$$

becslés adódik minden $g \in C^2(\dot{H}^{-1}, \mathbb{R})$ esetén, amelyre $g'' \in C_b(\dot{H}^{-1}, \mathcal{L}(\dot{H}^{-1}))$. Amit itt meg kell jegyezni, hogy a második koordináta az elsőnél jóval gyengébb regularitással rendelkezik, így ennek megfelelően a tekintett funkcionálok osztálya is szűkebb. Egy kicsit több munkával levezethető lenne még a

$$\left| \mathbb{E} \left(g(X_{h, \Delta t, 2}^N) - g(X_2(T)) \right) \right| \leq C(T) \left(h^{\min(2(\beta-1) \frac{r}{r+1}, r)} + \Delta t^{\min(2(\beta-1) \frac{p}{p+1}, 1)} \right)$$

becslés is, amennyiben $\beta \geq 1$ és $g \in C^2(\dot{H}^0, \mathbb{R})$ olyan funkcionál, amelyre $g'' \in C_b(\dot{H}^0, \mathcal{L}(\dot{H}^0))$. A $\beta \geq 1$ esetben ugyanis a második koordináta is $\dot{H}^0$ -beli, így az egyenletet tekinthetjük a $\dot{H}^1 \times \dot{H}^0$ fázistéren is.

Kérdés: 21. oldal, (1.4.1): a $\mathcal{D}(\Lambda)$ definíciójában mit jelöl a $\frac{\partial f}{\partial n}$?

A $\frac{\partial f}{\partial n}$ az f függvény, a térbeli tartomány pereme normálisának iránymenti deriváltját jelöli.

Irodalomjegyzék

- [1] G.A. Baker and J.H. Bramble, Semidiscrete and single step fully discrete approximations for second order hyperbolic equations, *RAIRO Numer. Anal.* **13** (1979) 76–100.
- [2] D. Conus, A. Jentzen and R. Kurniawan, Weak convergence rates of spectral Galerkin approximations for SPDEs with nonlinear diffusion coefficients, *Ann. Appl. Probab.* **29**(2) (2019) 653–716.
- [3] M. Kovács, S. Larsson, and F. Saedpanah, Finite element approximation of the linear stochastic wave equation with additive noise, *SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010) 408–427.
- [4] X. Wang, S. Gan and J. Tang, Higher order strong approximations of semilinear stochastic wave equation with additive space-time white noise, *SIAM J. Sci. Comput.* **36**(6) (2014) A2611–A2632.

Budapest, 2019. május 30.

Dr. Kovács Mihály