

Oppenensi vélemény

Kovács Mihály

Weak convergence of Galerkin finite element

approximations of stochastic evolution equations with additive noise

(A Galjorkin-féle végeselem-módszer gyenge konvergenciája sztochasztikus parciális differenciálegyenletek közelítésekor)

c. MTA doktori

disszertációjáról

Az összefoglalót nem számolva a dolgozat 104 számozott oldalt tartalmaz, melyet 110 tételből álló irodalomjegyzék, amelyek közül 26 tétel szerzői között szerepel Kovács Mihály. (A szerzők felsorolása – a matematikai szakterület általánosan elfogadott elvei alapján – névsorban történik, ezért nincsen jelentősége annak, hogy ezek közül hány esetben szerepel az első helyen Kovács Mihály.) A disszertáció nem mutatja be a fent említett összes cikkben közölt eredményt, hanem ezek közül 9 dolgozatra épít. (Ahogy a tézisfüzetből is kiderül, a törtrendű parciális differenciálegyenletekhez kapcsolódó eredmények, és a sztochasztikus parciális differenciálegyenletek numerikus közelítésének erős konvergenciájával kapcsolatos eredmények nem szerepelnek jelen disszertációban,)

A dolgozat első fejezetének 1.2.1 tétele általános hibareprezentációs formulát mond ki két különböző Itô-folyamat esetén, feltételezve, hogy a mindkét folyamat valamilyen Hilbert-téren értelmezett korlátos operátor család végtelen dimenziós Wiener-folyamat szerinti integráljaiként állnak elő. Ezen integrálok definíciója a Wiener-féle integrálfogalomra épít. Fontos hangsúlyozni, hogy nem szükséges feltenni, hogy az operátor család egyben operátor félcsoport is, bár az alkalmazásokban rendszerint ez az eset fordul elő. A tétel a két Itô-folyamat valamilyen G függvénye várható értékeit hasonlítja össze. A dolgozat egészen végigvonul az a feltételezés, hogy G kétszer folytonos deriválható függvény, melynek második deriváltja korlátos. Ennek a feltevésnek következményeként a hibareprezentációs formulában – melynek bizonyítása mögött az Itô-formula áll -- a második deriváltakat tartalmazó tagok könnyen becsülhetőek.

Kérdésem: Lehetséges lenne-e konkrét hibaexponenseket találni ezen korlátossági feltevés nélkül, esetleg csak alkalmas növekedési feltételek megőrzésével?

Az 1.3 szakasz a sztochasztikus hullámeqyenlet lehetséges approximációját vizsgálja. Az 1.3.6. Tétel általános esetben ad becslést a „gyenge” hiba nagyságára. (Bár a dolgozat alig tartalmaz elírást, itt azonban a közelítő folyamat definíciójában szereplő $\hat{P}$ operátor a bizonyításban már elmarad. De ez könnyen javítható.) Ezen állítás felhasználásával adnak az

egyes részfejezetek hibabecslést (hibaexponenst) az időben diszkretizált, illetve a teljesen diszkretizált közelítésre, végzetül ez utóbbi esetben az erős konvergencia sebességre.

Az 1.4 szakasz a sztochasztikus parabolikus egyenlet esetét tárgyalja. Speciálisan a linearizált Cahn-Hilliard-Cook egyenlet teljesen diszkretizált közelítésének gyenge hibájára ad becslést.

Az 1.5. szakasz a sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciál egyenletet vizsgálja, amelyben az alapvetően valós értékű magfüggvény Laplace-transzformáltja értékeinek argumentumára kirótt feltétel fontos szerepet játszik a hibabecslésekben. Az elemzés kiindulópontja az egyenlet megoldásának előállítása alkalmas rezolvens család Wiener-folyamat szerinti integráljának alakjában. Ezen determinisztikus rezolvens család alapvető tulajdonságainak igazolása teszi lehetővé az időben diszkretizált sztochasztikus feladat erős hibájára vonatkozó becslés igazolását. Az 1.5.5. szakasz a Galjorkin-féle véges elem-módszer erős konvergenciáját mutatja be, az 1.5.6. szakasz teljesen diszkretizált modell hibáját vizsgálja. A szakasz befejező része a gyenge hiba-exponensre ad becslést. Ezekben a becslésekben, amint azt fent említettem már, fontos szerepet játszik a dolgozat (1.5.3.) képletében definiált p paraméter, melynek értéke 1 és 2 közé esik. Ez a mennyiség megjelenik az 1.5.7 szakaszban szereplő 1.5.32 tétel, illetve az arra építő 1.5.33 tétel, amely gyenge hibára vonatkozik, a becslés kitevőjében.

Kérdésem: Általánosabb skalár magfüggvény esetére kiterjeszthetők-e ezek a tételek, esetleg más módszer alkalmazásával?

A 2. fejezet additív Wiener-zajjal meghajtott szemilineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenleteket vizsgál. A kiindulópont valamely erősen folytonos operátor család, melynek elemei korlátos, önadjungált lineáris operátorok. Az egyenlet jobboldala ezen operátorcsalád segítségével definiált – részben az ismeretlen folyamat valamely függvényére, részben pedig Wiener-folyamatra vonatkozó – konvolúciós integrálokat tartalmaz. Az alapvető technikai segédeszközt a Malliavin-kalkulus biztosítja. Ennek segítségével válik lehetővé összetettebb funkcionálok vizsgálata is, amelyek nemcsak a megoldás adott időpontban felvett értékétől függenek, hanem esetleg a teljes trajektóriától is. A kapott eredmények alapján is itt állítható, hogy a gyenge hibaexponens kétszerese az erős hiba-exponensnek.

A 3. fejezet Lévy-zaj segítségével additíven meghajtott lineáris sztochasztikus parciális differenciálegyenletek megoldásai közelítésének hibáját vizsgálja. Ahhoz, hogy a numerikus approximáció hibabecslésének elemzését el lehessen végezni, először egyeztetni kellett az operátor értékű folyamatok Hilbert-tér értékű Lévy-folyamatok szerinti integráljaira vonatkozó formulákat a Hilbert-tér értékű integrandusok Poisson-véletlen mérték szerinti integráljainak fogalmával. Ennek elvégzése teszi lehetővé az Lévy-zajjal meghajtott folyamatokra vonatkozó hiba-reprezentációt leíró általános formula levezetését. Ez az előállítás – melyet a 1.2.6. Tétel tartalmaz – veszi át a korábbi, a Wiener-folyamat esetére vonatkozó hiba-reprezentáció szerepét. A bizonyítás háttérében alkalmas, a végtelen dimenziós esetre is vonatkozó, Kolmogorov-egyenlet áll. A 3. fejezetet záró szakaszaiban a Lévy-folyamattal meghajtott sztochasztikus

hővezetési egyenlet, a sztochasztikus hulláme egyenlet, továbbá a sztochasztikus Volterra-típusú integro-differenciálegyenlet hibaanalízise szerepel.

Összefoglalóan elmondható, hogy a disszertáció gondosan elkészített munka, igen minimális számú elírással. Szerkesztési kifogásként talán csak az igen apró betűt említeném meg.

Látszik, hogy a szerzője alaposan ismeri a vonatkozó irodalmat, a használatos technikákat. Annak ellenére, hogy a dolgozat nem tartalmaz igazán komplikált, trükkös gondolatmeneteket, konstrukciókat, bizonyításokat, a kapott eredmények túlmutatnak az irodalomban eddig megtehetőeken.

Javasolom a nyilvános vita kitűzését, és a fokozat odaítélését.

Budapest, 2019. április 17.

A handwritten signature in blue ink, reading "Michaletzky György". The signature is written in a cursive, slightly slanted style.

Michaletzky György