Adaptált komplex struktúrák

MTA Doktori Értekezés Tézisei

Szőke Róbert

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest

2018

Ez a disszertáció két fő részből áll. Az első részt öt fejezet alkotja, amelyek egymástól függetlenül is olvashatóak. Az első fejezetben egy bevezetés után a gyakran használt fogalmakat gyűjtöttük össze, új eredményt nem tartalmaz. A második fejezet bizonyos Stein sokaságok szimmetriáit vizsgálja, az [Sz95] cikken alapszik. A harmadik fejezetben kompakt, normális Riemann homogén terek adaptált komplex struktúráját vizsgáljuk az [Sz98] cikk alapján. A negyedik fejezetben a geodetikus áramra nézve invariáns komplex struktúra (ill. még általánosabban involutív struktúra) problémáját tanulmányozzuk. A fejezet két cikkből válogat. A 4.1 rész az [Sz99] cikk, míg a 4.2 rész az [Sz01] cikk néhány eredményét tartalmazza. Az ötödik fejezetben két kapcsolódó problémát tekintünk. Az 5.1 részben azt vizsgáljuk, hogyan lehet általánosítani Chevalley kiterjesztési tételét Weyl csoport ekvivariáns leképezésekre. Ez a rész a Korányi Ádámmal közös [KSz] cikk eredményeit tartalmazza. Az 5.2 részben hiperkähler metrikák létezését vizsgáljuk (ko)érintőnyalábokon. Ez a rész az Andrew Dancerrel közös [DSz] cikken alapszik. A disszertáció teljes második részét a geometriai kvantálás egyértelműségi problémája motiválja. Az itteni fejezetek egymásra épülnek. A 6.1 rész a Lempert Lászlóval közös [LSz12] cikken alapul. A 6.2 rész egy bevezetőt tartalmaz a geometriai kvantálásról továbbá egy még nem publikált cikk [Sz] néhány eredményét a 6.2.5 és 6.2.6 részben. A 7. és 8. fejezet, továbbá a 9.1, 9.2 és 9.4 részek a Lempert Lászlóval közös [LSz14] cikk fő eredményeit gyűjti egybe. A 9.3 rész a [Sz17] cikk eredményeit tartalmazza.

1. Bevezetés

Az adaptált struktúra fogalma az, amely összeköti az ebben a disszertációban tárgyalt különféle problémákat. Habár ezt a fogalmat először az [LSz91] cikkben definiáltuk, a vele ekvivalens „Monge-Ampère modell" volt a Notre Dame egyetemen írott PhD disszertációm témája. A PhD disszertációm eredményei (néhány a PhD fokozat megszerzése után elért eredménnyel együtt) az [LSz91, Sz91] cikkekben lett publikálva, azonban ezek az eredmények az MTA doktora címért írott disszertációmban is fontos szerepet játszanak, ezért ezeket is röviden ismertetjük az itt következő bevezetőben.

Legyen X^n egy $n-$dimenziós komplex sokaság és $u : X \to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható pluriszubharmonikus függvény. u kielégíti a komplex homogén Monge-Ampère egyenletet, ha

$$(\partial\overline{\partial}u)^n = 0, \tag{1}$$

vagy, $z_1, \ldots, z_n$ lokális koordinátákban

$$\det\,(\partial^2 u/\partial z_j \partial \overline{z}_k) = 0.$$

Amikor $n = 1$, a fenti egyenletek a $\Delta u = 0$ Laplace egyenletre redukálódnak. A Monge-Ampère egyenlet a Laplace egyenlet legtermészetesebb általánosítása magasabb dimenziós komplex sokaságokra. Az egyenlet először Bremermann egy cikkében [Br] bukkant fel. Bedford áttekintő cikke [Bed] foglalja össze a Monge-Ampère egyenletről azóta íródott szerteágazó munkákat.

Mi a következő kérdéssel szeretnénk foglalkozni. Az (1) egyenlet egy u megoldása, méginkább maga X mennyire van meghatározva, ha u-ra bizonyos globális feltevéseket teszünk? Olyan u pluriszubharmonikus megoldásait tekintjük (1)-nek, amely végtelenhez tart, amint $z \in X$ divergál $X-$ben, pontosabban hogy minden $c \in \mathbb{R}-$re

$$\{z \in X : u(z) \leq c\} \qquad \text{kompakt.} \tag{2}$$

Ebben az esetben $u-$t az X egy kimerítőfüggvényének hívjuk. Kicsit általánosabban korlátos kimerítőfüggvényeket is fogunk tekinteni, azaz amikor (2) csak $c < \sup u < \infty-$re van megkövetelve. Ilyen általánosságban túl sok megoldás létezik. Ha pl $X = Y \times Z$ ahol Y kompakt és Z Stein, és v tetszőleges sima pluriszubharmonikus függvény $Z-$n, akkor $u(y, z) = v(z)$ megoldás lesz. Az ehhez hasonló példákat elkerülendő, feltesszük, hogy X maga Stein sokaság.

Stein sokaságok a $\mathbb{C}^n-$beli holomorfiatartományok általánosításai. Rajtuk bőségesen találhatóak nemkonstans holomorf függvények, ezért a függvénytan természetes objektumai. Stein sokaságok pontosan azok a komplex sokaságok, amelyek beágyazhatóak valamely $\mathbb{C}^N-$be zárt komplex részsokaságként. Grauert egy tétele szerint X Stein akkor és csak akkor, ha létezik egy $\tau : X \to [0, \infty)$ szigorúan pluriszubharmonikus kimerítőfüggvény. Egy rögzített Stein sokaságon rengeteg ilyen kimerítőfüggvény van. Természetes módon merül fel a kérdés, hogy van-e valamilyen értelemben kanonikus ezek között? Esetleg ennek segítségével egy adott X jellemezhető is az összes Stein sokaság között. Az ilyenfajta potenciális uniformizációs tétel azért is különösen érdekes lehet, mert $n > 1$ dimenzióban nincs konform leképezések alaptétele.

A matematikában gyakran előfordul, hogy egy bizonyos differenciálegyenlet globális megoldása lehetővé teszi az alapsokaság klasszifikációját. Ilyen eset például ha a görbület konstans. Mi a Monge-Ampère egyenletet szeretnénk hasonló ötlettől vezérelve, Stein sokaságok klasszifikációjára felhasználni. Kiderül azonban ([LSz91, Theorem 1.1]), hogy az (1) egyenletnek nem lehet mindenütt sima kimerítőfüggvény megoldása. Meg kell engednünk, hogy a megoldásnak valami fajta szingularitása legyen. A szingularitáshalmaz ($= M$) Harvey és Wells [HW] egy tétele szerint teljesen valós, tehát a valós dimenziója legfeljebb n lehet.

Stoll volt az első, aki észrevette, hogy egy globális feltétel, szingularitás egy típusa és a Monge-Ampère egyenlet egyértelműen jellemezhet egy komplex sokaságot, rajta az u megoldással. A [Sto] cikkében azt a szituációt tekintette, amikor M egy pontra redukálódik, amely esetben a természetes előírt szingularitás egy logaritmikus pólus. Stoll belátta, hogy ebben az esetben X biholomorf $\mathbb{C}^n-$el, u ekvivalens lesz $\log \|z\|^2-$el, $\tau = \exp u$ pedig $\|z\|^2-$el (l. még [Bu3, Wo]).

Később Patricio és Wong a másik extrém esetet tekintette, amikor a szingularitási halmaz M egy $n-$valós dimenziós részsokaság. Ekkor a természetes (minimális) szingularitás „négyzetgyök” típusú (cf. [PW]). Patricio és Wong azt sejtették, hogy már maga M mint sima sokaság egyértelműen meghatározza $X-$et és $u-$t (feltéve, hogy M diffeomorf egy kompakt 1-rangú szimmetrikus térrel). A sejtést csak azon extra feltevés mellett tudták belátni, amikor az u megoldás szinguláris viselkedéséről precízebb információ ismert. Továbbá konstruáltak is olyan X és u példákat, amikor M egy kompakt 1-rangú szimmetrikus tér, illetve egy tórusz. Ezen kívül a [PW] cikk további fontos adaléka annak a gazdag geometriának a leírása, amit az u megoldás meghatároz. Azt, hogy a Monge-Ampère egyenlet minden megoldásához egy érdekes geometria rendelhető, először Stoll és Burns vették észre.

További „négyzetgyök” szingularitási típusú példákat talált Lempert [L2]. Ezekben a példákban M egy hiperbolikus sokaság és u egy korlátos kimerítőfüggvény.

Az [LSz91] cikk alapvetően a következő objektumokat vizsgálja: egy X Stein sokaság, rajta egy nem korlátos u kimerítőfüggvény, mely kielégíti az (1) egyenletet, négyzetgyök típusú szingularitása van az M sokaság mentén (azaz u^2 szigorúan pluriszubharmonikus) és $\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{C}} X$. u^2-ből egy Kähler metrika keletkezik $X-$en, amely megszorítása $M-$re egy g Riemann metrikát ad. [LSz91]-ben beláttuk, hogy M és g biholomorfizmus erejéig meghatározza $X-$et és $u-$t (u korlátos esetén is). Ha M egy kompakt 1-rangú szimmetrikus tér, ez [PW] tétele. Az eredményt úgy is interpretálhatjuk, hogy X az (M, g) Riemann sokaság kanonikus komplexifikáltja. X mint sima sokaság diffeomorf TM-el. A $TM-$en így keletkező komplex struktúra lesz a $g-$hez adaptált komplex struktúra. [LSz91]-ben azt is beláttuk, hogy az adaptált komplex struktúrák ekvivalensek az (1) egyenlet négyzetgyök szingularitású megoldásaival.

Guillemin és Stenzel ([GS1, GS2]) rokon problémákat tanulmányoztak. Ők Riemann sokaságok koérintőnyalábján dolgoztak. Jóllehet a formális definícióik mások, mint a miénk, végül ugyanazt az X komplex sokaságot és u függvényt kapják, mint mi [LSz91]-ben.

[LSz91]-ben azt is belátjuk, hogy ha u nemkorlátos, akkor g metszetgörbületei nemnegatívak. Ebből adódik, hogy ha M diffeomorf egy tórusszal, akkor X és u csaknem egyértelműen meg vannak határozva, nem lehetnek mások, mint a Patrizio és Wong által talált példák egyike.

Azonban Patrizio-Wong eredeti sejtése nem igaz. Létezik ([Sz91]) nem ekvivalens példáknak egy olyan 1-paraméteres családja, hogy a szingularitási halmaz mindig diffeomorf a két dimenziós gömbfelülettel. [Sz91]-ben olyan X, u példákat is konstruáltunk (mind négyzetgyök típusú szingularitással), melyre u nemkorlátos, M tetszőleges rangú kompakt szimmetrikus tér, ill u korlátos, és M tetszőleges kompakt, valós-analítikus sokaság lehet.

Az adaptált komplex struktúra fogalmát a Riemann esetről később kiterjesztették(ük) Koszul konnexiókra ([Bi, Sz04]), Finsler metrikákra ([DK]), és mágneses áramlásokra ([HK2]).

Azonban az is kiderült, hogy egy Riemann sokaság (klasszikus) adaptált komplex struktúrája csak egyik tagja természetes Kähler struktúrák egy egész családjának ([LSz12]). Ez az a család, ami respektálja TM szimmetriáit (a geodetikus áram ill fibrumonkénti számmal való szorzás generálta). Ezt a családot $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ paraméterezi. Im $s > 0$ esetén pozitív, míg Im $s < 0$ esetén negatív Kähler metrikát kapunk. Az így kapott Kähler struktúrák alkotják a fibrumait egy $Y \to \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ holomorf fibrálásnak és a klasszikus adaptált komplex struktúra az $s = i$ feletti fibrumnak felel meg. Ezt a fibrálást ki lehet terjeszteni $\mathbb{C}$-fölé, de az $\mathbb{R}$ feletti fibrumok nem Kähler, hanem ún valós polarizációt adnak. Ez elvezet az adaptált polarizáció fogalmához, aminek az adaptált komplex struktúra csak egy extrém példája.

A [FMMN1, FMMN2] cikkek Kähler struktúráknak egy 1-paraméteres családját vizsgálják egy kompakt Lie csoport koérintőnyalábján. Ez a család egy valós polarizációvá fajul, amint a paraméter $\to 0$. A szerzők ezt a családot használva adják geometriai magyarázatát az ún. Bargman-Segal-Hall transzformáltnak [Hal1, Hal2]. A cikkek maguk nem említik expliciten az adaptált komplex struktúrákat, de a család amit vizsgálnak nem más, mint az általunk vizsgált adaptált polarizációk családja megszorítva a képzetes tengelyre.

A disszertációban az adaptált Kähler struktúrák családja kapcsán vizsgáljuk a geometriai kvantálás egyik alapkérdését, az egyértelműség problémáját.

A geometriai kvantálás a legegyszerűbb szituációban egy M Riemann sokasághoz egy $L \to X$ Hermitikus vonalnyalábot és annak (bizonyos) szelései alkotta H Hilbert teret rendel (H az ún. kvantum Hilbert tér). A Kähler kvantálás esetén L egy holomorf Hermitikus vonalnyaláb lesz, H pedig az L holomorf L^2 szeléseinek tere. Gyakran az ismert, hogy hogyan konstruáljuk meg $L-$et, de a konstrukció bizonyos választásokkal jár, vagyis valójában vonalnyalábokat egy egész $L_s \to X_s$ családjával és a nekik megfelelő H_s Hilbert terekkel van dolgunk, ahol $s \in S$ paraméterezi a lehetséges választásokat.

Az egyértelműség problémája: $H_s \to H_t$ kanonikus (projektív) unitér leképezések megtalálását jelenti, a különböző $s \neq t \in S$ paraméterekre. Ez a geometriai kvantálás egy fundamentális problémája. Erre a problémára különböző megoldások ismertek. Az első a Stone-von Neumann tétel [St1, Ne1] jóval a geometriai kvantálás feltalálása előttről származik. Minden olyan szituációban alkalmazható, amikor adott két Hilbert tér és mindkettőn a Heisenberg Lie algebra egy-egy irreducibilis unitér reprezentációja. Ekkor egy skalár tényező erejéig egyértelmű unitér leképezés létezik, ami kommutál a két reprezentációval.

Azonban a geometriai kvantálás produkálta Hilbert téren (az affin tér kvantálásától eltekintve) nincs ilyen reprezentáció. Ugyanakkor a geometriai kvantálás ismeri az ún. Blattner-Kostant-Sternberg (BKS) [Bl1, Bl2, Ko] párosítás fogalmát, ami néha megadja a keresett unitér leképezést, de még viszonylag egyszerű esetekben sem mindig unitér [Ra2].

A '90-es évek elején Hitchin [Hi], Axelrod, Della Pietra és Witten [ADW] olyan szituációt tekintettek, amikor a lehetséges s paraméterek egy S komplex sokaságot alkottak. [Hi] és [ADW] azt javasolták, hogy tekintsük a H_s Hilbert tereket, mint egy $H \to S$ Hilbert nyaláb fibrumait, vezessünk be egy Hermitikus konnexiót $H-$n és használjuk a párhuzamos eltolást a H_s és H_t fibrumok azonosítására. Ellenőrizendő, hogy hogyan függ a párhuzamos eltolás a választott úttól s és t között, bizonyos esetekben kiszámolták a konnexió görbületét. Kiderült, a görbület egy skalároperátor. Ezért [ADW, Hi] arra következtettek, hogy a párhuzamos eltolás, skalár tényező erejéig, független az úttól és megadja a keresett $H_s \approx H_t$ azonosítást. Hitchin kompakt fázistereket kvantált, Hilbert terei véges dimenziósak, bizonyításai matematikailag precízek. [ADW] merészebb, nemkompakt sőt végtelen dimenziós tereket kvantál, ami végtelen dimenziós Hilbert terekhez vagy még „rosszabbakhoz” vezet. A cikk matematikai szempontból nem teljesen megalapozott.

Az általános szituáció a következő. Legyen $\pi\colon Y \to S$ egy holomorf szubmerzió $\pi^{-1}s = Y_s \subset Y$ komplex részsokaság fibrumokkal. Legyen ν egy olyan sima forma $Y-$on, hogy minden $s-$re a megszorítás az Y_s-ra egy térfogati formát ad. Legyen $(E, h^E) \to Y$ egy Hermitikus holomorf vektornyaláb. Legyen H_s az $E|Y_s$ holomorf L^2 szeléseinek Hilbert tere. L^2 abban az értelemben, hogy $\int_{Y_s} h^E(u)\nu < \infty$.

[ADW] kvantálási eljárása ennek egy nagyon speciális esetét adja. Ott az $(E|Y_s, h^E)$ vonalnyalábokat mind sima nyalábokat azonosíthatjuk és a H_s^{prQ} Hilbert tereket (az $E|Y_s$ nyaláb L^2 szeléseinek tere) tekinthetjük úgy, mint a $H^{prQ} \to S$ triviális Hilbert nyaláb fibrumait. Ez természetes módon megtehető, mert [ADW] nem használja a félforma korrekciót. $H^{prQ} \to S$ minden fibrumában ül egy H_s altér és [ADW] kijelenti, hogy a H_s alterek egy $H \subset H^{prQ}$ résznyalábot alkotnak. Azonban a cikk nem ad semmiféle támpontot arra vonatkozólag miért lenne ez igaz, vagy, hogy mit is kellene itt résznyaláb alatt érteni.

Affin szimplektikus terek kvantálásánál a fenti problémák orvosolhatóak: vagy hivatkozunk Woodhouse könyvének [W, Section 9.9]-beli formuláira, vagy Kirwin és Wu [KW] cikkére. Az első a BKS párosításon alapszik, a második a Bargmann–Segal transzformálton.

Az [ADW] cikkben szereplőhöz szorosan kapcsolódó konnexiót és annak párhuzamos eltolását tanulmányozzák az [FMMN1, FMMN2] cikkek. Ezekben a szerzők túlmennek az affin tereken. Egy kompakt Lie csoport koérintőnyalábján tekintenek polarizációknak egy 1-valós paraméteres családját. Az eredményül kapott kvantum Hilbert terek nyalábján bevezetnek egy konnexiót, amelyhez tartozó párhuzamos eltolást a Bargmann–Segal transzformált Hall féle általánosítása [Hal1, Hal2] segítségével fejeznek ki. Mindez utólagosan igazolja a konnexió definícióját, de az egyértelműség problémájáról (ami [Hal2] óta nem volt ismert) keveset mond.

Kétségtelenül nagyon szimpatikus az a felismerés, hogy a BKS párosítás, a Bargmann-Segal és Fourier transzformációk interpretálhatóak párhuzamos eltolásként, igazolva [ADW]-t, de mindez kétségessé teszi a konnexió bevezetésének eredeti célját. Ha mind a BKS párosítás, mind a Bargmann–Segal transzformált már azonosítja a különböző H_s Hilbert tereket, akkor miért próbáljunk egy konnexiót definiálni és vizsgálni annak párhuzamos eltolását? Másként fogalmazva az [ADW] javasolta konnexió választ ad-e az egyértelműség problémájára olyan esetben, amikor a BKS párosítás nem unitér és nincs a Bargmann–Segal transzformálthoz hasonló explicit integráltranszformáció amit felhasználhatnánk? Ez az a kérdés, amivel a disszertáció második részében foglalkozunk és részben megválaszolunk.

Az itt található fejezetek jó része a fent vázolt általános szituációval foglalkozik: egy $\pi\colon Y \to S$ holomorf szubmerzió, egy $E \to Y$ Hermitikus holomorf vektornyaláb és H_s az $E|Y_s$ holomorf L^2-szeléseinek Hilbert tere. A H_s terek egy $p : H \to S$ Hilbert mezőt alkotnak, ahol H egyszerűen a $\{H_s\}_{s\in S}$ diszjunkt unió, p pedig a természetes projekció. Azt kérdezzük, hogy ellátható-e H egy Hilbert nyaláb struktúrával és ezen a nyalábon egy konnexióval, továbbá, indukál-e ez a konnexió egy útfüggetlen párhuzamos eltolást? Vagyis meg szeretnénk érteni $E-$nek a π leképezésnél vett direkt képét. $\pi-$ről nem tesszük fel, hogy perfekt (kompakt őse kompakt). Ha az lenne, Grauert tétele [Gr] megadja a direkt kép holomorf struktúráját. Azonban a fő nehézséget számunkra pont az jelenti, hogy a minket érdeklő esetekben π nem perfekt. Berndtsson a [Be1, Be2, Be3] cikkekben már vizsgálta bizonyos nem perfekt direkt képek görbületét, [Be4]ben egy meglepő alkalmazást is adva.

Hiábavaló lenne teljesen általános $Y \to S$ submerziót és E nyalábot tekinteni. A H_s terek ugyanis általában nem alkotnak vektornyalábot. Mégis bizonyos konstrukciók egész általános szituációkban is végrehajthatóak. Kedvező esetekben ezekből nyerjük azokat az objektumokat, amiket sima ill. analítikus Hilbert mezőknek hívunk. Ezek a mezők a konnexióval ellátott Hermitikus Hilbert nyalábok általánosításai, de annál jóval gyengébb fogalmat takarnak. Azonban a görbület fogalma értelmes marad ezekre a mezőkre is. A 7. fejezet fő eredményei szerint ha egy analítikus Hilbert mező görbülete nulla, (vagy centrális), akkor a mező ekvivalens egy lapos (ill. projektíven lapos) konnexióval ellátott Hermitikus Hilbert nyalábbal.

A 8. fejezetben a direktképeket tárgyaljuk. Az itt szereplő konstrukció kedvező esetekben egy sima ill. analítikus Hilbert mező struktúrát ad a direktképen.

Végül a 9. fejezetben visszatérünk a geometriai kvantálás egyértelműségi problémájára. A kvantáláshoz az adaptált Kähler struktúrák családját használjuk. A kvantálás egy direktkép problémára vezet. Sok esetben ez a direktkép egy analítikus Hilbert mező lesz. Sőt csoportsokaságok esetén ez a Hilbert mező lapos, azaz a parhuzamos eltolás azonosítja a különböző kvantum Hilbert tereket, a kvantálás tehát egyértelmű. Az is kiderül, hogy a kompakt, irreducibilis, szimmetrikus terek között pontosan a csoportsokaságok azok, amelyekre a kvantálás egyértelmű.

Az [ADW, Hi] cikkek kvantálási javaslatait kompakt, szimplektikus sokaságok Kähler vagy majdnem Kähler kvantálására több szerző is tárgyalja. Viña [Viñ] az N fázistéren tekintette Kähler struktúrák egy bizonyos családját, kiszámolta az így kapott kvantum Hilbert tereken egy természetes módon definiált konnexió görbületét, azt találta, hogy általában ez nullától különböző. Foth és Uribe [FU] kicserélte az $L \to N$ előkvantumnyalábot egy L^k magas hatványra és kiszámolta az így adódó konnexió görbületét. Még a $k \to \infty$ szemiklasszikus közelítésben sem tartott nullához a görbület. Charles [Char] azonban belátta, hogyha a kvantálási sémába a félforma korrekciót is belevesszük, akkor a szemiklasszikus közelítésben a görbület már nullához tart.

EREDMÉNYEK:

2. Fejezet. Bizonyos Stein sokaságok automorfizmusai

Ez a fejezet az [Sz95] cikk fő eredményeit tartalmazza. Egy (M, g) kompakt, valós-analítikus Riemann sokaság izometriái és a T^rM−en $(0 < r \leq \infty)$ indukálódó adaptált komplex struktúra biholomorfizmusai közötti kapcsolatot vizsgáljuk. [LSz91, Theorem 5.6]-ből tudjuk, hogy a

$$\rho : TM \to \mathbb{R}, \quad \rho(v) := g(v, v)$$

függvény szigorúan pluriszubharmonikus, így egy κ_g Kähler metrika potenciálfüggvénye, ahol

$$\kappa_g(V, W) = -i\partial\bar{\partial}\rho(JV \wedge \overline{W}), \qquad V, W \in T_z(TM) \otimes \mathbb{C}, \quad z \in T^rM.$$

Mivel az adaptált komplex struktúra egyértelmű ([LSz91][Theorem 4.2] és a definíció invariáns g izometriáira, ezért minden $\varphi : (M, g) \to (M, g)$ izometriára a φ_* indukált leképezés egy biholomorfizmus. Mivel a ρ függvény is nyilvánvalóan φ_* invariáns, ezért φ_* egy κ_g izometria is. Véges r esetén ez az állítás megfordítható. Kicsit általánosabban a következő tétel igaz.

1. Tétel (disz. Theorem 2.1.1, [Sz95, Theorem A]). *Legyen (M, g) és (N, h) két kompakt, $n-$dimenziós Riemann sokaság, és $0 < r, s < \infty$. Tegyük fel, hogy az adaptált komplex struktúra létezik T^rM-en ill. T^sN-en. Jelölje κ_g és κ_h az indukált Kähler metrikákat. Tegyük fel, hogy*

$$\Phi : (T^rM, \kappa_g) \longrightarrow (T^sN, \kappa_h)$$

egy biholomorf izometria. Ekkor szükségképpen $r = s$. Továbbá ha $f := \Phi|_M$, akkor az f leképezés M-et N-re képezi izometrikus módon és $\Phi \equiv f_*$.

A bizonyítás a komplex homogén Monge-Ampère egyenletre vonatkozó Bedford-Taylor [BT] minimum-elvet használja. Ebből a tételből származott az ún merevségi probléma kérdése, azaz igaz marad-e a tételbeli állítás, ha $\Phi-$ről csak azt tesszük fel, hogy biholomorfizmus. Ezt a kérdést egy sor cikkben [Bu1, K1, K2, KM1, KM2] különféle módszereket használva vizsgálták, végül Burns és Hind-nek [BH] sikerült megmutatni, hogy a kérdésre igen a válasz.

Egy gyenge topológiai feltevés melett az 1. Tétel $r = \infty$ mellett is igaz.

2. Tétel (disz. Theorem 2.1.3, [Sz95, Theorem B]). *Legyen (M, g) és (N, h) két kompakt, $n-$dimenziós Riemann sokaság. Tegyük fel, hogy az adaptált komplex struktúra létezik TM-en ill. TN-en. Jelölje κ_g és κ_h az indukált Kähler metrikákat. Tegyük fel, hogy az első kohomológia csoport $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, és*

$$\Phi : (T, \kappa_g) \longrightarrow (TN, \kappa_h)$$

egy biholomorf izometria. Ekkor a Φ leképezés M-et szükségképpen N-re képezi diffeomorf módon. Legyen $f := \Phi|_M$. Ekkor $f : (M, g) \to (N, h)$ izometria és $\Phi \equiv f_*$.

Ebben a tételben (1. Tétellel ellentétben) lényeges feltétel, hogy Φ izometria, a biholomorfizmus önmagában nem elég. Egy biholomorfizmus elmozgathatja a nullaszelést, sőt a biholomorfizmusok csoportja, $Aut(TM)$ lehet végtelen dimenziós is, amit a következő példa mutat.

3. Példa (disz. Example 2.5.1, [Sz95, Example 7.1]). *Legyen $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ az $n-$dimenziós tórusz a szorzatmetrikával. Ekkor $T(T^n)$, az adaptált komplex struktúrával nem más, mint $\mathbb{C}^{*n} := \mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$, ahol $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ha most $n \geq 2$ és $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tetszőleges, akkor a*

$$\Phi_f : (C^*)^n \longrightarrow (C^*)^n$$
$$\Phi_f : (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \longmapsto (e^{f(z_1 z_2)} z_1, e^{-f(z_1 z_2)} z_2, z_3, \dots, z_n)$$

leképezés könnyen látható módon egy $Aut(\mathbb{C}^{*n})$ elemet ad, különböző f-ekhez mást rendelve. Így $Aut(T(T^n))$ legalább akkora, mint $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Valójában egy tórusz helyett vehettünk volna tetszőleges $K \neq S^1$ kompakt Lie csoportot, $Aut(K_{\mathbb{C}})$) ekkor is végtelen dimenziós lesz [Sz98, Corollary 2.6]. Ezzel szemben Mok [Mo] egy tételét felhasználva belátjuk, hogy

4. Tétel (disz. Theorem 2.1.2, [Sz95, Theorem 6.3]). *Legyen (M, g) egy kompakt Riemann sokaság. Legyen $0 < r < \infty$. Tegyük fel, hogy az adaptált komplex struktúra létezik $T^r M-$en. Ekkor*

(a) $Aut(T^r M)$ egy kompakt Lie csoport.

(b) Ha M irányítható, vagy az univerzális fedője kompakt, akkor $0 < s < S \leq r$ esetén $T^s M$ és $T^S M$ nem biholomorfak.

[PW, Sz91]-ből tudjuk, hogy az n-dimenziós gömbön a kerek metrika adaptált komplex struktúráját véve TS^n biholomor lesz a

$$Q^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\}.$$

affin kúpszelettel. S^n izometriacsoportjának komplexifikáltja az $O(n+1, \mathbb{C})$ komplex ortogonális csoport, természetes módon biholomorfizmusokkal hat Q^n-en. Ez általában is igaz:

5. Tétel (disz. Theorem 2.1.4, [Sz95, Theorem C]). *Legyen (M, g) egy kompakt, $n-$dimenziós Riemann sokaság. Tegyük fel, hogy az adaptált komplex struktúra létezik TM-en. Jelölje G az (M, g) sokaság izometria csoportját. Tekintsük G-t, mint egy transzformáció csoportot TM-en, az indukált csoporthatásra nézve. Ekkor ez a $G-$hatás kiterjed a $G_{\mathbb{C}}$ komplexifikált csoportnak egy csaknem effektív holomorf hatásává.*

3. Fejezet. Kompakt, normális Riemann homogén terek

Ez a fejezet az [Sz98] cikk fő eredményét tartalmazza. Emlékeztetőül idézzük vissza, hogy egy M sokaságon vett g Riemann metrikát egész típusúnak hívunk, ha az adaptált komplex struktúrája az egész TM-en definiálható. Ilyenek: az euklideszi tér a lapos metrikával, a kompakt Riemann szimmetrikus terek (az 1-rangú eset [PW], az általános eset: [Sz95, Theorem 2.5]), forgásfelületek egy bizonyos egyparaméteres családja [Sz91, Theorem 2.6]. Egész metrikát kapunk fedésnél illetve ilyen metrikák direktszorzatánál. Sokáig nem is volt más példa.

Legyen K egy kompakt Lie csoport, L egy zárt részcsoportja. Legyen g egy biinvariáns metrika $K-$n és $M := K/L$. g indukál egy g_M metrikát $M-$en, ez a normális Riemann homogén metrika.

A fejezet fő eredménye a következő tétel.

6. Tétel (disz. Theorem 3.1.1, [Sz98, Theorem 2.2]). *Minden kompakt, Riemann normális homogén metrika egész típusú.*

A bizonyítás ennél többet ad. Valójában azt bizonyítjuk be, hogy megadható egy természetes diffeomorfizmus TM és $K_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ között, mely leképezéssel olyan komplex struktúrát nyerünk $TM-$en, ami a normális metrikához adaptált. A bizonyítás felhasználja a $K_{\mathbb{C}}/L_{\mathbb{C}}$ homogén térről szóló Mostow felbontási tételt, illetve azt, hogy minden kompakt Lie csoport beágyazható megfelelően nagy méretű unitér mátrixok csoportjába.

Később Aguilarnak [Ag1] a szimplektikus redukció módszerét használva sikerült más egész típusú metrikákat konstruálnia. További példát azonban azóta sem sikerült találnia senkinek sem. Gömbökön az ellipszoidok ([Ag2]), a Liouville metrikák ([Ag3]), a Zoll metrikák [BL] és $S^3 = SU(2)$-n a balinvariáns metrikák([ABI] között is csak a kerek metrika ill. a már ismert Berger metrika lesz egész.

4. Fejezet. A geodetikus áramra invariáns involutív struktúrák

Egy X sima sokaságon egy involutív struktúra nem más, mint az X komplexifikált érintőnyalábjának olyan V komplex résznyalábja, melyre teljesül, hogy V-nek minden (lokális) Z_1, Z_2 szelésére a $[Z_1, Z_2]$ Lie zárójel is V-nek egy (lokális) szelése lesz. Ez a fogalom közös természetes általánosítása a komplex ill. CR struktúráknak és a fóliázásoknak ([BCH, Tr, HJ, J, Mez, Le]). A geometriai kvantálásban egy speciális involutív struktúra, az ún. (nemnegatív) komplex polarizáció játszik fontos szerepet ([W]).

Ebben a fejezetben olyan involutív struktúrákat vizsgálunk, amelyek egy kompakt szimmetrikus tér érintőnyalábjának egy nyílt részén vannak értelmezve és invariánsak a normalizált geodetikus áramra. Ezek a struktúrák az adaptált komplex struktúrának egy alkalmas 1-paraméteres diffeomorfizmus család alkalmazásával kapott limeszeként állnak elő.

Ha a tér rangja 1, ez a limesz egy igazi komplex struktúrát ad. A magasabb rangú esetben egy bonyolultabb szerkezetű involutív struktúra keletkezik. A két esetet szétválasztva vizsgáljuk. A fejezet első része az 1-rangú esetet tartalmazza.

Egy sokaság kilyukasztott érintőnyalábján ($\mathring{\mathrm{T}}\mathrm{M}$), a nulla szelés komplementerét értjük.

$$\Phi_\varepsilon(v) := \varepsilon \exp(\| v \|) \frac{v}{\|v\|}. \tag{3}$$

Legyen (M, g) egy Riemann sokaság, $s > 0$ $p \in M$, $z \in T_pM$. $N_s z := sz$, $R_z(.) = \mathcal{R}(., z)z$ a Jacobi (vagy görbületi operátor), ahol $\mathcal{R}$ a görbületi tenzor. Az $\hat{R}_z : T_pM \to T_pM$ operátort a

$$\hat{R}_z(X) = g(X, z)z + \mathcal{R}(X, z)z \tag{4}$$

formula definiálja. $TM-$en $\vartheta(\xi) := g(\pi_*\xi, z)$ a kanonikus $1-$forma, $\omega := -d\vartheta$ a kanonikus szimplektikus forma. $\omega_{\mathbb{C}}$ az ω komplexifikáltja. $\varphi(v) := \sqrt{g(v, v)}$. A $\varphi-$hez tartozó Hamilton vektormező ξ_φ, amelynek árama ψ_t a normalizált geodetikus áram.

4.1. Az 1-rangú eset

A fejezetnek ez a része az [Sz99] cikk eredményeit tartalmazza.

A fejezet ezen első felének fő célja, hogy egy kompakt 1-rangú szimmetrikus tér érintőnyalábján két különböző konstrukcióból származó komplex struktúra közötti kapcsolatot feltárja. Az egyik a J_A adaptált komplex struktúra, a másik J_S, ami csak a kilyukasztott (ko)érintőnyalábon és csak nagyon speciális metrika esetén létezik. Ezen komplex struktúrák története a következő.

Souriau [So2] azonosította a regularizált Kepler sokaságot a $\mathring{\mathrm{T}}^*S^n$ térrel, ahol S^n az $n-$dimenziós gömbfelület. Souriau ebben a cikkében azt is megmutatta, hogy ez a tér diffeomorf a $Q \setminus \{0\}$ komplex sokasággal, ahol $Q_0 = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} z_j^2 = 0\}$. Ezért $\mathring{\mathrm{T}}^*S^n$ örököl egy természetes J_S komplex struktúrát.

Később Rawnsley [Ra1] vette észre, hogy erre a komplex struktúrára nézve a normafüggvény szigorúan pluriszubharmonikus, a belőle nyert Kähler metrika Kähler formája megegyezik a koérintőnyaláb kanonikus szimplektikus formájával, továbbá a komplex struktúra invariáns lesz a normalizált geodetikus áramra. Ezeket a tulajdonságokat használva vizsgálta gömbökön a geodetikus áram kvantálását [Ra2].

Ezután Furutani és Tanaka [FT] definiált egy Kähler struktúrát a komplex, ill. kvaternió projektív terek kilyukasztott koérintőnyalábján. Ez a Kähler struktúra szintén invariáns a normalizált geodetikus áramra. Ezt kihasználva tárgyalta Furutani és Yoshizawa [FY] a komplex, ill. kvaternió projektív terek geodetikus áramának kvantálását. Furutani és Tanaka megközelítése Lie elméleti és mátrixokat használ. Ezeknek a struktúráknak Ii és Morikawa [IM] egy geometriailag jobban kezelhető leírását adta. Mi is ezt a leírást használva egységesen tárgyaljuk az összes $1-$rangú kompakt szimmetrikus teret, a Cayley projektív síkot is tekintve.

Ha (M,g) egy kompakt, $1-$rangú, Riemann szimmetrikus tér, akkor $0 \neq z$ esetén az R_z görbületi operátor pozitív szemidefinit, $\hat{R}_z$ (l. (4)) pedig pozitív definit. Legyen $T_z(TM) = H_z + V_z$ a z pontban az érintőtér direktfelbontása horizontális és vertikális alterekre. Megmutatjuk, hogy ebben a felbontásban a

$$J_0 := \begin{bmatrix} 0 & -\left(\sqrt{\hat{R}_z}\right)^{-1} \\ \sqrt{\hat{R}_z} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

formula egy majdnem komplex struktúrát definiál a $\mathring{T}M$ sokaságon, mely gömb esetén megegyezik a Souriau [So2] ill. Rawnsley [Ra1] definiálta komplex struktúrával, komplex vagy kvaternió projektív tér esetén pedig a Furutani-Tanaka, Ii-Morikawa [FT, IM] tanulmányozta komplex struktúrával.

7. Tétel. *(disz. Theorem 4.1.1, [Sz99, Theorem 3.2]) Legyen (M,g) egy kompakt, $1-$rangú Riemann szimmetrikus tér. J_A az adaptált komplex struktúra megszorítása $TM-$re. Ekkor*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0}(\Phi_\varepsilon)_* J_A = J_0.$$

A normalizált geodetikus áram és az $N_s, s>0$ leképezések J_0 biholomorfizmusok.

4.2. Magasabb rangú eset

A fejezetnek ez a része az [Sz01] cikk néhány eredményét tartalmazza. A 7. Tételt szeretnénk általánosítani. Legyen (M^n,g) egy kompakt Riemann szimmetrikus tér, $z \in T_mM$. Ekkor a (4)-beli $\hat{R}_z$ módosított görbületi operátor csak pozitív szemidefinit, a magja nem triviális. Ezért az (5) formulának nincs értelme, a J_0 komplex struktúrának nem létezik (közvetlen) analogonja. Ha ez nem is, az (1,0) vektorok nyalábja itt is értelmes.

Az

$$\mathcal{E}_z := \{X_z^H - i(\sqrt{\hat{R}_z}X)_z^V : X \in T_mM \otimes \mathbb{C}\} < T_z(TM)\otimes\mathbb{C} \tag{6}$$

alterek egy $\mathcal{E} \to \mathrm{T}M$, folytonos, $n-$rangú komplex vektornyalábot alkotnak (itt a X_z^V ill X_z^V szimbólumok egy X vektor z-pontba vett horizontális ill vertikális felemeltjét jelentik).

A (3) definiálta diffeomorfizmust használva, a 7. Tétel analogonját kapjuk.

8. Tétel. *(disz. Theorem 4.2.2, [Sz01, Theorem 3.1]) Legyen (M,g) egy kompakt, Riemann szimmetrikus tér. $TM-$en vegyük a g adaptált komplex struktúráját. Ekkor*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\Phi_\varepsilon)_*(T^{1,0}TM) = \mathcal{E}.$$

Az $1-$rangú esetben ez a nyaláb az (5)-beli J_0 komplex struktúra (1,0) típusú érintővektorainak a nyalábja. A magasabb rangú esetben $\mathcal{E}$ nem lesz sima, $\mathring{T}M-$en egy ún. rétegezettségi struktúrát ad. Ez annak a következménye, hogy a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_q \cap \overline{\mathcal{E}}_q$ dimenzió pontról pontra változik $\mathring{T}M-$ben. Azon részhalmazok, ahol ez a dimenzió állandó, alkotják a rétegeket. Azon pontok halmaza, ahol ez a dimenzió a legkisebb, egy nyílt és sűrű részhalmaza $\mathring{T}M-$nek, ez a maximális dimenziójú réteg. $\mathcal{E}$ egy rétegre megszorítva egy integrálható Cauchy-Riemann (=CR) struktúrát definiál. Ez a CR struktúra szoros kapcsolatban van kompakt Lie csoportok adjungált orbitjainak komplex struktúráival. Erről szól a disszertáció 4.2.3 szakasza.

A fejezet fő eredménye a következő tétel.

9. Tétel. *(disz. Theorem 4.2.11, [Sz01, Theorem 6.1]) Legyen (M, g) egy kompakt, Riemann szimmetrikus tér. Ekkor az $\mathcal{E} \to \mathring{T}M$ nyaláb N_s és ψ_t, invariáns, ahol $s > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Az $\mathcal{E}_z$ fibrumok $\omega_{\mathbb{C}}-$Lagrange alterek $T_z(TM) \otimes \mathbb{C}-$ben és $-i\omega_{\mathbb{C}}(\alpha, \overline{\alpha}) \geq 0$ minden $\alpha \in \mathcal{E}_z-$re. $\mathcal{E}$ egy rétegezését adja $\mathring{T}M-$nek. $\mathcal{E}$ megszorítása egy tetszőleges rétegre valós-analítikus és involutív. $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{E}}$ állandó a rétegeken, a nyílt sűrű rétegen $= l - 1$, ahol l az M rangja.*

A geometriai kvantálás nyelvére ([W]) lefordítva a tétel azt mondja, hogy az $\mathcal{E}|_D$ nyaláb egy nemnegatív komplex polarizációja $(D, \omega)-$nak és ez a polarizáció invariáns a normalizált geodetikus áramra nézve.

A magasabb rangú esetekben a skálázási módszerrel (a (3)-hoz hasonló 1-paraméteres diffeomorfizmus családdal, természetes feltételek mellett) nem kapható a normalizált geodetikus áramra invariáns igazi komplex struktúra a CR struktúra helyett (disz. Theorem 4.2.13= [Sz01, Theorem 7.1]).

5. Fejezet. Weyl csoport ekvivariáns leképezések és hiperkähler metrikák

5.1. Weyl csoport ekvivariáns leképezések

A fejezetnek ez a része a Korányi Ádámmal közös [KSz] cikk eredményeit tartalmazza. A szimmetrikus terek elméletében alapvető szerepet játszik Chevalley kiterjesztési tétele ([He, 299, ill 340. old.]): legyen $\mathfrak{g}$ egy valós, féligegyszerű, nemkompakt típusú Lie algebra, θ egy Cartan involúció, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ eqy neki megfelelő Cartan felbontás, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ egy maximális Abel altér. Ha most G egy összefüggő $\mathfrak{g}$ Lie algebrájú Lie csoport és ennek K a $\mathfrak{k}$ Lie algebrához tartozó részcsoportja, akkor K hat $\mathfrak{p}-$n (az adjungált reprezentációval), a W Weyl csoport pedig hat $\mathfrak{a}-$n. A kiterjesztési tétel azt állítja, hogy minden $\mathfrak{a}-$n adott $W-$invariáns polinom egyértelmű módon kiterjed egy $\mathfrak{p}-$n értelmezett $K-$invariáns polinommá.

A tételt Dadok ([Da]) kiterjesztette polinomokról C^∞ függvényekre. A valós-analítikus változat szintén igaz, l. pld. [He, 295.old]. Természetes kérdés, vajon analóg eredmények igazak-e $W-$ekvivariáns leképezésekre. Kiderül, hogy mind a 3 kategóriában (polinomiális, C^∞, C^ω) igaz a kiterjesztési tétel. Valójában a bizonyítás egy tekintélyes része, jóllehet kicsit indirekt formában megtalálható Solomon [Sol] és Michor [Mi1, Mi2] cikkeiben.

10. Tétel. *(disz. Theorem 5.1.1, [KSz, Theorem 0.1]) Legyen $\mathfrak{g}$ egy valós féligegyszerű Lie algebra, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ egy Cartan felbontása és $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ egy maximális Abel altér. Legyen K az $Int(\mathfrak{g})-$nek $\mathfrak{k}$ Lie algebrához tartozó Lie részcsoportja és W a Weyl csoport. Ekkor minden $W-$ ekvivariáns polinomiális (C^∞, ill C^ω) $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ leképezés kiterjed egy $K-$ ekvivariáns $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ polinomiális (C^∞, ill C^ω) leképezéssé. A kiterjesztés egyértelmű.*

Ezt a kiterjesztési tételt a Dancerrel a hiperkähler metrikákról írott [DSz]] cikkünk inspirálta (disz. section 5.2). Ott ugyanis a metrika konstruálásához be kellett látni, hogy (klasszikus típusú) kompakt, Hermitikus szimmetrikus terek érintőnyalábján egy bizonyos fibrumtartó, megfelelő csoportra ekvivariáns leképezés sima. Ezt Andrew Dancerrel csak úgy tudtuk megtenni, hogy felhasználtuk a szimmetrikus terek klasszifikációs tételét és minden itt fellépő tér esetén ellenőriztük a simaságot. A 10. Tételből ez a simaság rögtön következik (l. disz. Proposition 5.2.8). A 10.Tétel egy további következménye

11. Következmény. *(disz. Corollary 5.1.2, [KSz, Corollary 0.2]) Legyen (M,g) egy kompakt, vagy nemkompakt típusú Riemann szimmetrikus tér, $m_0 \in M$, $\mathfrak{a} \subset T_{m_0}M$ maximális Abel altér és W a Weyl csoport. Ekkor minden $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, $W-$ekvivariáns C^∞ (C^ω) leképezés kiterjed, méghozzá egyértelmű módon egy $\Phi : TM \to TM$ izometriacsoport ekvivariáns leképezéssé. Φ egy (C^∞, vagy C^ω) diffeomorfizmus akkor és csak akkor, ha φ az.*

A 10. Tétel rögtön egy további problémát vet fel: hogyan lehet leírni egy tetszőleges $K-$ ekvivariáns $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ leképezést? Nevezzünk egy ilyen leképezést radiálisnak, ha létezik olyan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ maximális Abel altér, melyet az F önmagába visz. Mivel K tranzitívan hat az ilyen $\mathfrak{a}$-k halmazán, egy radiális leképezés $\mathfrak{p}$-nek minden $\mathfrak{a}$ maximális Abel alterét önmagába viszi. Hívjuk $\mathfrak{g}-$t Hermitikus típusúnak, ha $\mathfrak{p}-$n van $K-$invariáns komplex vektortér struktúra (azaz a neki megfelelő szimmetrikus tér Hermitikus) és legyen $\mathfrak{g}$ egyszerű.

12. Tétel (disz. Theorem 5.1.3, [KSz, Theorem 0.3]). *Legyen $F : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ egy $K-$ekvivariáns polinomiális (C^∞, C^ω) leképezés. Ha $\mathfrak{g}$ nem Hermitikus típusú, akkor F radiális. Legyen $\mathfrak{g}$ Hermitikus típusú. Ha $F_j : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$, $j = 1,2$ tetszőleges $K-$ekvivariáns radiális polinomiális (C^∞, C^ω) leképezések, akkor $F = F_1 + IF_2$ is egy $K-$ekvivariáns radiális polinomiális (C^∞, C^ω) leképezés. Minden $K-$ekvivariáns radiális polinomiális (C^∞, C^ω) $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ leképezés megkapható ilyen módon.*

5.2. Hiperkähler struktúrák

A fejezetnek ez a része az Andrew Dancerrel közös [DSz] cikk eredményeit tartalmazza.

Egy X sokaságot hiperkomplexnek hívnak, ha van rajta két komplex struktúra, melyek majdnem komplex tenzora I ill J antikommutál azaz $IJ = -JI$. Ekkor $K := IJ$ is egy integrálható majdnem komplex struktúra lesz, sőt így kapunk komplex struktúráknak egy egész seregét. Minden $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$-ra, melyre $x^2+y^2+z^2 = 1$, az $xI + yJ + zK$ is egy integrálható majdnem komplex struktúra. Ha X-en egy g Riemann metrika is adott, mely Kähler I-re is és J-re is, akkor X-et hiperkählernek nevezik. Ekkor g Kähler lesz mindegyik $xI+yJ+zK$ komplex struktúrára nézve. Egy (X^{4n}, g) Riemann sokaság pontosan akkor hiperkähler, ha a holonómiacsoportja $Sp(n)$-ben van. Ezek a sokaságok fontosak többek között azért, mert egy ilyen metrika automatikusan Ricci lapos. Ezek a Riemann sokaságok mint lehetséges új geometriák, először Bergernek [Ber] a holonómiacsoportok osztályozásánál bukkantak fel. Az első példákat Eguchi and Hanson [EH] konstruálta $T^*\mathbb{C}P^1-$en, majd Calabi [C] $T^*\mathbb{C}P^n-$en és Burns [Bu2] a twistor konstrukciót használva T^*M-en, ahol M egy kompakt, Hermitikus szimmetrikus tér. További fontos nemkompakt példák: az ALE terek, gravitációs instantonok, mérceelméleti egyenletek megoldásainak modulusterei Nakajima tegez varietásai.

Ha M egy komplex sokaság, akkor T^*M-en is indukálódik egy komplex struktúra. Ha $M-$en még egy g Riemann metrika is adott, ennek segítségével azonosítani tudjuk T^*M-et $TM-$el. Legyen I az így T^*M-ből kapott komplex struktúra $TM-$en.

Ha g adaptált komplex struktúrája (legyen ez J) szintén létezik az egész TM-en, természetesen adódik a kérdés, hogy generálnak-e együtt egy hiperkomplex(-kähler) struktúrát $X = TM$-en?

A nullaszelés mentén I és J valóban antikommutál (mindig), de már a komplex projektív terek (a kanonikus Kähler metrikával) esetében sem antikommutálnak a nullaszelésen kívül. Ezért olyan $\phi : TM \to TM$ diffeomorfizmust keresünk, melyre $(\phi^* J)I = -I\phi^* J$. Ez az ötlet kompakt, klasszikus típusú Hermitikus szimmetrikus (M, g) terek esetén működik. Ha ϕ-t az izometriacsoportra nézve ekvivariánsnak keressük, melyről még feltesszük, hogy egy adott Weyl kamrát önmagára képez, akkor kiderül, hogy ilyen ϕ létezik, méghozzá egy pozitív konstans erejéig egyértelműen.

Legyen $M = U/K$ egy klasszikus típusú kompakt, irreducibilis, Hermitikus szimmetrikus tér. $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_*$ Cartan felbontással, ahol $\mathfrak{u}$ és $\mathfrak{k}$ az U ill. K Lie algebrája és $\mathfrak{p}_*$ egy AdK invariáns komplementuma $\mathfrak{k}-$nak. Egy m pontot rögzítve $U/K-$ban, $\mathfrak{p}_*-$ot azonosíthatjuk $T_m M-$el. Legyen $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ egy maximális Abel altér $\mathfrak{p}_*-$ban.

13. Tétel. *(Disz. Theorem 5.2.7, [DSz, Theorem 3.3] Létezik $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}-$ban egy alkalmas ortonormált bázis $e_1, \ldots, e_r$ a következő tulajdonsággal. Legyen $\phi : TM \to TM$ egy $U-$ekvivariáns diffeomorfizmus mely minden $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}-$beli nyílt Weyl kamrát önmagára képez. Ekkor $\phi^* J$ antikommutál $I-$vel pontosan akkor, ha van olyan $s > 0$, hogy*

$$\phi(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j e_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \sinh^{-1}(s\lambda_j) e_j, \qquad (7)$$

Geatti és Iannuzzi a [GI] cikkükben a ϕ diffeomorfizmust használva tárgyalja a nemkompakt Hermitikus szimmetrikus terek esetét.

A 11. Következmény miatt egy (7) alakú $\phi : \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*} \to \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ diffeomorfizmus kiterjed egy $U-$ekvivariáns valós-analítikus $TM \to TM$ diffeomorfizmussá. Egy ilyen ϕ leképezéssel a $\phi^* J$ és I generálta hiperkomplex struktúrához létezik egy g Riemann metrika, mely $I-$re és $\phi^* J-$re vonatkozóan is Kähler. Így kapjuk

14. Tétel. *(disz. Theorem 5.2.1, [DSz, Theorem 3.4]) Legyen $(M = U/K, g)$ egy klasszikus típusú, kompakt, irreducibilis, Hermitikus szimmetrikus tér. Ekkor TM-en létezik egy $U-$invariáns hiperkähler metrika.*

A tételünk Burns [Bu2] eredményére ad új bizonyítást az *aks*t használva. Biquart és Gauduchon [BG] a szimplektikus redukció módszerével adott egy újabb bizonyítást erre a tételre.

6. Fejezet. Adaptált komplex struktúrák és geometriai kvantálás

6.1. Adaptált komplex struktúrák új megvilágításban

Ez a rész a Lempert lászlóval közös [LSz12] cikk eredményeit tartalmazza. Legyen (M, g) egy kompakt Riemann sokaság. Az N fázistér legyen az $x : \mathbb{R} \to M$ paraméterezett geodetikusok tere. $T_x N$ elemei azonosíthatóak az x menti Jacobi mezőkkel. Tetszőleges $t_0 \in \mathbb{R}$ egy $N \ni x \mapsto \dot{x}(t_0) \in TM$ diffeomorfizmust indukál és a kanonikus szimplektikus forma visszahúzottja $TM \approx T^*M-$ről $N-$re nem függ t_0-tól, legyen ez ω. Ha $\xi, \eta \in T_x N$ Jacobi mezők, akkor

$$\omega(\xi, \eta) = g(\xi(t), \eta'(t)) - g(\eta(t), \xi'(t)), \qquad \text{minden } t \in \mathbb{R}, \qquad (8)$$

ahol $'$ jelöli a Levi-Civita kovariáns deriváltat. $x \in N-$re legyen $L(x) = g(\dot{x}, \dot{x})$. Minden $q \in M$ pontot azonosítsunk az $\equiv q$ konstans geodetikussal. Így $M-$et azonosítottuk az $N-$beli nulla sebességű geodetikusokkal. A $t \mapsto a+bt$, $a, b \in \mathbb{R}$ átparaméterezések hatnak $N-$en, ezzel az $\mathcal{A}$ affin átparaméterezések Lie félcsoportjának egy jobb hatását kapjuk $N-$en. Ha $r \in [0, \infty)$, legyen $\mathcal{A}^r \subset \mathcal{A}$ azon $a + bt$ elemek halmaza, amelyekre $|b| \leq r$. $\mathcal{A}^r$ egy Lie részfélcsoport, ha $r \leq 1$. Legyen $X \subset N$ egy $\mathcal{A}^1$–invariáns nyílt részhalmaz.

15. Definíció. *Ha adott egy komplex sokaság struktúra $\mathcal{A}^1-$en, akkor $X-$en egy komplex struktúrát adaptáltnak hívunk, ha minden $x \in X-$re az $\mathcal{A}^1 \ni \sigma \mapsto x\sigma \in X$ orbit leképezés holomorf.*

Ha $X-$en van adaptált komplex struktúra, akkor $\mathcal{A}^1-$ komplex struktúrája balinvariáns kell legyen (disz. Theorem 6.1.2). $\mathcal{A}^1-$en a balinvariáns komplex struktúrákat $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ paraméterezi a következő módon. Minden $\sigma \in \mathcal{A}$ kiterjed $\mathbb{C}-$nek egy affin leképezésévé. Rögzített $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}-$re legyen $I(s)$ az a visszahúzott komplex struktúra, amit $\mathbb{C}-$ből az $\mathcal{A}^1 \ni \sigma \mapsto \sigma s \in \mathbb{C}$ leképezéssel kapunk. $I(s)$ balinvariáns lesz és $\mathcal{A}^1-$en minden balinvariáns komplex struktúra ilyen (disz. sect. 6.1.2)

16. Tétel. *(disz. Theorem 6.1.4, 6.1.6 [LSz12, Theorem 2 and Corollary 3])*
(a) Ha az $\mathcal{A}^1-$invariáns $X \subset N$ nyílt részhalmazon van $(\mathcal{A}^1, I(s))-$hez adaptált komplex struktúra, akkor ez egyértelmű. Jelölje ezt $J(s)$. Ha csak egyetlen $s_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}-$re létezik $J(s_0)$, akkor $J(s)$ is létezik minden $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}-$re. Ha $\partial_s, \overline{\partial}_s$ jelöli az ezen struktúrára vett komplex parciális deriváltakat, akkor $i\omega = (\mathrm{Im}\ s)\overline{\partial}_s\partial_s L$ az X halmazon. Speciálisan ω egy pozitív vagy negatív $(1,1)$ forma, az Im s előjelének megfelelően.

(b) Ha M valós-analítikus, akkor létezik egy $\mathcal{A}^1-$invariáns X nyílt környezete $M \subset N-$nek, hogy $X\mathcal{A}^{1/|Im\, s|}-$en van $(\mathcal{A}^1, I(s))-$hez adaptált $J(s)$ komplex struktúra minden $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}-$re.

A tételben szereplő adaptált komplex struktúrák egy közös holomorf fibrálássá állnak össze:

17. Tétel. *(disz. Theorem 6.1.11, [LSz12, Theorem 5]) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}^1-$invariáns $X \subset N$ nyílt részhalmazon van $I(i)-$hez adaptált komplex struktúra. Akkor a*

$$Z = \{(s, x) \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \times N : x \in X\Sigma^{1/|Im\, s|}\}$$

halmazon létezik egy egyértelmű komplex struktúra, amelynek a megszorítása egy $\{s\} \times X\Sigma^{1/|Im\, s|}$ fibrumra az $I(s)-$hez lesz adaptált és minden $x \in N-$re az $s \mapsto (s, x) \in Z$ leképezés holomorf ott, ahol definiálva van. A $pr\colon (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \times N \to N$, projekcióval $\tilde{\omega} := pr^*\omega-$ra

$$i\tilde{\omega} = \overline{\partial}\partial(L\,\mathrm{Im}\, s) \qquad \textit{a } Z \textit{ halmazon.} \tag{9}$$

(Itt $L\mathrm{Im}\, s$ az $(s, x) \mapsto L(x)\mathrm{Im}\, s$ függvényt jelenti.) Végül ha $X-$en a $J(i)$ $(I(i)-$hez adaptált) komplex struktúrát vesszük, akkor a

$$Z \ni (s, x) \mapsto (s, x\sigma) \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \times X, \qquad \textit{ahol } \sigma i = s, \tag{10}$$

leképezés biholomorfizmus. Speciálisan $Z \ni (s, x) \mapsto s \in \mathbb{C}$ holomorf.

6.2. Geometriai kvantálás

Legyen az (M^m, g) kompakt Riemann sokaság egy mechanikai rendszer klasszikus konfigurációs tere, ahol a metrika felel meg a kinetikus energia kétszeresének. Ezen rendszer geometriai kvantálásán, Kostant és Souriau receptje alapján ([Ko, So, Wo] a következőt értjük. Elsőként vesszük az N fázisteret, ami gyakran $N = TM \approx T^*M$, de esetünkben jobb választás $N-$et az M paraméterezett geodetikusainak tekinteni. Bármelyik konkrét realizációt is választva N természetes módon egy szimplektikus sokaság lesz, ahol az ω egy egzakt szimplektikus forma $N-$en (egy megfelelő valós a $1-$formára -$\omega = da$).

Majd veszünk egy $E \to N$ Hermitikus vonalnyalábot ellátva egy metrikus konnexióval, melynek görbülete $-i\omega$ (ez az ún. előkvantum nyaláb). Ha M egyszeresen összefüggő, akkor ez a nyaláb egyértelmű. Mivel ω egzakt, az $E = N \times \mathbb{C} \to N$ nyaláb a triviális fibrum-metrikával ellátva minden esetben választható. Így az E szelései $\psi : N \to \mathbb{C}$ függvények lesznek, a konnexiót pedig a $\nabla_\zeta \psi = \zeta\psi + ia(\zeta)\psi$ formula definiálja. $\omega^m/m!$ egy térfogati formát ad $N-$en. A keresett kvantum Hilbert tér első jelöltje H^{prQ} az E vonalnyaláb L^2 szeléseinek Hilbert tere.

Bizonyos fizikai elvek miatt ez a Hilbert tér túlságosan nagy, ezért a kvantálási eljárást módosítani kell. Ezt a célt szolgálja $N-$en egy polarizáció választása. Egy természetes ilyen választás egy olyan komplex struktúra megadása $N-$en, amelyre nézve ω egy Kähler forma. Ebben az esetben az E vonalnyalábon is indukálódik egy holomorf struktúra. Ennek segítségével úgy csökkentjük $H^{prQ}-$et, hogy a H kvantum Hilbert térnek az E nyaláb holomorf L^2 szeléseinek Hilbert terét választjuk.

Gyakran szükség van ennek a konstrukciónak további kis módosítására, az ún. félforma korrekcióra, mely a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy κ egy négyzetgyöke a K_N kanonikus nyalábnak (azaz $\kappa \otimes \kappa \simeq K_N$). Ekkor a H^{korr} korrigált kvantum-Hilbert tér az $E \otimes \kappa$ nyaláb holomorf L^2 szeléseiből áll.

Bizonyos szituációkban $N-$en létezik komplex struktúráknak egy egész családja (melyet egy S halmaz paraméterez). Ekkor a H_s (H_s^{korr}) kvantum Hilbert terek is függenek az $N-$en választott Kähler struktúrától. A geometriai kvantálás egyik alapkérdése az *egyértelműség:* a különbözö választásokkal kapott kvantum-Hilbert terek kanonikusan azonosíthatóak-e? Ezt a kérdést sokan, sokféle nézőpontból vizsgálták. ([ADW, Bl1, Bl2, Char, FMMN1, FMMN2, FU, Hal1, Hal2, Hi, KW, Ko, Ra2, Viñ].

Az 1990'es évek elején Hitchin [Hi], Axelrod, Della Pietra és Witten [ADW] azt javasolták, hogy abban az esetben, amikor maga az S halmaz is egy komplex sokaság, „tekintsük" a H_s Hilbert tereket, mint egy $H \to S$ Hilbert nyaláb fibrumait. Ha ezen a nyalábon még egy Hermitikus konnexiót is sikerül (természetes módon) találni, akkor ennek párhuzamos eltolása a H_s Hilbert terek kanonikus unitér azonosítását adja. A disszertáció második részét az egyértelműség kérdése inspirálta. Az egyértelműséget az adaptált komplex struktúrák családjára nézve vizsgáljuk.

A félformával nem korrigált esetben [ADW] azt is javasolja, hogy tekintsük a H_s családot a $H^{prQ} \times S \to S$ triviális Hilbert nyaláb $H \to S$ Hilbert résznyalábjának, a (kvantum) konnexió $H-$n pedig legyen a $H^{prQ} \times S \to S$ nyaláb triviális konnexiója komponálva a $H-$ra vonatkozó ortogonális projekcióval. Az adaptált komplex struktúrák családjára nézve nem ismert, hogy ez az ötlet működik-e. Ha a félforma korrekciót is szeretnénk figyelembe venni, újabb nehézség támad.

A $K_s \to N$ kanonikus nyaláb komplex struktúrától való függése miatt a négyzetgyöke κ_s, ennek következtében pedig az $E \otimes \kappa_s$ nyaláb L^2-szeléseinek H_s^{prQ} Hilbert tere is függeni fog az s paramétertől. Nem világos tehát, hogy egyáltalán ez a H_s^{prQ} Hilbert tér család ellátható-e termésetes módon egy Hilbert nyaláb struktúrával.

Legyen (M, g) egy olyan kompakt Riemann sokaság, melyre az adaptált komplex struktúrák léteznek $N-$en. 6.1.-ből tudjuk, hogy az S felső félsík paraméterezi ezeket. Legyen H^{prQ} az H_s^{prQ} Hilbert terek diszjunkt uniója a természetes $p : H^{prQ} \to S$ projekcióval. Így egy konkrét példát kapunk Hilbert mezőre.

18. Definíció. *Hilbert mezőn egy halmazok közötti $p \colon H \to S$ leképezést értünk, ahol minden $H_s = p^{-1}(s)$ fibrumon adott egy Hilbert tér struktúra. Ennek egy szelése: egy $\varphi \colon S \to H$ leképezés, amelyre $\varphi(s) \in H_s$. Sem a H totális téren, sem az S alaphalmazon apriori nincs megadva sem topológia sem sima sokaság struktúra.*

19. Tétel. *(disz. Theorem 6.2.2, [Sz]) A $p : H^{prQ} \to S$ Hilbert mezőn létezik két nem ekvivalens sima Hilbert nyaláb struktúra.*

Az az ötlet, hogy a H_s^{korr} kvantum Hilbert terek családján úgy próbáljunk egy Hilbert nyaláb struktúrát definiálni, hogy a H_s^{prQ} család alkotta „nyaláb" résznyalábjának tekintjük, a 19. Tétel alapján nem működik. Ez a nehézség vezetett el oda, hogy az [LSz14] cikkben bevezessük a sima és analítikus Hilbert mező fogalmát, mint az Hermitikus konnexióval ellátott Hilbert nyaláb általánosításait. A 7. fejezet részletesen tárgyalja ezeket az objektumokat. A 8. fejezet arról szól, hogy holomorf vektornyalábok direkt képei gyakran ilyen általános Hilbert mezők (és nem feltétlen igazi nyalábok) lesznek. A 9. fejezetben visszatérünk a kvantálás egyértelműsége kérdéshez, az adaptált komplex struktúrák családját használva. A 17.Tétel garantálta holomorf szubmerzió alapvető szerepet játszik ennek a kérdésnek egy direkt kép problémává alakításában. Az így nyert direkt kép, mint Hilbert mező, lapossága azzal lesz ekvivalens, hogy az adott Riemann sokaság esetén $N-$en a kvantálás egyértelmű-e.

7. Fejezet. Hilbert mezők

Ez a fejezet a Lempert lászlóval közös [LSz14] cikk egyik fejezete.

Legyen $p : H \to S$ egy Hilbert mező.

A fibrumonkénti belső szorzatot egyszerre tekintve kapjuk a

$$h \colon H \oplus H \to \mathbb{C}, \qquad \text{ahol} \qquad H \oplus H = \coprod_{s \in S} H_s \oplus H_s.$$

függvényt. Egy S sima sokaságon Vect S jelöli a komplex értékű sima vektormezőket.

20. Definíció. *Legyen S egy sima sokaság. Egy $H \to S$ Hilbert mezőn egy sima struktúra megadásán a következőt értjük: adott H szeléseinek egy Γ^∞ halmaza, mely zárt az összeadásra és a $C^\infty(S)$ elemeivel való szorzásra nézve, továbbá minden $\xi \in \mathrm{Vect}\, S$-re adott egy $\nabla_\xi \colon \Gamma^\infty \to \Gamma^\infty$ lineáris operátor úgy, hogy $\xi, \eta \in \mathrm{Vect}\, S$, $f \in C^\infty(S)$, $\varphi, \psi \in \Gamma^\infty$ esetén*

$$\nabla_{\xi+\eta} = \nabla_\xi + \nabla_\eta,\ \nabla_{f\xi} = f\nabla_\xi,\ \nabla_\xi(f\varphi) = (\xi f)\varphi + f\nabla_\xi\varphi; \tag{11}$$
$$h(\varphi,\psi) \in C^\infty(S) \text{ and } \xi h(\varphi,\psi) = h(\nabla_\xi\varphi,\psi) + h(\varphi,\nabla_{\bar\xi}\psi); \tag{12}$$
$$\{\varphi(s)\colon \varphi\in\Gamma^\infty\} \subset H_s \text{ sűrű, minden } s\in S-re. \tag{13}$$

A ∇_ξ operátorok együttesét egy $H-$n definiált konnexiónak hívjuk és $\nabla-$val jelöljük. Egy sima struktúrával ellátott Hilbert mezőt sima Hilbert mezőnek hívunk. Az analóg, de durvább fogalmat, a folytonos Hilbert mezőket Godement [Go] definiálta. Korábban Neumann János vezette be azt a fogalmat, amit mostanság mérhető Hilbert mezőknek neveznek [Di, Ne2].

A $H\to S$ Hilbert mező R görbületét

$$R(\xi,\eta)\varphi = (\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]})\varphi, \qquad \xi,\eta\in \operatorname{Vect} S,\ \varphi\in\Gamma^\infty,$$

definiálja. $H-t$ laposnak hívjuk, ha $R=0$, azaz, $R(\xi,\eta)\varphi=0$ minden ξ,η,φ esetén.

21. Definíció. *Egy $H\to S$ sima Hilbert mező trivializálásán egy olyan $T\colon H\to V$ leképezést értünk, ahol V egy Hilbert tér, melyre $T|H_s$ unitér minden $s\in S-$re, és $\varphi\in\Gamma^\infty$, $\xi\in \operatorname{Vect} S$ esetén*

$$T\varphi\in C^\infty(S;V) \quad \textit{és} \qquad T(\nabla_\xi\varphi) = \xi T\varphi.$$

Ha a $H\to S$ sima Hilbert mező trivializálható, akkor szükségképpen lapos. A megfordítás, ellentétben a nyalábok esetével, nem feltétlen igaz, ([l. disz. Example 7.1.9 és section 8.3.3]). A megfordíthatósághoz erősebb struktúrára van szükség.

Legyen $H\to S$ egy sima Hilbert mező az S valós-analítikus sokaság felett. Jelölje $\operatorname{Vect}^\omega S\subset \operatorname{Vect} S$ a valós-analítikus vektormezők Lie algebráját.

22. Definíció. *(i) Egy $\varphi\in\Gamma^\infty$ szelés analítikus ha minden kompakt $C\subset S$ és vektormezők tetszőleges olyan Ξ véges halmazára, melyek analítikusak a C egy környezetében, létezik egy $\varepsilon>0$, hogy*

$$\sup \frac{\varepsilon^n}{n!}\, h(\nabla_{\xi_n}\dots\nabla_{\xi_1}\varphi)(s)^{1/2} < \infty,$$

ahol a szuprémumot $n=0,1,\dots,\xi_j\in\Xi$, és $s\in C-$re kell venni. Az analítikus szelések halmaza $\Gamma^\omega\subset\Gamma^\infty$.

(ii) $H\to S$ egy analítikus Hilbert mező, ha $\{\varphi(s)\colon \varphi\in\Gamma^\omega\}\subset H_s$ sűrű minden $s\in S-$re.

23. Tétel. *(disz. Theorem 7.1.7, [LSz14, Theorem 2.3.2]) Legyen $H\to S$ egy analítikus Hilbert mező egy S összefüggő bázis felett.*

(i) Ha $T\colon H\to V$ és $T'\colon H\to V'$ trivializációk, akkor $T'=\tau T$ ahol $\tau\colon V\to V'$ unitér

(ii) Ha S egyszeresen összefüggő és H lapos, akkor H trivializálható.

Ebből azonnal adódik.

24. Következmény. *(disz. Corollary 7.1.8, [LSz14, Corollary 2.3.3]) Legyen $H\to S$ egy lapos, analítikus Hilbert mező. Ekkor létezik egy Hermitikus Hilbert* *nyaláb $K \to S$, ∇^K lapos konnexióval és egy $F\colon H \to K$ leképezés, amely unitér a H_s, K_s fibrumokon úgy, hogy $\varphi \in \Gamma^\infty$ és $\xi \in VectS$ esetén*

$$F\varphi \in C^\infty(S,K) \qquad \text{és} \qquad F(\nabla_\xi\varphi) = \nabla^K_\xi F\varphi.$$

A (K, ∇^K) Hermitikus Hilbert nyaláb konnexiótartó izometria erejéig egyértelmű.

Egy sima Hilbert mező *projektíven lapos*, ha az $R(\xi,\eta)\colon \Gamma^\infty \to \Gamma^\infty$ görbületi operátor egy $r(\xi,\eta)\colon S \to \mathbb{C}$ függvénnyel való szorzásoperátor. Szokás ebben az esetben a *görbület*et *centrális*nak is hívni.

25. Definíció. *Egy $H \to S$ sima Hilbert mező projektív trivializációja egy olyan $T\colon H \to V$ leképezés, ahol V egy Hilbert tér, melyre $T|H_s$ unitér ha $s \in S$, és létezik egy a 1–forma $S-$en, hogy minden $\varphi \in \Gamma^\infty$, $\xi \in Vect\,S$ esetén*

$$T\varphi \in C^\infty(S;V), \qquad T(\nabla_\xi\varphi) = \xi T\varphi + a(\xi)T\varphi.$$

Ha $H-$-nak van projektív trivializációja, akkor H projektíven lapos, az $R(\xi,\eta)$ görbület a $da(\xi,\eta)$ függvénnyel való szorzásoperátor lesz.

Fordítva: ha $H \to S$ projektíven lapos, és r egzakt, akkor a nyalábok esetéhez hasonlóan egy megfelelő vonalnyalábbal való tenzorszorzat $H-$ból egy lapos Hilbert mezőt ad, melyre a fenti trivializációról szóló tételt alkalmazva kapjuk.

26. Tétel. *(disz. Theorem 7.1.11, [LSz14, Theorem 2.4.2]) Legyen $H \to S$ egy analítikus Hilbert mező egy S összefüggő bázis felett.*

(i) Ha $T\colon H \to V$ és $T'\colon H \to V'$ projektív trivializációk, akkor $T' = f\cdot(\tau T)$, valamely $f \in C^\infty(S)$ és $\tau\colon V \to V'$ unitér transzformációval.

(ii) Tegyük fel, hogy az $R(\xi,\eta)$ görbület az $r(\xi,\eta)-$el való szorzás operátora és r egzakt. Ha S egyszeresen összefüggő, akkor $H-$nak van projektív trivializációja.

A fenti két tétel fontos következménye, hogy ha $H \to S$ egy (projektíven) lapos analítikus Hilbert mező, ahol S összefüggő, egyszeresen összefüggő (és $H^2(S,\mathbb{R}) = 0$), akkor a fenti trivializációs tételek miatt H fibrumait kanonikusan (ill a projektíven lapos esetben egy skalártényező erejéig) azonosítani tudjuk.

8. Fejezet. Direkt képek mint Hilbert mezők

Ez a fejezet a Lempert lászlóval közös [LSz14] cikk egyik fejezete.

A következő általános szituációt tekintjük. Legyenek Y, S komplex sokaságok, $\pi : Y \to S$ egy holomorf szubmerzió és ν egy sima forma $Y-$on, amelynek a megszorítása $Y_s = \pi^{-1}s-$re egy térfogati forma minden $s \in S-$re. Legyen $(E, h^E) \to Y$ egy holomorf Hermitikus vektornyaláb. $E_s := E|_{Y_s}$. Legyen H_s az E_s holomorf L^2 szeléseiből álló Hilbert tér, a

$$h(u,v) = \int_{Y_s} h^E(u,v)\nu, \quad u,v \in H_s \tag{14}$$

belső szorzattal ellátva. A H_s Hilbert terek alkotják a $H \to S$ Hilbert mezőt. A fő kérdés, hogy milyen feltételek mellett lehet $H-$t ellátni egy természetes sima struktúrával.

Ezt két feltétel, egy geometriai és egy analítikus feltétel mellett tudjuk garantálni.

Legyen M^m egy sima sokaság, ω egy folytonos $m-$forma $M-$en. $|\omega|$ jelenti az indukált Borel mértéket, azaz ha lokális koordinátákban $\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots$, akkor $|\omega| = |f| dx_1 dx_2 \ldots$. Tegyük fel, hogy M irányítható és $\mathcal{L}_\xi$ jelölje a Lie deriváltat.

27. Definíció. *$M-$en egy ξ vektormező integrálisan teljes, ha igaz a következő. Ha $|\omega|$ és $|\mathcal{L}_\xi \omega|$ véges mértékek, akkor $\int\limits_M \mathcal{L}_\xi \omega = 0$.*

Ha például ξ egy teljes valós vektormező, akkor integrálisan is teljes.

Visszatérve az $Y \to S$ holomorf szubmerzióhoz és $E \to Y$ holomorf vektornyalábhoz, legyen $B_s \colon L^2(E_s) \to H_s$ a Bergman projekció. Ha Φ olyan szelése $E-$nek, hogy $\Phi|Y_s \in L^2(E_s)$, akkor $B\Phi$ jelentse $E-$nek azon szelését, melyre

$$(B\Phi)|Y_s = B_s(\Phi|Y_s)$$

Ha ζ egy vektormező $Y-$on, akkor $\operatorname{div}\zeta = \operatorname{div}_\nu \zeta$ jelöli azt a sima függvényt, amelyre

$$(\mathcal{L}_\zeta \nu)|Y_s = (\operatorname{div}\zeta)\nu|Y_s, \qquad s \in S.$$

Az $Y \to S$, $E \to Y-$ ra vonatkozó geometriai feltétel:

(G) *Létezik $S-$en sima (1,0) vektormezőknek egy Ξ családja, ami pontonként kifeszíti a $T^{1,0}S$ nyalábot és minden $\xi \in \Xi-$nek van egy integrálisan teljes ξ^c felemeltje $Y-$ra.*

Az analítikus feltétel megfogalmazásához rögzítsük $\Xi-$t és a ξ^c felemelteket minden $\xi \in \Xi-$re. Ha $\overline{\eta} \in \Xi$, akkor η^c jelöli $\overline{\eta}^c-$nek a konjugáltját. Az analítikus feltétel:

(A) *Létezik egy $\mathcal{A}_E \subset C^\infty(Y, E)$ altér a következő tulajdonságokkal. Ha $\Phi \in \mathcal{A}_E$, akkor*

(A1) $\int\limits_{Y_s} h^E(\Phi)\nu \in \mathbb{R}$ és folytonosan függ $s \in S-$től; és

(A2) ha $\xi \in \Xi$, $\eta = \overline{\xi}$, akkor $(\operatorname{div}\xi^c)\Phi$, $\nabla^E_{\xi^c}\Phi$, $\nabla^E_{\eta^c}\Phi$, és $B\Phi \in \mathcal{A}_E$. Továbbá

(A3) ha $u \in H_s$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $\Phi \in \mathcal{A}_E$, hogy $\int\limits_{Y_s} h^E(\Phi - u)\nu < \varepsilon$.

28. Tétel. *(disz. Theorem 8.2.3, [LSz14, Theorem 7.2.1]) Ha a geometriai (G) és analítikus (A) feltételek teljesülnek, akkor a $p : H \to S$ Hilbert mezőn van sima struktúra.*

A későbbiekben fontos lesz a következő speciális eset, amikor a (G) és (A) feltételek ellenőrizhetőek.

Legyen $(F, h^F) \to X$ egy Hermitikus holomorf vektornyaláb és ν_0 egy sima térfogati forma $X-$en. Legyen S egy komplex sokaság, $Y = S \times X$, $\Lambda(s, x) = a(s)L(x) + b(s) \in C^\infty(Y)$ és tegyük fel, hogy $a < 0$, $L > 0$. Legyenek $\pi \colon S \times X \to S$, $\operatorname{pr} \colon S \times X \to X$ a projekciók. Tekintsük az $(E, h^E) = \operatorname{pr}^*(F, h^F)$ visszahúzott nyaláb direkt képét a $\nu = e^\Lambda \operatorname{pr}^* \nu_0$ relatív térfogati formára. Kapjuk a $H \to S$

Hilbert mezőt. Adott $t \in \mathbb{R}-$re legyen W^t az F olyan v mérhető szeléseinek Hilbert tere, amelyre

$$h^t(v) = \int\limits_X h^F(v) e^{tL} \nu_0 < \infty, \tag{15}$$

és $V^t \subset W^t$ a holomorf szelések altere.

29. Lemma. *(disz. Lemma 8.4.1, [LSz14, Lemma 9.1.1]) Legyen $\{V_i\}_{i\in I}$ vektortereknek egy halmaza, ahol minden V_i az F bizonyos holomorf szeléseiből áll. Tegyük fel, hogy $t < 0-$ra*

(i) minden $V_i \subset V^t$ és a $(h^t)^{1/2}$ normák különböző $t-$re mind ekvivalensek V_i-n

(ii) ha $t + 2\tau < 0$ és $v \in V_i$, akkor a W^t Bergman projekciója az $e^{\tau L} v$ elemet V_i-be viszi;

(iii) $\sum_{i\in I} V_i$ sűrű V^t-ben.

Akkor a $H \to S$ Hilbert mezőn van sima struktúra. Ha a, b analítikus, akkor a H mező is.

A feltételek teljesülnek, ha L korlátos és csak egyetlen $V_i = V^t$ vektorterünk van, valamely $t < 0-$val. A 32. Tételben a lemmát nemkorlátos $L-$re alkalmazzuk, de ekkor $F-$nek nagy lesz a szimmetriacsoportja és a V_i izotipikus alterekre a feltételek ellenőrizhetőek. A 29. Lemma feltevései mellett (és még feltéve, hogy V_i teljes), legyen $t < 0$ rögzített és $\tau < t/2$. Legyen $Q_i(\tau)\colon V_i \to V_i$ az a Toeplitz operátor, amit a $e^{(\tau-t)L}$ függvénnyel való szorzás és a W^t-beli Bergman projekció kompozíciójával kapunk. (29. Lemma (ii) miatt $Q_i(\tau) : V_i \to V_i$). Legyen $P_i(s) = e^{b(s)} Q_i(a(s))$.

30. Tétel. *(disz. Theorem 8.4.3, [LSz14, Theorem 9.2.1]) Legyen $t < 0$. A 29. Lemma feltételei mellett legyen $S_t = \{s \in S : a(s) < t/2\}$. Ekkor a H Hilbert mező S_t-re vett megszorításának R görbülete nulla ill. centrális pontosan akkor, ha minden $s \in S_t$ és ξ (1,0) típusú, η (0,1) típusú S_t-n definiált sima vektormezőre a*

$$\overline{\partial}(P_i^{-1}\partial P_i)\big(\xi(s), \eta(s)\big)\colon V_i \to V_i, \qquad i \in I,$$

operátorok nullák, ill. $r\mathrm{id}_{V_i}$ alakúak, ahol r nem függ i-től, legfeljebb s-től.

9. Fejezet. Az adaptált komplex struktúrák családjának kvantálása

9.1. Kvantálás

Ez a rész a Lempert Lászlóval közös [LSz14] cikk egyik fejezete.

31. Tétel. *(disz. Theorem 9.1.4, [LSz14, Theorem 10.5.1]) (M^m, g) kompakt Riemann sokaság, $X \subset N$ nyílt halmaz, mely része egy $\mathcal{A}^1$-invariáns $N-$beli nyílt halmaznak, ahol létezik az $(\mathcal{A}^1, I(i))-$hoz adaptált komplex struktúra. $K_X \to X$ a kanonikus nyaláb, Θ ennek egy el nem tűnő holomorf szelése (feltéve, hogy létezik), $h^{K_X}(\Theta)^{1/2}$ pedig ennek normája. Ekkor az adaptált Kähler struktúrák családjára a geometriai kvantálással kapott kvantum Hilbert mező* *úgy is megkapható, mint egy $S \times X$ feletti triviális Hermitikus holomorf vonalnyaláb direkt képe, $e^{\Lambda} pr^* \nu_0$ relatív térfogati formával, ahol $pr\colon S \times X \to X$ a projekció és*

$$\Lambda(s,x) = -L(x)/\operatorname{Im} s - m \log \operatorname{Im} s, \qquad \nu_0 = \omega^m/m! \tag{16}$$

a félforma korrekció nélkül és

$$\Lambda(s,x) = -L(x)/\operatorname{Im} s - (m/2) \log \operatorname{Im} s, \qquad \nu_0 = h^{K_X}(\Theta)^{1/2}\omega^m/m! \tag{17}$$

a félforma korrekcióval.

9.2. Lie Csoportok és homogén terek

Ez a rész a Lempert Lászlóval közös [LSz14] cikk egyik fejezete.

Legyen $M = G/G_0$ egy kompakt, egyszeresen összefüggő, Riemann normális homogén tér, N a fázistere. $S = \{\operatorname{Im}\ s > 0, s \in \mathbb{C}\}$. $\mathfrak{g}$ ill. $\mathfrak{g}_0$ a G ill. G_0 Lie algebrája. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}_0$ ortogonális komplementuma $\mathfrak{g}-$ben. A 6. és 16. tétel miatt minden $s \in S-$re a $J(s)$ adaptált komplex struktúra az egész N fázistéren definiálva van. Kicsit általánosabban legyen csak $X \subset N$ egy $G-$invariáns nyílt környezete $M \subset N-$nek. Legyen $H \to S$ (félforma korrekció nélkül), ill. $H^{\text{korr}} \to S$ a félforma korrekcióval a $J(s)$ komplex struktúrák felhasználásával kapott kvantum Hilbert mező.

32. Tétel. *(disz. Theorem 9.2.1, [LSz14, Theorem 11.1.1])*
A $H \to S$ ill. $H^{korr} \to S$ kvantum Hilbert mezőkön megadható analítikus struktúra.

A 32. Tétel következik a 29. Lemmából és a 31. Tételből. G hat az $\mathcal{O}(X)$ téren a $gv = (g^{-1})^* v$ formulával. A G irreducibilis χ karaktereinek megfelelő V_χ izotipikus alterek játszák a 29. Lemmában a V_i-k szerepét.

A félformával korrigált változathoz ki kell számolni a $h^{K_X}(\Theta)$ normát is. Legyen $P\colon \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C} \otimes \mathfrak{p}$ a $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}_o-$re vett projekció.

33. Lemma. *(disz. Lemma 9.2.2, [LSz14, Lemma 11.1.2] A K_X kanonikus nyalábnak van egy $G^{\mathbb{C}}-$invariáns Θ holomorf szelése, aminek a megszorítása $\bigwedge^m TM-$re az M Riemann térfogati formája. Legyen $\zeta \in \mathfrak{p}$, $\gamma \in G$ és $x(t) = \gamma(\exp t\zeta)o$ egy geodetikus. Tekintsük a $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{p}$ vektortéren a következő operátorokat.*

$$\begin{aligned} A_1(t,\zeta) &= P(e^{-t\operatorname{ad}\zeta} + \frac{1-e^{-t\operatorname{ad}\zeta}}{2\operatorname{ad}\zeta}\ P\operatorname{ad}\zeta)|\mathbb{C}\otimes\mathfrak{p}, \\ A_2(t,\zeta) &= P\ \frac{1-e^{-t\operatorname{ad}\zeta}}{\operatorname{ad}\zeta}|\mathbb{C}\otimes\mathfrak{p}, \end{aligned} \tag{18}$$

ahol $(1-e^{-t\operatorname{ad}\zeta})/\operatorname{ad}\zeta$ a hatványsorával van definiálva. Ekkor

$$h^{K_X}(\Theta)(x) = i^m \det\bigl(A_2^*(i,\zeta)A_1(i,\zeta) - A_1^*(i,\zeta)A_2(i,\zeta)\bigr). \tag{19}$$

A 32. Tételbeli analítikus Hilbert mezők görbületére alkalmazható a 30. Tétel. Az ebben a tételben szereplő P_χ Toeplitz operátorokra bizonyos esetekben explicit formula adható. Legyen $\mathfrak{p}_X$ azon $\zeta \in \mathfrak{p}$ pontok halmaza, amelyekre a $t \mapsto (\exp t\zeta)o$ geodetikus $X-$ben van. Ez egy nyílt részhalmaza $\mathfrak{p}-$nek. Ekkor

34. Lemma. *(disz. Lemma 9.2.3, [LSz14, Lemma 11.2.1] Tegyük fel, hogy $\dim V_\chi > 0$ és $P_\chi(s)$ egy skalár operátor: $P_\chi(s) = p_\chi(s)\, id_{V_\chi}$. Akkor*

$$p_\chi(s) = \int\limits_{\mathfrak{p}_X} \int\limits_{G_o} e^{a(s)|\zeta|^2 + b(s)} \chi(g_o \exp(-2i\zeta))\, d_o g_o\, d\mu(\zeta), \tag{20}$$

ahol $d_o g_o$ a normalizált Haar mérték G_o-on; a félforma korrekció nélküli esetben μ egy megfelelő eltolás invariáns mérték $\mathfrak{p}-n$, ami esetleg függ $\chi-$től, de $s-$től nem, míg a félformával korrigált esetben μ az invariáns mérték megszorozva a

$$|\det\bigl(A_2^*(i,\zeta)A_1(i,\zeta) - A_1^*(i,\zeta)A_2(i,\zeta)\bigr)|^{1/2}. \tag{21}$$

függvénnyel.

Ha a P_χ operátorok skalár operátorok (ami teljesül ha M egy kompakt Riemann szimmetrikus tér, speciálisan ha egy kompakt Lie csoport ellátva egy biinvariáns metrikával), akkor a választ arra a kérdésre, hogy a keletkező kvantum Hilbert mező vajon lapos esetleg projektíven lapos (azaz végső soron, hogy a kvantálás egyértelmű-e) attól függően tudjuk megadni, mennyire jól tudjuk kezelni a (20)-beli integrált.

A csoportok esetén a következő tétel válaszolja meg a kvantálás egyértelműségének kérdését. Az általánosabb esetet, a kompakt szimmetrikus tereket a következő részben tárgyaljuk.

35. Tétel. *(disz. Theorem 9.2.4, [LSz14, Theorem 11.3.1]) Legyen M egy kompakt Lie csoport, ellátva egy biinvariáns metrikával és $X = N$. Ekkor a $H^{korr} \to S$ kvantum Hilbert mező lapos.*

Ha M egy kompakt Lie csoport, a 32. Tétel miatt a $H^{\mathrm{korr}} \to S$ kvantum Hilbert mezőn van analítikus struktúra. Továbbá a $P_\chi(s)$ operátorok valóban skalároperátorok, a (21) függvény és a p_χ függvényeket megadó (20) integrálok expliciten kiszámolhatóak. A kapott eredményből, a 30. Tétel alapján következik, hogy a kvantum Hilbert mező lapos.

A 23., 32. és 35. tételek következményeként kapjuk, hogy egy kompakt Lie csoportra a kvantálás egyértelmű. Ha nem vennénk figyelembe a félforma korrekciót, az állítás nem lenne igaz. $M = SU(2)$ esetén a $H \to S$ mező projektíven sem lapos ([LSz14, section 11.3]).

9.3. Kompakt szimmetrikus terek kvantálása.

Ez a rész az [Sz17] cikk eredményeit tartalmazza.

Legyen (M^m, g) egy kompakt, egyszeresen összefüggő, irreducibilis, Riemann szimmetrikus tér. $H^{korr} \to S$ az adaptált Kähler struktúrák felhasználásával kapott, a félforma korrekciót is figyelembe vevő, kvantum Hilbert mező.

36. Tétel. *(disz. Theorem 9.3.2, [Sz17, Theorem 0.1]) Tegyük fel, hogy a $H^{korr} \to S$ Hilbert mező projektíven lapos. Ekkor M izometrikus egy biinvariáns metrikával ellátott kompakt Lie csoporttal.*

A 32. Tétel és a 36. Tétel következményeként kapjuk a disszertáció második részének főtételét:

37. Tétel. *(disz. Theorem 9.3.3, [Sz17, Corollary 0.2]) Legyen (M^m, g) egy kompakt, egyszeresen összefüggő, irreducibilis, Riemann szimmetrikus tér. A $H^{korr} \to S$ kvantum Hilbert mező projektíven lapos akkor és csak akkor, ha M izometrikus egy biinvariáns metrikával ellátott kompakt Lie csoporttal. Ez utóbbi esetben a Hilbert mező lapos. A kvantálás tehát pontosan a kompakt csoportsokaságokon egyértelmű.*

Nem ismert, hogy a nem projektíven lapos esetben van-e Hilbert nyaláb struktúra a $H^{korr} \to S$ Hilbert mezőn.

A 36. Tétel bizonyításának fő lépései a következők. A csoport esetéhez hasonlóan, a $H^{korr} \to S$ mezőn az analítikus struktúra léte következik a 32. Tételből. A (21) függvények még ebben az esetben is expliciten kiszámolhatóak, a $P_\chi(s)$ operátorok is skalároperátorok, de a $p_\chi(s)$ függvényeket megadó (20) integrálokat már nem lehet expliciten kiszámolni.

Ezért a következő módszerrel élünk. A $p_\chi(s)$ függvényt kifejező integrál valójában csak a $\tau =$Im s mennyiségtől függ. Mivel s a felső félsík egy pontja, ezért $0 < \tau$. Megvizsgáljuk a $p_\chi(s)-$t adó integrál aszimptotikus viselkedését, amint $\tau \to 0$, ill. ha $\tau \to \infty$.

A nullához tartó aszimptotika kiszámolásához a Watson lemma egy többváltozós variánsára van szükség.

A $\tau \to \infty$ aszimptotika meghatározásában azt használjuk ki, hogy a (20) integrál alakjából láthatóan itt (ha $M = U/K$) az integrandus függvény egyik része egy $K-$gömbfüggvény. Mivel M kompakt, ezek a $K-$gömbfüggvények a megszorított gyökökhöz tartozó többváltozós Jacobi-polinomoknak felelnek meg. A kulcs észrevétel pedig az, hogy bár számolni nem könnyű ezekkel a polinomokkal, az aszimptotikához való adalékukat megérteni mégsem reménytelen. Ezek a Jacobi polinomok valójában exponenciális polinomok, ahol minden tag megfelel az adott $K-$reprezentáció egy súlyának. A fő adalékot adó tag éppen a fősúlyhoz tartozik. Még az ehhez a taghoz tartozó együtthatót is ismerjük, ez az ún. Harish-Chandra $\mathbf{c}-$függvény, melyre a Gindikin-Karpelevič formula ad explicit, meglehetősen bonyolult képletet a gamma függvény és a megszorított gyökök multiplicitásainak segítségével.

Ha a $H^{korr} \to S$ mező projektíven lapos, a 30. Tételből nyerünk egy összefüggést χ, χ' különböző karakterekhez tartozó $p_\chi(s)$ és $p_{\chi'}(s)$ függvények között. Ebbe az összefüggésbe betápláljuk a $\tau \to 0$, ill. ha $\tau \to \infty$ aszimptotikát és összehasonlítjuk az eredményt. Ebből az derük ki, hogy az $M-$hez tartozó megszorított gyökrendszer csak nagyon speciális lehet. Pontosan olyan, mint egy kompakt Lie csoportnak. Ebből már következik, hogy a tér izometrikus kell legyen egy kompakt Lie csoporttal.

Hivatkozások

[ABI] V. Aslam, D. M. Burns, D. Irvine: *Left-invariant Grauert tubes on SU(2)*, arXiv:1705.03359

[ADW] S. Axelrod, S. Della Pietra, E. Witten: *Geometric quantization of Chern–Simons gauge theory*, J. Diff. Geo., **33**, 1991, 787–902

[Ag1] R.M. Aguilar: *Symplectic reduction and the homogeneous complex Monge-Ampére equation*, Ann. Glob. Anal. Geom. **19**, 2001, 327-353

[Ag2] R.M. Aguilar: *The adapted complexification of an ellipsoid* Internat. J. Math., **18**, 2007, 43-68

[Ag3] R.M. Aguilar: *The adapted complexification of the two-sphere with a Liouville metric* Quart. J. Math. **60**, 2009, 133-168

[Bed] E. Bedford: *Survey of Pluri-Potentian theory*, in: Several Complex variables, Proc. of Mittag-Leffler Inst. 1987-1988, PUP, 1993, 48-97

[BT] E. Bedford, B.A. Taylor: *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation* Invent. Math., **37**, 1-44, 1976

[Ber] M. Berger: *Sur le groupes d'holonomie des variétés riemannienes*, Bull. Soc. Math. France, **83**, 1955, 279-330

[BCH] S. Berhanu, P.D. Cordaro,J. Hounie: *An introduction to Involutive Structures*, CUP, 2008

[Be1] B. Berndtsson: *Curvature of vector bundles and subharmonicity of Bergman kernels*, manuscript (2005), arxiv: math.CV/0505470

[Be2] B. Berndtsson: *Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **56**, 2006, 1633–1662

[Be3] B. Berndtsson: *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. of Math. (2), **169**, 2009, 531–560

[Be4] B. Berndtsson: *The openness conjecture for plurisubharmonic functions* manuscript (2013), arxiv:1303.5781

[Bi] R. Bielawski: *Complexification and hypercomplexification of manifolds with a linear connection*, Internat. J. Math., **14**, 2003, 813–824

[BG] O. Biquard, P. Gauduchon: *Hyperkähler metrics on cotangent bundles of hermitian symmetric spaces* Geometry and Physics (Aarhus 1995), 287-298, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., 184, Dekker, New York, 1997

[Bl1] R.J. Blattner: *Quantization and representation theory*, Proc. Symp. Pure Math., **26**, 147–165, AMS, Providence, 1973

[Bl2] R.J. Blattner: *The meta–linear geometry of non–real polarizations*, Lecture Notes in Math., **570**, 1975, 11–45, Springer, Berlin, 1977

[Br] H. Bremermann: *On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Shilov boundaries*, Trans. Am. Math. Soc. **91**, 1956, 246-276

[BH] D. Burns, R. Hind: *Symplectic geometry and the uniqueness of Grauert tubes* Duke Math. J., **118**, 2003, 465-491

[BL] D. Burns, K.K. Leung: *The complex Monge-Ampére equation, Zoll metrics and algebraization* arXiv:1510.03371

[Bu1] D. Burns: *On the uniqueness and characterization of Grauert tubes*, Complex Analysis and Geometry, eds:V. Ancona, E. Ballico and A. Silva, Marcel Dekker, 1995

[Bu2] D. Burns: *Some examples of the twistor construction*, „Contributions to several complex variables, in honour of Wilhelm Stoll" eds. A. Howard and P.-M. Wong, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1986

[Bu3] D. Burns: *Curvatures of Monge-Ampère foliations and parabolic manifolds*, Annals of Math., **115**, 1982, 348-373

[BHH] D. Burns, S. Halverscheid, R. Hind: *The geometry of Grauert tubes and complexification of symmetric spaces*, Duke Math. J., **118**, 2003, 465-491

[C] E. Calabi: *Métriques kählleriennes et fibres holomorphes*, Ann. Ecol. Norm. Sup., **12**, 1979, 269-294

[Char] L. Charles: *Semi-classical properties of geometric quantization with metaplectic correction*, Comm.Math. Phys., **270**, 2007, 445–480

[Da] J. Dadok: *On the C^∞ Chevalley's theorem* Adv. in Math., **44**, 1982, 121-131

[Di] J. Dixmier: *Les C^*–algèbres et leurs représentations*, 2ème éd., Gauthier–Villars, Paris, 1969

[DSz] A. Dancer, R. Szőke: *Symmetric spaces, adapted complex structures and hyperkähler structures*, Quart. J. Math. Oxford **48**, 1997, 27-38

[DK] T. Duchamp, M. Kalka: *Singular Monge-Ampère foliations*, Math. Ann., **325**, 2003, 187-209

[EH] T. Eguchi, A.J. Hanson: *Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity*, Phys. Lett., **237**, 1978, 249-251

[FHW] G. Fels, A. Huckleberry, J. Wolf: *Cycle spaces of flag domains. A complex geometric viewpoint*, Birkhäuser, MA, 2006

[FMMN1] C. Florentino, P. Matias, J. Mourão, J.P. Nunes: *Geometric quantization, complex structures and the coherent state transform*, J. Funct. Anal., **221**, 2005, 303–322

[FMMN2] C. Florentino, P. Matias, J. Mourão, J.P. Nunes: *On the BKS pairing for Kähler quantizations of the cotangent bundle of a Lie group*, J. Funct. Anal., **234**, 2006, 180–198

[FU] T. Foth, A. Uribe: *The manifold of compatible almost complex structures and geometric quantization*, Comm. Math. Phys., **274**, 2007, 357–379

[FT] K. Furutani, R. Tanaka: *A Kähler structure on the punctured cotangent bundle of complex and quaternion projective spaces and its application to geometric quantization I*, J. Math. Kyoto Univ., **34**, 1994, 719-737

[FY] K. Furutani, S. Yoshizawa: *A Kähler structure on the punctured cotangent bundle of complex and quaternion projective spaces and its application to geometric quantization II*, Jap. J. Math., **21**, 1995, 355-392

[GI] L. Geatti, A. Iannuzzi: *The adapted hyper-Kähler structure on the crown domain*, arXiv:1711.01605

[Go] R. Godement: *Sur la théorie des représentations unitaires*, Ann. of Math., (2), **53**, 1951, 68–124

[Gr] H. Grauert: *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No 5, 1960

[GS1] V. Guillemin, M.B. Stenzel: *Grauert tubes and the homogeneous Monge–Ampère equation I* J. Diff. Geom, **34**, 1991, 561–570

[GS2] V. Guillemin, M.B. Stenzel: *Grauert tubes and the homogeneous Monge–Ampère equation II*, J. Diff. Geom, **35**, 1992, 627-641

[Hal1] B.C. Hall: *The Segal–Bargmann „coherent state" transform for compact Lie groups*, J. Funct. Anal., **122**, 1994, 103–151

[Hal2] B.C. Hall: *Geometric quantization and the generalized Segal–Bargmann transform for Lie groups of compact type*, Comm. Math. Phys., **226**, 2002, 233–268

[HK] B.C. Hall, W.D. Kirwin: *Adapted complex structures and the geodesic flow*, Math. Ann., **350**, 2011, 455-474

[HK2] B.C. Hall, W.D. Kirwin: *Complex structures adapted to magnetic flows* J. Geometry Phys., **90**, 2015, 111-131

[HJ] N. Hanges, H. Jacobowitz: *Involutive structures on compact manifolds*, Amer. J. Math., **117**, 1995, 491-522

[HW] R. Harvey, R. Wells: *Zero sets of nonnegative strictly plurisubharmonic functions*, Math. Ann.,**201**, 1973, 165-170

[He] S. Helgason: *Groups and geometric analysis, integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*, Amer. Math. Soc., Providence, 2002

[Hi] N. Hitchin: *Flat connections and geometric quantization*, Comm. Math. Phys., **131**, 1990, 347–380

[IM] K. Ii, T. Morikawa: *Kähler structures on tangent bundles of Riemannian manifolds of constant positive curvature*, 1999 Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci., **14**, 1999, 141-154

[J] H. Jacobowitz: *Global Mizohata structures*, J. Geom. Anal., **3**, 1993, 153-193

[K1] S.-J. Kan: *On the characterization of Grauert tubes covered by the ball*, Math. Ann., **309**, 1997, 71-80

[K2] S.-J. Kan: *On the rigidity of non-positively curved Grauert tubes*, Math. Z., **229**, 1998, 349-363

[KM1] S.-J. Kan, D. Ma: *On the rigidity of Grauert tubes over Riemannian manifolds of constant curvature*, Math. Z., **239**, 2002, 353-363

[KM2] S.-J. Kan, D. Ma: *On rigidity of Grauert tubes over locally symmetric spaces*, J.Reine Angew. Math., **524**, 2000, 205-225

[KW] W.D. Kirwin, S. Wu: *Geometric quantization, parallel transport, and the Fourier transform*, Comm. Math. Phys., **266**, 2006, 577–594

[KSz] A. Korányi, R. Szőke: *On Weyl group equivariant maps*, Proc. Am. Math. Soc., **134**, 3449-3456, 2006

[Ko] B. Kostant: *Symplectic spinors*, Symposia Mathematica XIV, 139–152, Academic Press, London, 1974

[Le] A. Le: *CR circle bundles and Mizohata structures*, Amer. J. Math., **120**, 251-287, 1998

[L1] L. Lempert: *Complex structures on the tangent bundle of Riemannian manifolds*, Complex Analysis and Geometry, Plenum Press, New York, N.Y., 1993, 235–251

[L2] L. Lempert: *Elliptic and hyperbolic tubes* in: Several Complex Variables. Proc. of the Mittag-Leffler Inst. 1987-88, PUP, 1993, 440-456

[LSz91] L. Lempert, R. Szőke: *Global solutions of the homogeneous complex Monge–Ampère equation and complex structures on the tangent bundle of Riemannian manifolds*, Math. Ann., **290**, 1991, 689–712

[LSz12] L. Lempert, R. Szőke: *A new look at adapted complex structures*, Bull. Lond. Math. Soc., **44**, 2012, 367–374

[LSz14] L. Lempert, R. Szőke: *Direct images, fields of Hilbert spaces, and geometric quantization*, Comm. Math. Phys., **327**, 2014, 49-99

[LSz15] L. Lempert, R. Szőke: *Curvature of fields of quantum Hilbert spaces*, Q.J. Math., **66**, 2015, 645–657

[Mez] A. Meziani: *Mizohata structures on S^2: Automorphisms and standardness*, Contemp. Math., **205**, 235-246, 1997

[Mi1] P. Michor: *Basic differential forms for actions of Lie groups*, Proc. AMS., **124**, 1996, 1633-1642

[Mi2] P. Michor: *Basic differential forms for actions of Lie groups.II*, Proc. AMS., **125**, 1997, 2175-2177

[Mo] N. Mok: *Rigidity of holomorphic self-mappings and the automorphism groups of hyperbolic Stein spaces*, Math. Ann., **266**, 1984, 433-447

[Ne1] J. von Neumann: *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann., **104**, 1931, 570–578

[Ne2] J. von Neumann: *On rings of operators. Reduction theory*, Ann. of Math. (2), **50**, 1949, 401–485

[PW] G. Patrizio, P.M. Wong: *Stein manifolds with compact symmetric center*, Math. Ann., **289**, 1991, 355-382

[Ra1] J.-H. Rawnsley: *Coherent states and Kähler manifolds*, Quart. J. Math. Oxford, **28**, 1977, 403-415

[Ra2] J.-H. Rawnsley: *A nonunitary pairing of polarizations for the Kepler problem*, Trans. Amer. Math. Soc., **250**, 1979, 167–180

[Sol] L. Solomon: *Invariants of finite reflection groups*, Nagoya Math. J., **22**, 1963, 57-64

[So1] J.-M. Souriau: *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970

[So2] J.-M. Souriau: *Sur la variété de Kepler*, Symposia Math., **14**, Academic Press, London, 1974, 343-360

[Sto] W. Stoll: *The characterization of strictly parabolic manifolds*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Piza, **7**, 1980, 87-154

[St1] M.H. Stone: *Linear transformations in Hilbert space III*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **16**, 1930, 172–175

[Sz91] R. Szőke: *Complex structures on tangent bundles of Riemannian manifolds*, Math. Ann., **291**, 1991, 409–428

[Sz95] R. Szőke: *Automorphisms of certain Stein manifolds*, Math. Z., **219**, 1995, 357–385

[Sz98] R. Szőke: *Adapted complex structures and Riemannian homogeneous spaces*, Ann. Polon. Math., **LXX**, 1998, 215–220

[Sz99] R. Szőke: *Adapted complex structures and geometric quantization*, Nagoya Math. J., **154**, 171-183, 1999

[Sz01] R. Szőke: *Involutive structures on the tangent bundle of symmetric spaces*, Math. Ann., **319**, 2001, 319-348

[Sz04] R. Szőke: *Canonical complex structures associated to connections and complexifications of Lie groups*, Math. Ann.**328**, 2004, 553–591

[Sz17] R. Szőke: *Quantization of compact Riemannian symmetric spaces*, J. Geom. Phys., **119**, 2017, 286-303

[Sz] R. Szőke: *Smooth structures on the field of prequantum Hilbert spaces*, preprint

[Tr] F. Treves: *Hypo-analytic structures. Local theory*, PUP, Princeton N.J., 1992

[Viñ] A. Viña: *Identification of Kähler quantizations and the Berry phase*, J. Geom. Phys., **36**, 223–250, 2000

[Wo] P.M. Wong: *Geometry of the homogeneous Monge-Ampére equation* Invent. Math. 67, 1982, 261-274

[W] N.M.J. Woodhouse: *Geometric quantization*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1992