

Opponensi vélemény

Szőke Róbert

Adapted complex structures

című MTA-doktori értekezéséről

Az értekezés témája Riemann-sokaságok érintőnyalábján indukált Riemann metrikák, komplex és majdnem komplex struktúrák, valamint a kapcsolódó geometriai objektumok és konstrukciók vizsgálata, továbbá ezek alkalmazása a geometriai kvantálás elméletében, különös tekintettel a kvantálás egyértelműségének problémájára.

Az angol nyelven megírt értekezésében a szerző tíz cikkének (melyek közül az egyik a disszertáció benyújtásakor még csak kézirat formájában volt elérhető, de azóta nyomtatásban is megjelent) eredményeit foglalja össze 150 oldalon, amit még a tartalomjegyzék, és egy 145 tételből álló irodalomjegyzék egészít ki. A disszertáció alapját jelentő cikkek rangos nemzetközi folyóiratokban jelentek meg, melyek közül 5 egyszerzős, 5 pedig társzerzővel közös dolgozat.

A disszertáció két részből áll. Az *“Adapted complex structures classically”* című első rész öt fejezetében főként differenciálgeometriai és komplex függvénytani eredményeket tárgyal, míg a *“The family of adapted complex structures”* című második rész négy fejezetében komplex struktúrák családjait tanulmányozza, illetve alkalmazza geometriai kvantálási modellek vizsgálatában, mely vizsgálatokat elsősorban a geometriai kvantálás egyértelműségi problémája motiválja.

Az *első fejezet* tartalmazza a legfontosabb alapfogalmakat és eredményeket, melyek szükségesek a dolgozat megértéséhez. Itt találjuk többek között a Riemann sokaságok tangens terére illetve az adaptált komplex struktúrákra vonatkozó legfontosabb fogalmakat, konstrukciókat. A fejezet elején a szerző röviden ismerteti a PhD értekezésének a téma szempontjából fontosabb részeit és áttekinti a szakirodalom ide vonatkozó releváns eredményeit.

Az *“Automorphisms of certain Stein manifolds”* című *második fejezete* a valószínű-analitikus kompakt Riemann sokaságok izometriái és az érintőnyalábbeli Stein sokaságok indukált adaptált komplex struktúra biholomorfizmusai közötti kapcsolatot vizsgálja.

A *“Compact, normal Riemannian homogeneous spaces”* című *harmadik fejezete* egy kompakt Lie csoporton értelmezett biinvariáns metrika által a csoport faktorterén indukált invariáns Riemann metrikát vizsgálja. Fő eredményeként megmutatja, hogy az indukált metrika egész típusú, azaz az adaptált komplex struktúra és a hozzá tartozó Kähler geometria a teljes érintőnyalábra kiterjeszthető.

A *“Geodesic flow invariant involutive structures”* című *negyedik fejezet* olyan involutív struktúrákat vizsgál, amelyek egy kompakt szimmetrikus tér érintőnyalábjának egy nyílt részén vannak értelmezve és invariánsak a normalizált geodetikus folyamra. Ezek a struktúrák az adaptált komplex struktúrának egy alkalmas 1-paraméteres diffeomorfizmus család alkalmazásával kapott limeszeként állnak elő. 1-rangú esetben a limesz egy komplex struktúra, magasabb rangú esetben egy bonyolultabb sztratifikált geometriai struktúrát ad, ahol egy-egy réteg valószínű-analitikus és involutív.

A “*Weyl group equivariant maps and hyperkähler metrics*” című ötödik fejezet első részében a féligegyszerű szimmetrikus Lie algebrákra vonatkozó Chevalley kiterjesztési tételéhez analóg eredményeket igazol polinomiális, C^∞ és C^ω ekvivariáns leképezésekre. A fejezet második részében azt vizsgálja, hogy egy komplex sokaság érintőterén a kotangens nyaláb komplex struktúrája által indukált komplex struktúrához létezik-e olyan, a metrikához adaptált komplex struktúra, melyek antikommutálnak. A probléma megoldásához az érintőtér olyan diffeomorfizmusát keresi, mely az adaptált komplex struktúrát egy antikommutáló invariáns komplex struktúrába viszi át. Kompakt, klasszikus típusú, irreducibilis, Hermitikus szimmetrikus téren megadja ilyen diffeomorfizmus létezésének szükséges és elegendő feltételét és explicit konstrukcióját, továbbá igazolja ilyen terek érintősokaságán invariáns hiperkähler metrika létezését.

A disszertáció “*The family of adapted complex structures*” című második részében a szerző a geometriai kvantálás egyértelműségének problémáját vizsgálja. A geometriai kvantálás egy M Riemann sokasághoz egy $L \rightarrow X$ hermitikus vonalnyalábot és annak (bizonyos) szelősei alkotta H Hilbert teret rendeli. A Kähler kvantálás esetén L egy holomorf Hermitikus vonalnyaláb lesz, H pedig az L holomorf L^2 szelőseinek tere. A konstrukció gyakran bizonyos választással jár, vagyis valójában vonalnyaláboknak egy L_s családját és a nekik megfelelő H_s Hilbert terek családját eredményezi. Az egyértelműség vizsgálata során a kérdés az, hogy van-e a különböző paraméterekhez tartozó Hilbert terek között egy kanonikus unitér leképezés. Abban az esetben, amikor a paraméterek halmaza is egy komplex sokaság, tekinthetjük a paraméterekhez tartozó Hilbert tereket, mint egy Hilbert nyaláb fibrumait. Ha ezen a nyalábon adott egy Hermitikus konnexió, akkor az erre vonatkozó párhuzamos eltolás a fibrumok, azaz a Hilbert terek unitér azonosítását adja. Az “*Adapted complex structures and geometric quantization*” című hatodik fejezetben a szerző többek között ismerteti ezt a szemléletmódot, valamint bevezeti a sima és analitikus Hilbert mező fogalmát, mint a Hermitikus konnexióval ellátott Hilbert nyaláb általánosításait. A fejezet elején az adaptált komplex struktúrához asszociált komplex struktúra-mező konstrukcióját és alaptulajdonságait találjuk.

A “*Fields of Hilbert spaces*” című hetedik fejezet a Hilbert mezőn adott sima struktúra és asszociált geometriai objektumait (pl.: görbület, horizontális metszések, trivializáció) és tulajdonságait (pl.: lapos illetve projektív lapos tulajdonság) tárgyalja.

A “*Direct images as fields of Hilbert spaces*” fejezet holomorf vektornyalábok direkt képének leírásával kapcsolatban vizsgálja, hogy milyen feltételek mellett lehet ellátni egy Hilbert mezőt egy természetes sima struktúrával. Erre egy geometriai, illetve egy analitikus feltételt fogalmaz meg e fejezetben.

A “*Quantizing the family of adapted Kähler structures*” című utolsó fejezetben találjuk a geometriai kvantálási modellre vonatkozó fő eredményeket. Bizonyos geometriai feltételek mellett leírja a geometriai kvantálással kapott kvantum Hilbert mezőt félforma korrekcióval, illetve korrekció nélkül mint Hermitikus holomorf vonalnyaláb direkt képét. A direkt kép, mint Hilbert mező lapossága (azaz görbületmentessége) az adott Riemann sokaság esetén a kvantálás egyértelműségével ekvivalens. A fejezet eredménye alapján egy kompakt, egyszeresen összefüggő, normális Riemann homogén tér esetén a félforma korrekcióval illetve a félforma korrekció nélkül a komplex struktúrák felhasználásával kapott kvantum Hilbert mezőkön megadható egy analitikus struktúra. A kompakt Lie csoportok esetén a félforma korrekcióval kapott kvantum Hilbert mező lapos, és így a kvantálás egyértelmű. Igaz

továbbá, hogy amennyiben egy Riemann-féle szimmetrikus tér esetén a félforma korrekciót figyelembe vevő Hilbert mező projektíven lapos, akkor a szimmetrikus tér izometrikus egy biinvariáns metrikával ellátott kompakt Lie csoporttal.

A tartalom ismertetése után áttérek a disszertáció, a tézisek és az azokban megfogalmazott eredmények értékelésére.

Az angol nyelven megírt disszertáció megfogalmazása korrekt, érthető és lényegre törő. A vizsgált problémák igen jól motiváltak és modern nemzetközi tudományos kutatásokhoz kapcsolódnak. Az értekezés nehéz problémákat vizsgál, melyekben eredményt csak az absztrakt fogalmak és a komplex eszközök mély megértésével és ismeretével lehet elérni. A felhasznált eszköztár igen változatos: differenciálgeometriai, Lie-elméleti, többváltozós komplex függvénytan és funkcionálanalízisbeli módszereket egyaránt találunk közöttük. Egységes jelölésrendszert használva tárgyalja a különböző fejezeteket. Néhány apróbb elírás található a disszertációban illetve a tézisekben, de ezek a megértést nem zavarják. A két részből álló disszertáció I. részének elején található 1.1-es alfejezetet (Introduction) talán érdemes lett volna az I. rész elé helyezni, hiszen ez az egész dolgozat, azaz a II. rész bevezetését is tartalmazza. Továbbá érdemes lett volna az eredményeket tézisek formájában is megfogalmazni, hiszen a kompakt megfogalmazás segítene a terjedelmes dolgozat legfontosabb eredményeinek kiemelésében.

A disszertáció igen értékes matematikai eredményeket tartalmaz, melyek nemzetközileg elismert, vezető nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. Megítélésem szerint ezek az eredmények az MTA doktora cím eléréséhez elvárt követelményeket messzemenően kielégítik.

A disszertáció témájához kapcsolódva a következő kérdést fogalmazom meg:
Annak mintájára, ahogy a nemzérus görbületből adódó holonómiát (azaz a párhuzamos eltolás úttól való függését) a projektív lapos esetben ki lehet kerülni egy alkalmas geometriai konstrukcióval (a félforma korrekcióval), talán más típusú holonómiát is kezelni lehetne hasonló módszerrel. Van-e esetleg erre vonatkozó eredmény a szakirodalomban, illetve lát-e erre lehetőséget bizonyos speciális görbületű esetekben?

Összefoglalva: a tárgyalt témakörök sokoldalúsága és az eredmények bizonyításához használt módszerek széles skálája igazolja a szerző ötletgazdagságát, valamint mély matematikai intuíciós és bizonyítási készségét. A szerző értékes, magasan jegyzett matematikai tudományos munkássággal és publikációs tevékenységgel rendelkezik, amit a nemzetközi szakmai tudományos közvélemény is ismer és elismer. Az értekezésben közölt eredmények jelentősen hozzájárulnak a témakör fejlődéséhez, további kutatási irányokat motiválnak. Ezek alapján megállapítható, hogy Szőke Róbert a komplex függvénytan és a differenciálgeometria nemzetközi szintű elismert tudósa.

Meggyőződésem, hogy a doktori munka minden kétséget kizáróan teljesíti a doktori címmel szemben támasztott követelményeket. A nyilvános védés kitűzését javaslom.

Debrecen, 2019. december 30.

Dr. Muzsnay Zoltán
tanszékvezető egyetemi docens
DE TTK Matematikai Intézet
Geometria Tanszék