Válasz Szabó Endre bírálatára

Szeretném megköszönni Szabó Endrének a disszertációm alapos átolvasását, a támogató véleményét, a dícsérő szavait és a továbbgondolásra serkentő kérdéseit.

A bírálatban két kérdés van megfogalmazva.

1. Kérdés. *Az 5.1.1 Tétel W-invariáns $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ leképezéseket terjeszt ki (egyértelműen) K-invariáns $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ leképezésekké. Lehet-e ezt általánosítani más $GL(\mathfrak{a})$-reprezentációkra? Például: W-invariáns $\mathfrak{a} \to S^n(\mathfrak{a})$ illetve $\mathfrak{a} \to \wedge^n\mathfrak{a}$ leképezéseket ki lehet-e (egyértelműen) terjeszteni K-invariáns $\mathfrak{p} \to S^n(\mathfrak{p})$ illetve $\mathfrak{p} \to \wedge^n\mathfrak{p}$ leképezésekké?*

Válasz. A disszertációban arra volt szükségünk, hogy egy $h : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, W-ekvivariáns leképezést ki tudjunk terjeszteni egy $H : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$, K ekvivariáns leképezéssé (5.1.1 Tétel). Ha nem trivializáljuk a $T\mathfrak{a}$ (ill $T\mathfrak{p}$) nyalábot, akkor a h leképezésnek egy $\mathfrak{a}$-n értelmezett W-invariáns X_h vektormező (azaz a $T\mathfrak{a}$ nyaláb egy szelése) felel meg, hasonló módon H-nak pedig egy $\tilde{X}_H$, K-invariáns vektormező $\mathfrak{p}$-n. Vagyis az 5.1.1 tétel úgy is fogalmazható, hogy a $T\mathfrak{a}$ nyaláb minden W-invariáns X polinomiális (vagy C^∞, vagy C^ω) szelése kiterjeszthető egyértelmű módon a $T\mathfrak{p}$ nyalábnak egy ugyanolyan regularitású, K-invariáns $\tilde{X}$ szelésévé. Ebből az átfogalmazásból már valóban természetes módon merül fel a kérdés, hogy van-e valami hasonló kiterjeszthetőség, ha az érintőnyalábot valamelyik másik tenzornyalábra cseréljük. A válasz az, hogy igen, léteznek ilyen kiterjesztési tételek.

KOVARIÁNS TENZOROK: *a) differenciálformák*

Egy $\mathfrak{p}$-n definiált $\tilde{\alpha}$ k-formát horizontálisnak nevezünk, ha $\tilde{\alpha}$ eltűnik a K orbitok érintővektorain, azaz $\iota_{X^\sharp}\tilde{\alpha} = 0$, minden $X \in \mathfrak{k}$ esetén, ahol $X^\sharp$ jelöli a $\mathfrak{p}$-n indukált vektormezőt.

1. Tétel. *Legyen $p > 0$ egész szám, $\alpha : \mathfrak{a} \to \wedge^p T^*\mathfrak{a}$ pedig egy polinomiális, vagy C^∞ vagy C^ω regularitású W-invariáns p-forma. Ekkor az α p-forma kiterjeszthető egy $\tilde{\alpha} : \mathfrak{p} \to \wedge^p T^*\mathfrak{p}$ ugyanilyen regularitású K-invariáns p-formává. A kiterjesztés általában nem egyértelmű, de ha azt is megköveteljük, hogy $\tilde{\alpha}$ horizontális legyen, akkor igen.*

Bizonyítás: Ha kicsit tömören is, de többek között ezt mondja ki az 5.1.11 Tétel. Részletesebben: legyen α egy (polinomiális, C^∞, vagy C^ω) W-invariáns p-forma $\mathfrak{a}$-n. Az 5.1.7 Tétel (5.1.1) formulája alapján ($E = \mathfrak{a}$ választással) α előáll

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} dj_{i_1} \wedge \cdots \wedge dj_{i_p}, \tag{1}$$

alakban, ahol az $\alpha_{i_1,\ldots,i_p}$ együtthatók W-invariáns polinomok, ill. C^∞ vagy C^ω függvények $\mathfrak{a}$-n, $j_1, \ldots, j_n$ pedig az $\mathfrak{a}$-n értelmezett W-invariáns polinomok algebrájának algebrailag független generátorai. Chevalley tétele alapján mindegyik j_s polinom kiterjed egy K-invariáns $\tilde{j}_s : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ polinommá. Az $\alpha_{i_1,\ldots,i_p}$ együtthatók szintén kiterjednek egy $\tilde{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p}$, K-invariáns, α regularitásával megegyező függvénnyé (a polinom esetben Chevalley tétele, a C^∞ esetben [Sch75], vagy [Da82], a C^ω esetben [Lu76] alapján). Az

$$\tilde{\alpha} = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \tilde{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p} d\tilde{j}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{j}_{i_p}, \tag{2}$$

p-forma tehát K-invariáns és könnyen láthatóan az α forma horizontális kiterjesztése.

Másrészt legyen $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ az α forma két K-invariáns, horizontális kiterjesztése és $\beta = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1$. Ekkor β is horizontális és K-invariáns. Legyen $i : \mathfrak{a} \to \mathfrak{p}$ a beágyazás. Mivel $\tilde{\alpha}_j$ ugyanannak az α formának a kiterjesztései, ezért $i^*\beta = 0$. Legyen $a \in \mathfrak{a}$. Mivel $i^*\beta = 0$, ezért minden $X \in T_a\mathfrak{a}$ vektorra $\iota_X\beta_a = 0$. Mivel β_a horizontális, ezért minden $X \in T_a(Ka)$-ra is $\iota_X\beta_a = 0$. Ha még azt is feltesszük, hogy a benne van egy nyílt Weyl kamrában, akkor ismert, hogy $T_a\mathfrak{a} = (T_a(Ka))^\perp$. Ezért ebben az esetben $\beta_a = 0$. A K invariancia miatt $\beta_b = 0$ minden $b \in Ka$-ra. Tehát β a nulla formával egyenlő a nyílt Weyl kamrák uniójának K orbitjain, azaz egy $\mathfrak{p}$ beli nyílt-sűrű halmazon. Vagyis $\beta \equiv 0$. □

Megjegyzések:

1) Könnyen láthatóan egy K invariáns 1-forma pontosan akkor horizontális, ha a neki megfelelő $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ K-ekvivariáns leképezés radiális. Ezért ha feltesszük, hogy $\mathfrak{g}$ egyszerű, de nem Hermitikus típusú, akkor az 5.1.3 Tételből következik, hogy minden K-invariáns 1-forma automatikusan horizontális. Ezért ebben az esetben a tételben akkor is egyértelműség van, ha nem követeljük meg, hogy a kiterjesztés horizontális legyen.

2) A kiterjesztés a horizontalitási feltétel nélkül nem mindig egyértelmű. Legyen például $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$, $W = \{\pm Id_{\mathbb{R}}\}$, $\mathfrak{p} = \mathbb{R}^2$, és $K = S^1$ az origó körüli forgatások csoportja. Ekkor az $\alpha = xdx$ 1-forma W-invariáns. Az $\alpha_1 = xdx + ydy$ és $\alpha_2 = (x - y)dx + (x + y)dy$ két különböző S^1 invariáns kiterjesztése az α formának. Ez pontosan azért lehetséges, mert léteznek nemtriviális S^1 invariáns nem horizontális 1-formák $\mathbb{R}^2$-n.

Általában is, ha $\mathfrak{g}$ egyszerű és Hermitikus típusú, akkor mindig létezik olyan $\beta \not\equiv 0$, K invariáns nem horizontális 1-forma $\mathfrak{p}$-n, amelyre $i^*\beta = 0$. Így ha $\tilde{\alpha}$ egy K invariáns kiterjesztés, akkor $\tilde{\alpha} + \beta$ egy ettől különböző kiterjesztést ad. Ilyen β formát kaphatunk a következő módon: legyen $I : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ a komplex struktúra $\mathfrak{p}$-n (i-vel való szorzás) és $F : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ egy tetszőleges radiális K ekvivariáns leképezés. Ekkor $H = IF$ is K ekvivariáns. Ismert, hogy az Hermitikus esetben az $\mathfrak{a}$ és $I\mathfrak{a}$ alterek ortogonálisak egymásra. Ebből következik, hogy a H-nak megfelelő β, K-invariáns 1-formára $i^*\beta = 0$. Az 5.1.3 tételből az is következik, hogy az Hermitikus esetben egy W invariáns 1-forma tetszőleges K invariáns kiterjesztése egy K invariáns, horizontális 1-forma és egy fenti típusi β forma összege lesz.

3) A tétel C^∞ esete Michor ([Mi97, 2. Theorem]) tételének speciális esete. Vagyis a kiterjeszthetőség még általánosabb szituációban is igaz lesz. Legyen (M, g) egy Riemann sokaság, G egy Lie csoport, amely izometriákkal perfekt módon hat M-en. Azt mondjuk, hogy a G hatás poláris, ha létezik egy $\Sigma \subset M$ zárt részsokaság, ami minden G orbitot ortogonálisan metsz.

Poláris hatásokra is definiálható a W (általánosított) Weyl csoport: $W(\Sigma) := N_G(\Sigma)/Z_G(\Sigma)$, ahol $N_G(\Sigma) = \{g \in G : g\Sigma = \Sigma\}$ és $Z_G(\Sigma) = \{g \in G : gs = s, \forall g \in G\}$. Jól ismert, hogy a mi általunk vizsgált szituáció poláris hatás, az $(M, g) = (\mathfrak{p}, b)$ (ahol b a K invariáns skaláris szorzat), $G = K$ és $\Sigma = \mathfrak{a}$ szereposztással.

Michor tétele ([Mi97, 2. Theorem]) azt mondja, hogy tetszőleges poláris hatás, $p > 0$ esetén is minden $\alpha : \Sigma \to \Lambda^p(T^*\Sigma)$, $W(\Sigma)$-invariáns C^∞ forma egyértelműen kiterjed egy G-invariáns $\tilde{\alpha} : M \to \Lambda^p(T^*M)$ horizontális formává.

KOVARIÁNS TENZOROK: *b) szimmetrikus tenzorok*

2. Tétel. *Legyen $p > 0$ tetszőleges egész szám. Ekkor minden $\psi : \mathfrak{a} \to S^p(T^*\mathfrak{a})$, W-invariáns C^∞ szimmetrikus p-tenzor kiterjeszthető egy $\Psi : \mathfrak{p} \to S^p(T^*\mathfrak{p})$, K-invariáns, C^∞ szimmetrikus p-tenzorrá.*

A tétel Mendes eredményének ([M16, Corollary 1]) speciális esete. Mendes megmutatta, hogy ugyanilyen kiterjesztési tétel igaz tetszőleges poláris hatás esetén.

k KONTRAVARIÁNS és l KOVARIÁNS TENZOROK:

3. Tétel. *Legyen $k, l \geq 0$ egész számok. Ekkor minden $\phi : \mathfrak{a} \to T^{k,l}\mathfrak{a}$, W-invariáns C^∞, (k,l)-típusú tenzormező kiterjeszthető egy $\Phi : \mathfrak{p} \to T^{k,l}\mathfrak{p}$, K-invariáns, C^∞ tenzormezővé.*

Az állítás Mendes tételének ([M16, Theorem 1]) speciális esete. Mendes megmutatta, hogy ugyanez a kiterjesztés igaz minden poláris hatásra.

2. Kérdés. *A disszertáció alaposan tárgyalja a szimmetrikus terek geodetikus áramának geometriai kvantálását. Van remény arra, hogy bizonyos hiper-Kähler, vagy kvaternió-Kähler sokaságok esetében is használható ez a módszer?*

Válasz. Legyen az (M, g) kompakt Riemann sokaság hiper-Kähler vagy kvaternió-Kähler. Jól ismert, hogy ekkor az M sokaság Einstein, tehát DeTurck-Kazdan egy tétele alapján, alkalmas koordinátákban a g metrika valós analítikus. Ez garantálja, hogy TM-ben a nullaszelés egy U csőszerű környezetében létezik g adaptált komplex struktúrája.

Ennek segítségével kapjuk a H^{corr} kvantum-Hilbert mezőt. Ahhoz, hogy a kvantálás egyértelműségét (azaz H^{corr} projektív laposságát) vizsgálni tudjuk, be kellene látni, hogy a H^{corr} mezőn

van analítikus Hilbert mező struktúra. Jelenlegi ismereteink alapján ezt csak akkor tudjuk (Theorem 9.2.1), ha az (M, g) Riemann sokaság egy Riemann normális homogén tér.

Ha valahogy sikerülne belátnunk, hogy a hiper-Kähler vagy kvaternió-Kähler esetben a H^{corr} mezőn van analítikus struktúra, a 9.2.4 példa esete arra figyemeztet, hogy ha U-nak nem az egész TM-et választjuk, akkor a H^{corr} mező nem lesz feltétlenül projektíven lapos.

Viszont ha $U = TM$ választható, akkor az [LSz91, Theorem 4.3] tételünk alapján ($R = \infty$ esete) a g metrika összes metszetgörbületének nemnegatívnak kell lennie. Most válasszuk szét a két esetet. Először a hiperkähler esetet viszgáljuk.

HIPER-KÄHLER SOKASÁGOK ESETE

Egy hiper-Kähler metrika Ricci görbülete mindig zérus, ezért a fentiek alapján azt kapjuk, hogy ha egy (M, g) kompakt hiper-Kähler sokaság adaptált komplex struktúrája létezik az egész TM-en, akkor a g metrika összes metszetgörbülete nulla kell legyen, vagyis (M^n, g) egy lapos, hiper-Kähler sokaság.

Mivel tetszőleges lapos g metrika esetén g adaptált komplex struktúrája az egész TM-en létezik, ezért pontosan a lapos hiper-Kähler sokaságok kvantálását lenne érdekes megvizsgálni.

Ilyen sokaságból nagyon sok van. $\mathbb{R}^{4n}$ a standard euklideszi lapos metrikával és az antikommutáló ortogonális I, J komplex struktúrákkal ellátva a legegyszerűbb hiper-Kähler sokaság. Ha Λ egy tetszőleges rács $\mathbb{R}^{4n}$-ben, akkor ez a struktúra indukál egy lapos, hiper-Kähler sokaság struktúrát a $\mathbb{R}^{4n}/\Lambda$ $4n$-tóruszon. De sok egyéb példa is létezik: ha F tetszőleges véges csoport, akkor létezik olyan (M, g) kompakt, lapos hiper-Kähler sokaság, amelynek a holonómiacsoportja F ([BDM95, Corollary 3.1]).

Egy M kompakt lapos sokaság soha nem egyszeresen összefüggő, ezért T^*M kvantálásánál egy új jelenséget is kezelni kell: az előkvantum vonalnyaláb nem lesz egyértelmű. Ez az egész eljárást alapvetően befolyásolja.

KVATERNIÓKÄHLER SOKASÁGOK ESETE

Ezek az (M, g) sokaságok 3 további halmazba sorolhatóak, annak megfelelően, hogy az s skalárgörbületük milyen előjelű ($s > 0$, $s = 0$ vagy $s < 0$). Ahogy ezt előbb említettük, az $U = TM$ feltevésből a g metrika metszetgörbületeinek nemnegativitása következik. Ez kizárja az $s < 0$ típusú sokaságokat.

Az $s > 0$ esetben az összes ma ismert kompakt kvaternió-Kähler sokaság mint Riemann tér mind szimmetrikus, ezek az ún. Wolf terek, sőt a híres Salamon-LeBrun sejtés szerint nincs is más kompakt kvaternió-Kähler tér az $s > 0$ esetben.

Maradt ismét az a lehetőség, hogy $s = 0$, azaz a kompakt, lapos kvaternió-Kähler sokaságok. Speciálisan minden kompakt, lapos hiper-Kähler sokaság ilyen, de van sok egyéb, olyan példák is léteznek, amiken nincs Kähler vagy hiper-Kähler struktúra ([DM01])

A kompakt lapos kvaternio-Kähler sokaságok kvantálását lenne érdekes megvizsgálni. Itt is a hiper-Kähler esetnél említett nehézségekkel kellene megküzdeni.

[BDM95] M. L. Barberis, I. G: Dotti, R. J. Miatello: *On certain locally homogeneous Clifford manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., **13**, 1995, 289-301

[Da82] J. Dadok: *On the C^∞ Chevalley's theorem* Adv. in Math., **44**, 1982, 121-131

[DM01] I. G. Dotti, R. J. Miatello: *Quaternion Kähler flat manifolds*, Diff. Geom. and Appl. **15**, 2001, 59-77

[LSz91] L. Lempert, R. Szőke: *Global solutions of the homogeneous complex Monge–Ampère equation and complex structures on the tangent bundle of Riemannian manifolds*, Math. Ann., **290**, 1991, 689–712

[Lu76] L. Luna: *Fonctions differentiables invariantes sous l'operation d'un groupe reductif* Ann. Ins. Fourier, Grenoble, **26**, 1976, 33-49

[M16] R. A. E. Mendes: *Extending tensors on polar manifolds*, Math. Ann., **365**, 2016, 1409-1424

[Mi97] P. Michor: *Basic differential forms for actions of Lie groups.II*, Proc. AMS., **125**, 1997, 2175-2177

[Sch75] G.W. Schwarz: *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group* Topology, **14**, 1975, 63-68

Budapest, 2020. január 14.

Szőke Róbert