AKADÉMIAI DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Kóczy László Áron

Versengés és együttműködés koalíciós játékokban

Tézisek

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

Az értekezés előzményei és célja

A játékelmélet közel száz éves történelmének már az elején elkülönült a kooperatív és nonkooperatív megközelítés. A kooperatív játékokban feltételezzük, hogy a játékosok betartják a közöttük született megegyezéseket, míg a nonkooperatív esetben nem. A nonkooperatív játékok vizsgálatakor egyensúlyokat keresünk, s a legtöbb ilyen játék megoldását a Nash-egyensúly (Nash, 1950), vagy annak valamelyik változata adja. A kooperatív játékokban megoldásokat vizsgálunk, de itt nincs a Nash-egyensúlyhoz hasonlóan egyeduralkodó fogalom. Alapvetően két megközelítés terjedt el. A Shapley-érték (Shapley, 1953) és több ehhez hasonló értékfogalom feltételezi a játékosok teljeskörű együttműködését. Ezzel szemben a mag (Shapley, 1955) az egyes játékoscsoportok nonkooperatív szellemiségű versengése nyomán kialakult megoldáshalmaz. Ezek mellett számtalan fogalom ismert. Bár a sokszínűség örvendetes, valójában ennek elsősorban az az oka, hogy egyik fogalom sem tökéletes, egyik sem felel meg a megoldásoktól elvárható tulajdonságoknak (Zhou, 1994), vagy túlságosan bonyolult. A sokszínűségnek egyik oka, hogy a különböző megoldások a játéknak más-más értelmezését adják. Megfordítva: az alkalmazott megoldásfogalom függ a modell, a vizsgálat céljától.

Az értekezés sokszereplős koalíciós kooperatív játékokkal foglalkozik, melyek a játékosok közötti együttműködés formáját vizsgálják: mely játékosok alkotnak koalíciót és hogyan oszlik meg közöttük az együttműködés gyümölcse. Ezeket a játékokat hagyományosan karakterisztikus függvény alakban adjuk meg, azonban ez a játékforma figyelmen kívül hagyja az együttműködéssel járó esetleges külhatásokat, azaz externáliákat. Az externáliás koalíciós játékokat leíró partíciós függvény alak Thrall és Lucas (1963) nem mai fogalom, de hosszú ideig — mai szemmel nézve — meglehetősen naív módszerekkel vizsgáltuk ezeket a játékokat: igyekeztünk mielőbb megszabadulni az externáliáktól, majd a kapott karakterisztikus függvény alakú játékot az ilyen játékokra ismert módszerekkel oldjuk meg. Chander és Tulkens (1997) indította el azt a gondolkodást, aminek eredménye egy jelentősen kibővült irodalom és sok új eredmény (Hafalir, 2007; Huang és Sjöström, 2010; Kóczy, 2018b), melyek az externáliákat közvetlenül és stratégiai modellezéssel kezelik. A sok új eredmény ugyanakkor különböző modelleket is takar és ismét felmerül a kérdés, hogy melyik modelltől mondhatjuk, hogy kellően alátámasztott és jól használható. Az értekezésben a rekurzív mag (Kóczy, 2007) tulajdonságait vizsgáljuk, illetve kitérünk az externáliás koalíciós játékok néhány alkalmazására.

Az *értékek* egyik népszerű felhasználási területe a szavazók hatalmi befolyásának mérése szavazási helyzetekben. Először Shapley és Shubik (1954) alkalmazta a Shapley-értéket egy szavazási helyzetre, mint egyszerű játékra. Egy szavazás is felfogható ugyanis koalíciós játéknak, ahol a szavazók egy csoportjának értéke 0 vagy 1, attól függően, hogy a csoport képes-e döntést hozni. Ilyen szavazási helyzet egy parlament, ahol az egyes frakciók alkotják a szavazókat, s a frakciók egyes csoportjai pedig a nyerő, vagy vesztő koalíciókat. Egy hatalmi mérték a szavazók *a priori* hatalmi befolyását, vagy a befolyásból való részesedését mutatja meg, azaz a hatalmi mértékek nem veszik figyelembe az egyes frakciók ideológiai, vagy éppen stratégiai összeférhetetlenségét. A hagyományos megközelítés abból a szempontból is furcsa, hogy maximálisnak veszi az 50% feletti részesedéssel rendelkező pártok, vagy akár kormányok hatalmi befolyását. Talán meglepő, de a többségi kormányok ellenében is rendszeres, ha nem is gyakori az ellenzéki kezdeményezések sikere, erre még Magyarországon is akad néhány elszórt példa. Itt most nem azokra az esetekre gondolunk, amikor a kormány egy ellenzéki javaslatot karol fel, hanem azokra, amikor a hiányzó, vagy akár renitens képviselők miatt váratlanul többségbe kerül az ellenzék. Az általánosított szavazási játékok figyelembe veszik a hiányzásokat és ezzel sokkal árnyaltabb képet kaphatunk a parlamenti erőviszonyokról. Az értekezésben három ilyen kiterjesztést is vizsgálunk.

Mindkét megközelítés megjelenik az értekezésben: először partíciós függvény alakú játékok magját vizsgáljuk, majd rátérünk a hatalmi indexek vizsgálatára. Minkét részre érvényes, hogy bár az értekezés fő eredményei elméleti természetűek, több alkalmazással is igazoljuk a bemutatott elméleti módszerek alkalmazhatóságát.

1. Az értekezés felépítése

Az értekezés három fő részre tagolódik. Az első egy rövid bevezető. Áttekintjük az értekezés érdemi részében használt fogalmakat. A matematikai jelölésekkel kezdjük, rátérünk a nonkooperatív játékelméletre, majd a kooperatív játékelmélettel zárjuk az összefoglalót. Ennek a rövid fejezetnek a célja, hogy az értekezés különösebb előképzettség nélkül minden olvasó számára elérhető legyen, törekedtünk arra, hogy az értekezésen belül definiáljunk minden használt fogalmat.

A következő négy fejezetből álló, második rész externáliás, *partíciós függvény alakú játékokkal* (Thrall és Lucas, 1963) foglalkozik. Mivel ezek a játékok kevésbé ismertek, a kapcsolódó fogalmakat, tulajdonságokat nagyobb részletességgel mutatjuk be. Ez a fejezet elsősorban Kóczy (2007) és Kóczy (2018b) eredményein, illetve összefoglalásán alapul. Jelentős saját jelölést igényel és ezért külön fejezetbe került a rekurzív magnak a Kóczy (2015) által bevezetett általános implementációja. Két területen alkalmaztuk a partíciós függvényt alkalmazásokban, így külön fejezetben tárgyaljuk a környezetvédelmi és a hálózatos alkalmazásokat. Kóczy (2018b) további, piacelméleti, mérnöki és egyéb alkalmazásokat is tárgyal, de ezekre itt most nem térünk ki.

Az utolsó fejezet hatalmi indexekkel foglalkozik. Külön fejezetben tárgyaljuk a kapcsolódó elméleti eredményeket: A szavazási játékok bevezetése után négy olyan irányt mutatunk be, melyek különböző szavazási helyzetekben jelentősen javítják a modell prediktív képességét. Az első modell közvetlenül a szavazási szabályokból vezeti le a hatalmi indexeket. A megközelítés eleganciáján túl ez a megközelítés lényesen leegyszerűsíti bizonyos sokszereplős szavazási helyzetek hatalmi indexeink kiszámítását. A második modellben az egyes szavazók valójában több képviselőből álló szavazócsoportok, vagy frakciók. A hagyományos irodalom az ilyen helyzeteket súlyozott szavazási játékként modellezi, ahol a csoportok súlyát természetesen adja a csoporthoz tartozó képviselők száma. Gyakorlatilag a képviselők nem mindig vesznek részt a szavazásban, s a hiányzások miatt módosulnak a szavazási súlyok.

A következő két alfejezet a hatalmi indexek egyik alapfeltételezést igyekszik feloldani két különböző megközelítéssel. A hatalmi indexek és általában a hatalmi mértékek *a priori* mértékek, azaz a nyerő koalíciók alakításának matematikai lehetőségét vizsgálják, miközben figyelmen kívül hagyják a szavazók szándékát, vagy politikai irányultságát. Utóbbit a szavazók politikai álláspontjának figyelembevételével modellezzük: a játékosokat egy kétdimenziós politikatérben helyezzük el és efölött, mint *konvex geometria* fölött értelmezzük a szavazási játékot. A második modellben nem ideológiai, hanem stratégiai okokból jönnek létre bizonyos koalíciók, míg más koalíciók létrejöttét megakadályozzák bizonyos tagjaik.

Az értekezést a hatalmi indexek egyik népszerű alkalmazása zárja: az Európai Unió tagországainak hatalmi befolyását vizsgáljuk az *Európai Unió Tanácsában* (korábbi nevén a *Miniszterek Tanácsában*). A Tanács egy igen összetett döntési mechanizmust alkalmaz, melyben egy koalíciónak több ismérv szerint is — minősített — többséget kell alkotnia. Bemutatjuk a Lisszaboni Szerződésben bevezetett döntési mechanizmust, az új mechanizmus hatását hosszú és rövid távon is. Az új mechanizmus érdekessége, hogy a korábbiakkal ellentétben objektív paramétereken alapszik (a tagországok száma és népessége), ami lehetőséget ad a különféle bővítési (vagy éppen kilépési) szcenáriók elemzésére: hogyan változnak a hatalmi viszonyok a tagországok változásakor. A kérdés az Egyesült Királyság kilépése, a *brexit* kapcsán vetődik fel, de egyrészt az euroszkeptikus mozgalmak több tagállamban is megerősödtek, másrészt az uniós szankciók között szerepel a tagok jogainak korlátozása, beleértve a szavazati jogot is, így nem kizárt, hogy a brexitet további kilépések, vagy — legalábbis a Tanácsból való — kizárások követhetik. A szavazási játék megváltozása a hatalmi indexek változását is eredményezheti és a változás bizonyos országoknak előnyös, másoknak hátrányos lehet. Az utolsó eredmények ezeket a hatásokat vizsgálják.

2. Az értekezés főbb eredményei

Az eredmények bemutatása előtt bevezetünk néhány fogalmat és jelölést. A nonkooperatív játékok legfontosabb megoldásfogalma a Nash-egyensúly (Nash, 1950), mely egy olyan stratégiavektor, hogy minden játékos stratégiája legjobb válasz a többi játékos stratégiájára. Így a játékosok akkor is a mash egyensúlyhoz tartozó stratégiát választják, ha erre semmi nem kényszeríti őket. Minden véges játéknak van (kevert) Nash-egyensúlya, de lehet több, akár végtelen sok is. Extenzív alakú játékokkal modellezzük a játékosok egymást követő döntéseit. Egy ilyen játékban egyes Nash egyensúlyok félrevezethetők lehetnek, ezért csak részjáték-tökéletes egyensúlyokat (Selten, 1965) keresünk. Ezekre teljesül, hogy olyan egyensúlyi viselkedést írnak elő, hogy az megfelel egy döntési pontban kezdődő részjátékot önálló játékként kezelve, az erre a játékra meghatározott egyensúly által előírt döntésekkel (feltételezve, hogy a döntési helyzetet csak egyféle döntési sorral lehet elérni)

Egy átruházható hasznosságú karakterisztikus függvény alakú játékot egy (N, v) párral írunk le, ahol N a játékosok halmaza, v pedig egy karakterisztikus függvény, mely minden C koalícióhoz egy valós számot rendel. A játékosok diszjunkt halmazokra való bontását partíciónak nevezzük; az egyes halmazokat pedig beágyazott koalícióknak nevezzük. A partíciókat kalligrafikus $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, stb. jelöli, halmazukat Π, míg a beágyzott koalíciókat egy $(C, \mathcal{P})$ koalíció-partíció párral jelöljük. Egy (N, V) partíciós függvény alakú játék a játékosok már ismert N halmaza mellett egy V partíciós függvényből áll, mely a beágyazott koalíciók $\mathcal{E}$ halmazához rendel egy valós számot. Bármely x kifizetésvektor és S halmaz esetén $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Alapvetően két megközelítést alkalmazhatunk egy kooperatív játék megoldásakor. Az értékek a kifizetések igazságos elosztását vizsgálják. Legismertebb példa a Shapley-érték (Shapley, 1953), mely a játékosoknak az összes permutáció felett vett átlagos határhozzájárulása. A Shapley-érték egy intuitív, erős elméleti háttérrel megalapozott (Pintér, 2009) megoldásfogalom, amit széles körben alkalmaznak különböző elosztási problémákban (Csóka, 2003; Balog et al, 2011; Kovács és Radványi, 2011; Pintér, 2007). Az értekezésben ezt a megközelítést egy speciális elosztási problémára alkalmazzuk: szavazási helyzetekre. A Shapley-Shubik-index (Shapley és Shubik, 1954) a Shapley-érték alkalmazása egyszerű játékokra. Itt a kifizetés maga a hatalom, amit a szavazó döntésbefolyásoló-képessége révén birtokol. A Shapley-Shubik-index és más, úgynevezett p-hatalmi mértékek esetén a hatalom egy pénzjutalomból való részesedést is kifejez.

A másik megközelítés dominancia alapú, itt a legismertebb fogalom a mag (Shapley, 1955). Az x kifizetésvektor eleme az (N, v) játék magjának, ha egyénileg elfogadható, azaz $x_i \geq x(\{i\})$, ha csoportosan elfogadható, azaz $x(S) \geq v(S)$ és hatékony, azaz $x(N) = v(N)$. Koalíció-struktúrás játékokban $(x, \mathcal{P})$ kifizetésvektor-partíció párokat vizsgálunk, s itt az utóbbi feltétel úgy módosul, hogy $x(C) = v(C)$ minden $C \in \mathcal{P}$ koalícióra. Partíciós függvény alakú játékokra nehéz hasonló feltételeket szabni, hiszen egy koalíció éréke függ a befogadó partíciótól, illetve az arról való vélekedéstől is. Az α- (Aumann és Peleg, 1960) illetve ω- (Shenoy, 1979) megközelítés szerint C tagjai rendre a számukra legrosszabb, illetve legkedvezőbb partícióval számolnak; a γ- és az s-megközelítés (*singleton expectations*) szerint (Mäler, 1989; Rajan, 1989; Chander és Tulkens, 1997) a többi koalíció szétesik, az m-várakozások (*merge expectations*) szerint (Maskin, 2003; Hafalir, 2007; Ambec és Ehlers, 2008; McQuillin, 2009) összeolvad, míg a δ-modell (Hart és Kurz, 1983) szerint éppen hogy nem tesz semmit, marad változatlan. Az r- és a rekurzív mag hasonló, endogén koalíciós szerkezetet feltételez (Huang és Sjöström, 2003; Kóczy, 2007). Bár az utóbbiak a probléma sokkal átfogóbb, kevésbé önkényes értékelését adják, azt, hogy melyik megoldásfogalom a legmegfelelőbb, a tulajdonságaik beható vizsgálata alapján mondhatjuk ki. Erre az egyik ismert megközelítés a megoldások axiomatikus karakterizációja: egy megoldás kézenfekvő, ha egyértelműen meghatározza néhány vitán felül álló, alapvető tulajdonság. Bloch és van den Nouweland (2014) eredménye a δ-megközelítésre mutat ilyen eredményt, de sajnos a felhasznált tulajdonságok kevésbé elemiek, ami sokat levon a karakterizáció erejéből. Kóczy (2009, 2015), illetve Huang és Sjöström (2006, 2010) a másik utat választották és egyre általánosabb esetekre igazolták, hogy a rekurzív, illete az r-mag egy természetes alkufolyamat eredménye.

2.1. A rekurzív mag implementációja

Nash (1953) indította el azt a programot, melynek keretében a gyakran nagyon absztrakt kooperatív megoldásfogalmakat az egyes játékosok stratégiáit, döntéseit feltáró nonkooperatív modellekkel támasztjuk alá. A megoldás implementációja révén egyesíthetjük a két világ előnyeit: a nonkooperatív precizitást a kooperatív egyszerűséggel és eleganciával.

Az alkalmazott implementációs modell Rubinstein (1982) váltakozó ajánlattételi modelljének többszereplős általánosításán (Chatterjee, Dutta, Ray, és Sengupta, 1993) alapszik. A modell lényege nagyon egyszerű és intuitív. Egy játékos javaslatot tesz egy koalíció alakítására. A javaslat megnevezi a koalíció tagjat és tartalmazza a a koalíciós kifizetés szétosztásának elvét. A megszólított játékosok sorra döntenek a javaslat elfogadásáról. Ha mind elfogadják, a koalíció megalakul és a játék a maradék játékoshalmazzal folytatódik. Ha valamelyik játékos elutasítja, akkor ez a játékos theet új javaslatot. Mivel kifizetést csak a koalíciót alakító játékosok kapnak, az alkufolyamat véget ér. A játék stacionárius, azaz az időtől nem, csak a játék állásától függő részjáték-tökéletes egyensúlyait keressük. A megszorítás oka, hogy ha megengedünk nem stacionárius stratégiákat is, akkor szinte bármit előálíthatunk.

A rekurzív mag implementációja (Kóczy, 2015) a fenti modell Perry és Reny (1994) nyomán módosított folytonos változatán alapszik. A játékosok bármely időpillanatban theetnek ajánlatot, de egyszerre csak egy élő ajánlattal számolunk, theát aki elfogadhatónak tartja az ajánlatot, annak gyorsan kell reagálnia. Az implementációnak három fő eleme a következő.

Részpartíciók kifizetése ♦ A partíciós függvény alakú játékokban egy koalíció kifizetését csak a teljes partíció ismeretében adhatjuk meg, azonban már egy részpartíció ismerete is ad egy alsó korlátot az élérető kifizetéshez. Ezt, mint garantált kifizetést, kiosztjuk a koalícióknak, s minden újabb kilépéskor kiegészítjük.

Alternatív történelmek ♦ Az egyensúlyi stratégiák ereje onnan ered, hogy a játékosok veszítenek azzal, hogy eltérnek az egyensúlytól. Ez a veszteség a játék folytatásán is múlhat és bizonyos esetekben csak akkor biztosítható, hogy a deviánsok rosszul járjanak, ha a folytatás függ a korábbi lépésektől — például attól, hogy kit is tekintünk deviánsnak. Sajnos a stacionárius stratégiák nem engedik meg azt, hogy a döntéseink a múltbéli dolgokon múljanak, a múlt ismerete nélkül kell döntést hozni. Azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy teljesen mindegy, hogy mit hiszünk a múltról, a deviánsok számára elegendő visszatartó erő, hogy a maradékjátékosok esetleg eltalálják a valódi történelmet.

Részjáték-konzisztens egyensúly ♦ A korábbi eredmények (Kóczy, 2009; Huang és Sjöström, 2010) megmutatták, hogy a tökéletesen kiegyensúlyozott játékokban a részjáték tökéletes egyensúlyok implementálják a magot. A nem tökéletesen kiegyensúlyozott játékokban bizonyos részjátékok magja üres, így az eredmény alapján itt nincsenek részjáték tökéletes egyensúlyok. Ez elég rossz hír, hiszen ekkor az eredeti játékban sincsenek részjáték-tökéletes egyensúlyok. Ha azonban az egyensúlyi viselkedés közvetlen környezete biztosítja az egyensúlyban maradást, a többi játék valójában irreleváns. Az általunk bevezetett részjáték-konzisztens egyensúlyban csak a releváns részjátékokban követeljük meg a tökéletességi feltételt. Így minden részjáték-tökéletes egyensúly részjáték-konzisztens is, de a fordítottja nem igaz.

Ezek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

1. Tétel. *(Kóczy, 2015, 1. tétel) Vegyünk egy tetszőleges (N, V) partíciós alakú játékot! A játék $C(N, V)$ rekurzív magja egybeesik a stacionárius-következetes egyensúlyi kifizetés-konfigurációk $\Omega^*(N, V)$ halmazával.*

A bizonyítás alapja egy indukció a játékosok számára. A triviális eset és az induktív feltevés után belátjuk, hogy minden ilyen egyensúlyi kifizetés-konfiguráció eleme a magnak és fordítva. Előbbinél az elhajlások diszkutálása a feladat, míg a fordított irányban egy optimális büntető stratégia segítségével konstruálunk a célnak megfelelő egyensúlyi stratégiát.

2.2. Környezetvédelmi alkalmazások

A partíciós függvény alakú játékok alkalmazásának természetes területe a környezetvédelem. Itt két területen mutatunk be saját eredményeket.

A közlegelők problémája az egyik általánosan ismert játékelméleti probléma, ahol az egyén önző érdeke ütközik társadalom érdekével. Az eredeti modell szerint a juhászok minél több juhot szeretnének legeltetni, de a legelő egy idő után már nem nyújt elegendő táplálékot az állatoknak, s így a bővülés csak a többi állomány terhére lehetséges. Funaki és Yamato (1999) a problémát egy halászati modellben vizsgálta, ahol a legelő egy tónak, és annak halállományának felel meg, s ezt fogyasztják a halászok. A termelési függvény szerint a halászok összesített (költséges) erőfeszítése csökkenti mindenkinek a fogását, míg az egyéni erőfeszítés az egyén fogását növeli. A modell kooperatív, így lehetőség van halásztársaságokat alakítani, hogy az erőforrások közös, felelős használatával a tagok összes hasznosságát növeljék. A fő kérdés az, hogy létrejön-e, illetve stabil marad-e a társadalmi jólétet maximalizáló nagykoalíció. Funaki és Yamato (1999, 3. tétel), igazolja, hogy a halastavi játék α-magja nemüres. Felmerülhet kérdésként, hogy mennyire speciáls ez az eredmény az α-magra, más, kifinomultabb módszerek esetén is hasonló eredményt kapunk-e. Háromféle termelési függvényt vizsgáltunk, melyek mind teljesítik Funaki és Yamato (1999) feltételeit és eszerint az alábbi tétel mondható ki.

2. Tétel. *(Kóczy, 2018b, 12.3 rész) A halastavi játék magja érzékeny a viselkedési feltételezésekre.*

3. Következmény. *(Kóczy, 2018b, 12.3 rész) A közlegelők tragédiája általában nem elkerülhető.*

Ez azt jelenti , hogy Funaki és Yamato (1999) játékosainak pesszimizmusa nem mindig megalapozott, minden függvényre találtunk olyan paramétert, amikor a nagykoalícióból kiváló koalíció jobban jár a koalíción kívül.

Az ENSZ halállományokról szóló megállapodása (United Nations, 1995) a határokon túlnyúló halállományok közös kezelését írja elő. Felmerül a kérdés, hogy megvalósítható-e az ilyen együttműködés. Ezt vizsgálja Pintassilgo (2003) és Pintassilgo és Lindroos (2008), azonban eltekintenek a koalíciókon belüli alkudozástól és egy önkényes termelési függvény helyett egy komplex bio-ökonómiai modellt használnak, mely a halászat sikerességét a halállomány méretéhez kapcsolja, ami viszont a halászat és a halállomány termékenysége függvényében dinamikusan változik. A halászat intenzitása függ a játékosok alkotta koalícióktól, s az externáliák, illetve a koalíciókban való egyenlő elosztás miatt egy személyenkénti partíciós függvényt kapunk. Pintassilgo (2003) és Pintassilgo és Lindroos (2008) a játék δ-magját vizsgálják azaz feltételezik, hogy egy kilépés nem változtatja meg a maradékjátékosok

Beágyazott koalíció	Kifizetés
$(3,\{3\})$	4,69
$(2,\{2{,}1\})$	3,13
$(1,\{2{,}1\})$	6,25
$(1,\{1{,}1{,}1\})$	3,52

1. táblázat. Példa az egyénenkénti partíciós függvény kifizetéseire az túlnyúló halállományok problémájában

kapcsolati viszonyait. Tekintve, hogy a játékot pozitív externáliák jellemzik, a nagykoalíció stabilitása szempontjából ez a megközelítés ekvivalens az ω-maggal. Mivel ez a megközelítés kedvező az elhajlások szempontjából, kedvezőtlen a mag stabilitása szempontjából: ritkán lesz nemüres. Pintassilgo (2003) és Pintassilgo és Lindroos (2008) eredményei ennek megfelelően negatívak. Megmutatják, hogy a nagykoalíció csak két játékos esetén eleme a magnak, egyébként pedig szinglikből áll minden stabil partíció.

Kóczy (2018b) megállapította, hogy az eredmény érzékeny a viselkedési feltételezésekre. A Pintassilgo és Lindroos (2008) által bemutatott példában (1) ráadásul a δ-viselkedés teljesen irracionális, ellenkezik a maradékjátékosok érdekeivel: egy szingli kilépése esetén a maradék két játékos is szingliket alkot, s így az eredeti kilépő rosszul jár a kilépéssel, s a (rekurzív) mag stabil. Bár az eredmény nem terjed ki sem tetszőleges számú játékosra sem minden játékra, optimizmusra ad okot, hogy a korábbinál sokkal kiterjedtebb együttműködés is lehetségesnek tűnik. Ráadásul mindez független a rekurzív magon belüli viselkedési feltételezésektől: az optimista és pesszimista rekurzív magok egybeesnek.

2.3. Hálózati alkalmazások

A hálózatok az externáliák terjedésének természetes csatornái, hiszen az egyazon hálózatot használó játékosok között zsúfoltság léphet fel, a mi késedelmet, vagy akár a forgalom korlátozását is jelentheti. Itt a villamosenergia-hálózatok példáját tekintjük.

A Csercsik és Kóczy (2012, 2017) által bemutatott fizikai-gazdasági modell nagyfeszültségű villamosenergia-hálózatokat vizsgál. Mivel a villamosenergia nehezen tárolható, a termelés és a fogyasztás mindig egyensúlyban kell, hogy legyen. Az irányítás egyszerűsítése céljából a hálózat szereplői, a fogyasztók és a generátorok kisebb csoportokat, úgynevezett mérlegköröket alkotnak és a termelés/fogyasztás egyensúlyát már ezeken a csoportokon belül biztosítják.

A villamos hálózatot a csomópontok termelési kapacitása illetve ideális (maximális) fogyasztása, illetve a vezetékek szállítási kapacitása és szuszceptanciája (gyakorlatilag: vezetőképessége) írja le, sa szerzők egyszerűsítve egyenáramú hálózatként kezelik. A szabályozó az össztermelést maximalizálja minden lehetséges mérlegkör-struktúrára, azaz partícióra s a generátorok és fogyasztók az ehhez tartozó termelési és fogyasztási értékeket élvezhetik. Így a termelés, illetve fogyasztás volumenjének megválasztása nem stratégiai kérdés, s mivel az áramfolyamokat a hálózat fizikai paraméterei határozzák meg, a játékosok döntései a mérlegkörök alakításában merülnek ki és ezt egy partíciós függvény alakú játékkal célszerű modellezni. Csercsik és Kóczy (2012, 2017) az alábbi — részben meglepő — megfigyeléseket teszi:

4. Állítás. *A partíciós függvény alakú játék kohéziós.*

5. Állítás. *Ha az optimális folyamokat nem a vezetékek szállítási kapacitáskorlátai korlátozzák akkor a koalíciók összeolvadása szuperadditív, egyébként lehet szubadditív.*

6. Állítás. *A koalíciók összeolvadása járhat pozitív externáliákkal.*

7. Állítás. *Az egyszerű rekurzív mag lehet üres.*

A megfigyelések gyakorlati következménye, hogy például több ország villamos hálózatának összekapcsolása és közös optimalizálása nem feltétlenül előnyös minden érintett számára és bár a játék kohéziós, azaz a nagykoalíció a hatékony struktúra, a szerzett előnyök elosztása után is maradhatnak elégedetlen országcsoportok.

2.4. A hatalmi indexek tulajdonságai

A csak 0 vagy 1 kifizetést megengedő egyszerű játékok jól modellezik a bináris kimenetelű szavazási helyzeteket: egy koalíció értéke pontosan akkor 1, ha képes döntést hozni. Ha minden hatalom egy döntéshozó kezében összpontosul, akkor az összes hatalommal ez a szavazó rendelkezik. Az érdekesebb helyzetekben a döntések több szavazótól is függenek, s a hatalmi indexek arra adnak *a priori* előjelzést, hogy a hatalom hogyan oszlik meg a döntéshozók között. Mielőtt az indexek a priori jellegére térnénk, az első eredmények a szavazási helyzet megadásával kapcsolatosak.

2.4.1. Hatékony számítás Harsányi-osztalékokkal

Egy szavazási játékot közvetlenül a nyerő koalíciók $\mathcal{W}$ halmazának megadásával definiálhatunk. Ez azonban nem egy túl hatékony megközelítés, ha, mint az Európai Unióban sok milliárd lehetséges koalícióval kell számolnunk, ráadásul a játék megoldásakor még ezzel hatalmas halmazzal kell dolgoznunk. Tekintettel arra, hoy egy nyerő koalíció bővítése nyerő marad, elegendő a legkisebb nyerő koalíciókat felsorolni. Lange és Kóczy (2012) javaslatot tesz egy új formulára, melynek segítségével a htalmi indexek közvetlenül a legkisebb nyerő koalíciók $\mathcal{M}$ halmazából is kiszámítható. A megoldás egy elegáns, új megközelítést ad, ami bizonyos játékosztályokon a hatalmi indexek sokkal hatékonyabb kiszámítását teszi lehetővé.

Ehhez a játékok Harsanyi (1963) által bevezetett megjelenítését használjuk. Harsanyi (1963) a C koalíció kifizetését három összetevőre bontja: a tagok saját értéke, a részkoalíciók hozzáadott értéke és végül a C koalícióval létrejövő együttműködés által hozzáadott $\Delta^v(C)$ érték, a C Harsányi-osztaléka, ahol $\Delta^v(C) = \sum_{S \subseteq C} (-1)^{|C|-|S|} v(S)$. Ekkor

8. Állítás. *(Lange és Kóczy, 2012) A v szavazási játékra*

$$v = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(v): \mathcal{S} \neq \emptyset} (-1)^{|\mathcal{S}|-1} u_{\hat{\mathcal{S}}}. \tag{1}$$

Ekkor a Shapley-Shubik és Banzhaf értékek (Penrose, 1946; Banzhaf, 1965; Coleman, 1971) felírhatók az alábbiak szerint.

9. Tétel. *(Lange és Kóczy, 2012) Egy (N, v) szavazási játékra és bármely $i \in N$ játékosra,*

$$\mathrm{Sh}_i(v) = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(v): \mathcal{S} \neq \emptyset} \frac{(-1)^{|\mathcal{S}|-1} \cdot e_i(\hat{\mathcal{S}})}{|\hat{\mathcal{S}}|}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Bz}_i(v) = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(v): \mathcal{S} \neq \emptyset} (-1)^{|\mathcal{S}|-1} \cdot 2^{1-|\hat{\mathcal{S}}|} \cdot e_i(\hat{\mathcal{S}}), \tag{3}$$

ahol $\hat{\mathcal{S}} = \bigcup_{T \in \mathcal{S}} T$, e pedig egy tagsági függvény.

Ezek a kifejezések azonban sok felesleges ismétlést is tartalmaznak, s a Harsányi osztalékokkal egy sokkal hatékonyabb formulát is felírhatunk. Legyen $\overline{\mathcal{M}} = \{\hat{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(v), \mathcal{S} \neq \emptyset\}$! Ekkor $v = \sum_{T \in \overline{\mathcal{M}}(v)} \Delta^v(T)\, u_T$ és az alábbi következményt is kimondhatjuk.

10. Következmény. *(Lange és Kóczy, 2012)*

$$\mathrm{Sh}_i(v) = \sum_{T \in \overline{\mathcal{M}}(v): i \in T} \frac{\Delta^v(T)}{|T|}, \tag{4}$$

$$\mathrm{Bz}_i(v) = \sum_{T \in \overline{\mathcal{M}}(v): i \in T} \Delta^v(T) \cdot 2^{1-|T|}. \tag{5}$$

Azokra a játékokra, ahol $\overline{\mathcal{M}} \subsetneq \mathcal{W}$ a fenti formula hatékonyabb, de a különbség akkor igazán jelentős, ha bizonyos játékosok szimmetrikusak. Szavazási helyzetekben meglepően gyakoriak a szimmetrikus helyzetek — elég egy társasházi közgyűlésre gondolni, ahol a típuslakások tulajdonosai mind azonos szavazati súllyal rendelkeznek.

2.4.2. Parlamenti szavazás hiányzókkal

Ha szavazásra gondolunk, gyakran az Országgyűlés, vagy más képviselőtestület jut az eszünkbe. Itt a képviselők pártok szerint frakciókba tömörülnek és az egyes frakciókba tömörülő képviselők együtt szavaznak. Az ilyen szavazási helyzetek felfoghatók egy súlyozott szavazási játékként, ahol a játékosok a pártok, súlyukat természetesen adja a képviselők száma, végül egy koalíció akkor nyerő, ha a képviselők összlétszáma meghaladja a szavazási szabályban előírt küszöböt. Így, ha egy párt eleve a képviselői helyek 60 százalékával rendelkezik, akkor minden hatalom a kezében van, de ez igaz 90 és 51 százalék mellett is. A gyakorlatban mégsem mindegy, hogy a küszöböt mennyivel lépi át a koalíció. Ennek oka lehet a képviselők elvándorlása, de Kóczy és Pintér (2011b,a) azt vizsgálja, hogy a képviselők hiányzása hogyan befolyásolja a hatalmi viszonyokat. Szemben Laruelle és Valenciano (2012) modelljével feltételezzük, hogy a hiányzás nem szándékos, az oka betegség, vagy valamilyen elfoglaltság. A hiányzások függvényében megváltoznak a pártok súlyai és esetleg a küszöb is, így az sem lehetetlen hogy egy kisebbségi koalíció (relatív többséget szerezzen). A modell speciális eseteként feltételezzük, hogy minden képviselő azonos, p valószínűséggel vesz rész a szavazáson.

11. Állítás. *Abszolút többség esetén egy C koalíció értéke*

$$\tilde{v}(C) = \sum_{i=q}^{w(C)} \binom{w(C)}{i} p^i (1-p)^{w(C)-i}, \tag{6}$$

ahol q a szavazási küszöb, w a játékosok súlyvektora, $w(C) = \sum_{i \in C} w_i$.

12. Állítás. *Relatív többség esetén egy koalíció értékét az alábbi kifejezés adja:*

$$\begin{aligned}\tilde{v}(S) &= \sum_{i=1}^{w(S)} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{1-\rho}{\rho} i \right\rfloor} \binom{w(S)}{i} p^i (1-p)^{w(S)-i} \binom{w(N)-w(S)}{j} p^j (1-p)^{w(N)-w(S)-j} \\ &= \sum_{i=1}^{w(S)} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{1-\rho}{\rho} i \right\rfloor} \binom{w(S)}{i} \binom{w(N)-w(S)}{j} p^{i+j} (1-p)^{w(N)-(i+j)},\end{aligned} \tag{7}$$

ha ρ a relatív szavazási küszöböt jelöli.

Az általánosított szavazási játékok hatalmi indexét egy tetszőleges κ hatalmi indexből $\tilde{\kappa}(\tilde{v}) = \sum_{v \in \hat{\Gamma}_0} p(v)\kappa(v)$ adja.

13. Tétel. *(Kóczy és Pintér, 2011b) Az általánosított súlyozott szavazási játékok $\tilde{\Gamma}$ osztályán a ϕ érték pontosan akkor teljesíti a Hatékonyság, Szimmetria és Marginalitás axiómákat, ha $\phi = \Phi$, azaz a Shapley-érték.*

A hiányzási statisztikák alapján így pontosabb becslést adhatunk a parlamenti erőviszonyokra, s különbséget tehetünk többség és többség között: míg az egyiknél a többség szinte garantált, a másiknál kevésbé. Így például — a kétharmados törvényeket tekintve — a Horn-kormány többsége megingathatatlan volt, a 2010-es Orbán kormány kb. 0,55% eséllyel nem tudott döntést hozni. Érdekes, hogy ugyanazon létszámarányok mellett, a mai, kisebb parlamentben ugyanez az érték 3,5%.

2.4.3. Konvex játékok

A hatalmi indexek egyik kritikája, hogy az elemzés során minden koalíciót figyelembe veszünk. Ennek magyarázata, hogy az értékek a priori, azaz a szavazás tárgyának ismerete előtti befolyást mutatnak. A valóságban a szavazók bizonyos ismert jellemzői meghatározók lehetnek a szavazási kérdésekben. Megoldást jelenthetnek a konvex geometriák felett értelmezett szavazási játékok (Bilbao és Edelman, 2000; Bilbao, Jiménez, és López, 1998).

Kóczy és Sziklai (2015) egy kétdimenziós politikateret feltételez, melyben csak konvex koalíciókat engedünk meg, bár nem euklideszi értelemben: ha $i, j, k, l \in C$ (nem feltétlenül különböző) és az m játékosra teljesül, hogy $i_x \leq \leq m_x \leq j_x$ és $k_y \leq m_y \leq l_y$ akkor $m \in C$ és azokat a koalíciókat, amire ez nem teljesül, egyszerűen kizárjuk. Itt is azok az esetek az érdekesek, amikor egy szavazó nyerő koalícióból való kilépése után a koalíció már nem nyerő. Ez elvileg kétféleképpen is lehetséges: a kilépés után a koalíció konvex, de már nem nyerő, vagy ha a koalíció elveszíti konvexitását. Utóbbi azonban lehetetlen, hiszen a konvexitás lényege éppen az, hogy a politikatérben való elhelyezkedés meghatározza a szavazatokat. A konvexitás csak úgy maradhat meg, ha a koalíció tagjait a koordinátarendszerben jelképező pontok által feszített téglalap körvonaláról lép ki az egyik (feszítő) pont, illetve a megfelelő játékos.

Kóczy és Sziklai (2015) egy szimmetrikus példát vizsgál, ahol a játékosok csak a politikai preferenciájukban különböznek, így egyrészt csak a legkisebb nyerő koalíciókban vannak kritikus játékosok, másrészt ezekbne minden körvonalon elhelyezkedő szavazó kritikus, majd megad egy algoritmust, amivel gyorsan kiszámítható, hogy melyik játékos hányszor kritikus.

Kevés olyan szavazási helyzet van, ahol a képviselők nem alkotnak azonnal pártokat, viszont preferenciáik jól ismertek. Egy ilyen érdekes szavazási helyzet a pápíválasztáskor összeülő Konklávé. Tagjai a 70 év alatti bíborosok: mind jól ismert közéleti személyek, akiknek a megnyilatkozásai közismertek. A XVI. Benedek pápa lemondása után összeülő Konklávé körül a nagy kérdés az volt, hogy a konzervatívnak mondott Benedek után újra egy konzervatív pápa lesz-e, illetve, hogy elérkezett-e az ideje egy tengeren túli, például afrikai pápának, vagy Róma püspöke olasz lesz mint oly sokszor a történelemben. Ezért aztán a politikatér két dimenziója a bíborosok születési helyének Rómától vett távolsága és a konzervativizmusuk egy Google metrika szerint (azaz az „X konzervatív?” és az „X liberális?” angolul feltett kérdésekben az előbbi aránya). A legtöbbször kritikus bíborosok a legbefolyásosabbak, így vélhetőleg ők a legesélyesebbek a megválasztásra. Kóczy és Sziklai (2015) számításai szerint a népszerű és elismert Erdő Péter szinte esélytelen volt, míg a rangsort George Pell, Francisco Javier Errázuriz Ossa és Jorge Bergoglio, a későbbi Ferenc pápa vezeti.

2.4.4. Stratégiai hatalmi indexek

Míz a konvex geometriákon játszott játékokban a játékosok jellemzői zártak ki bizonyos koalíciókat a stratégiai hatalmi indexek esetében megengedjük, hogy a játékosok önkényesen kiválasszák, hogy mely játékosokkal hajandóak együttműködni és ezáltal mely koalíciókban hajlandóak részt venni.

Kóczy (2016b) megfigyelte, hogy a hatalmi indexek felírhatók, mint $\kappa_i = =\sum_{C\in 2^N\setminus\emptyset} a^C\mu_i^C$, ahol μ_i^C a játékosok koalícióban kapott jutalma és a^C a koalíciók súlyozása, $\sum_{C\in 2^N\setminus\emptyset} a^C = 1$. Egy kétlépéses játékot feltételez, melynek első lépésében a játékosok nonkooperatív módon kiválasztják az elfogadható nyerő koalíciók, s a második lépésben ebből a halmazból határozzuk meg a hatalmi indexet, ami tulajdonképpen a játékosok kifizetése.

14. Állítás. *(Kóczy, 2016b) m A kritikus játékosokat is tartalmazó többlet-, azaz nem legkisebb nyerő koalíciók elutasításra kerülnek.*

15. Következmény. *(Kóczy, 2016b) Bármilyen hatalmi indexre* $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{W}^*$.

Ennek megfelelően az alábbiak azokra a hatalmi indexekre korlátozódnak, ahol a többletkoalíciókat nem vesszük figyelembe.

16. Segédtétel. *Az i játékos elutasítása akkor és csak akkor nyereséges, ha i hozzájárulása az elutasított koalícióban kisebb, mint általában, ahogy azt a stratégiai hatalmi index mutatja.*

17. Tétel. *(Kóczy, 2016b) A nyerő koalíciók elutasítási játékának Nash egyensúlyai között létezik egy, ami a legkevesebb elutasítást tartalmazza és ez a barátságos egyensúlyi halmaz felírható mint*

$$\mathcal{W}^* = \bigcap_{s\in F} \mathcal{W}(s). \tag{8}$$

18. Következmény. *A* $\phi^* : \phi^*(\mathcal{W}) = \phi(\mathcal{W}^*)$ *stratégiai hatalmi index jól definiált.*

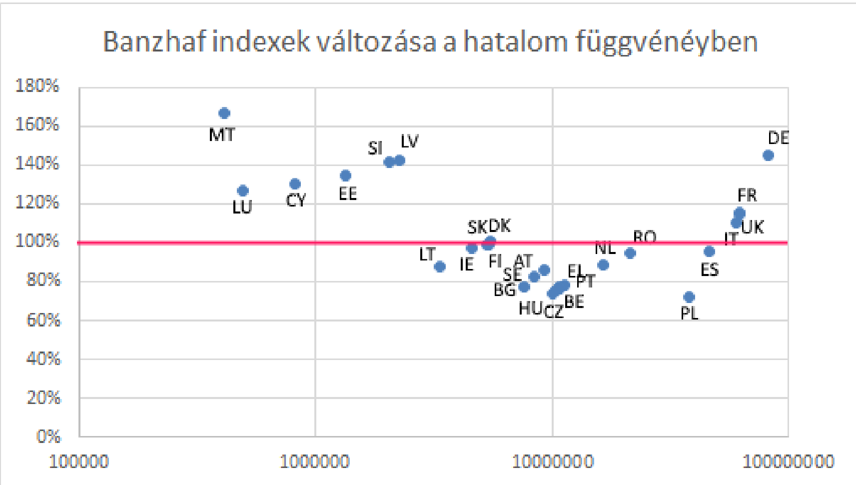
A 17 tétel szempontjából fontos az alábbi segédtétel:

19. Segédtétel. *Az i játékos elutasítása akkor és csak akkor nyereséges, ha i hozzájárulása az elutasított koalícióban kisebb, mint általában, ahogy azt a stratégiai hatalmi index mutatja.*

Bár a stratégiai indexek meghatározása számítási szempontból bonyolult, így például az Európai Unió tagországainak stratégiai hatalmi indexét meghatározni nem kis feladat, a Segédtétel alapján bizonyos általános megfigyeléseket tehetünk. Az EU-tag Németország közjó indexe (Holler és Packel, 1983) 5,56% $> \frac{1}{18}$, így Németországnak nem érdeke ennél nagyobb koalíciókkal együttműködnie. Ez nem azt jelenti, hogy ennél nagyobb koalíciók nem is jöhetnek létre, hanem, hogy a javak elosztásába nem számítanak bele.

2.5. Hatalmi indexek az Európai Unióban

Míg az Európai Unió jogelődeiben az egyetértéses döntéshozatalra törekedtek, a taglétszám növekedésével áttértek a minősített többségi súlyozott szavazásra, ahol a döntések a tagországok súlyozott szavazatai alapján dőlnek el. Legalábbis ezt a döntési mechanizmust alkalmazzák az Európai Unió egyik legfontosabb szervében, az Európau Unió Tanácsában, korábbi, ismertebb nevén a Miniszterek Tanácsában.



1. ábra. Banzhaf indexek változása 2010 és 2015 között a népességek függvényében

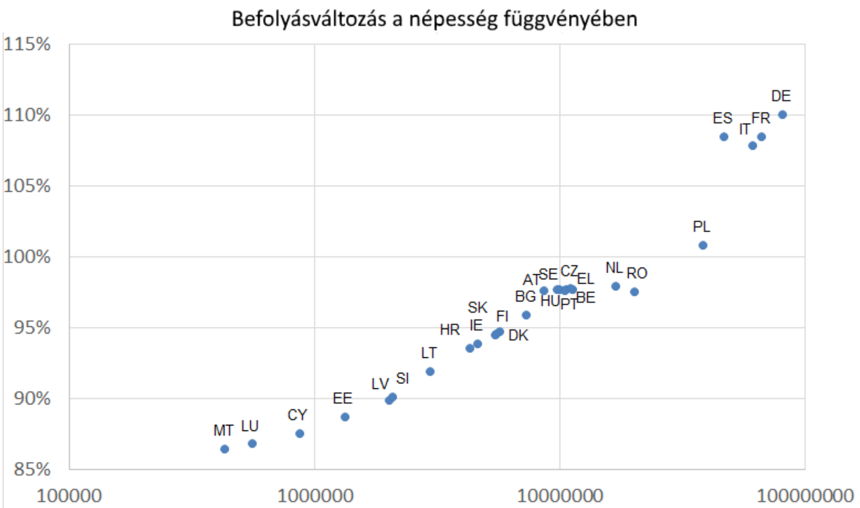
2.5.1. A lisszaboni reform

A Lisszaboni Szerződés megváltoztatta az EU döntési mechanizmusait, beleértve a Miniszterek Tanácsában alkalmazott szavazást. A cél kettős volt. Egyrészt a döntési képesség, azaz a nyerő koalíciók arányának növelése, ami a korábbi 2% körüli értékről a hatszorosára nőtt. Másrészt a korábbi Nizzai döntési mechanizmus fő elemét önkényesen, politikai alkuk eredményeképpen elfogadott szavazási súlyok alkották. A súlyok nehezen követték az egyes országok lakosságának változását, egy bővítés kivitelezése pedig egy politikai rémálom volt, hiszen az új tag miatt megváltozott hatalmi viszonyok a súlyok újratárgyalására sarkallták a tagországokat. A Lisszaboni Szerződés óta pontosan modellezhető a döntéshozás a be-, vagy éppn kilépés után is. Mielőtt erre rátérünk, nézzük meg a szabálymódosítás hatását. Kóczy (2011, 2012) a változások hosszútávú hatását elemezte a hatást alapvetőn két fő részre bontva. Egyrészt megváltoznak a szavazati viszonyok a szabálymódosítás közvetlen következményeként. Másrészt az új szabály szerint a szavazást jelentős részben a lakosságadatok döntik el, s így megnézhetjük azt is, hogy a következő évtizedek várható demográfiai változásai hogyan hatnak a szavazási viszonyokra.

20. Állítás. *(Kóczy, 2011, 2012) A lisszaboni döntési mechanizmus elsősorban a nagy és a kis országokat érintette kedvezően, míg a közepes méretű országok rosszul jártak.*

(Kóczy, 2011, 2012) A változások legnagyobb vesztesei a közepes méretű, erősen fogyó népességű országai: Csehország, Magyarország, Bulgária...

21. Állítás. *(Kóczy, 2011, 2012) Hazánk Shapley-értéke a korábbi 3,4 százalékról azonnal 2,2-re, majd 2060-ig, kb. 2,05 százalékra csökken.*

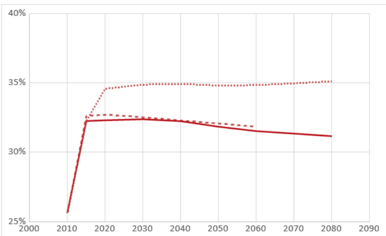


2. ábra. Módosított hatalmi indexek a jelenlegiek százalékában és a népességek függvényében

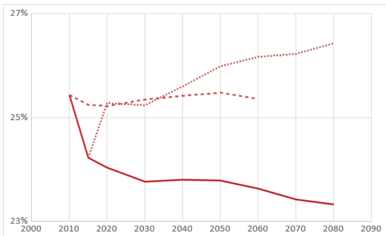
2.5.2. A brexit

A Lisszaboni szerződés lehetőséget ad arra, hogy előre megvizsgáljuk az Egyesült Királyság EU-ból való kilépésének, az úgynevezett brexitnek a hatását. Kóczy (2016a, 2018a) modelljében a többi tag kifizetése kétféle módon változik. Egyrészt eggyel kevesebb taggal kell osztozkodni, és ezzel az egyes országok befolyása jellemzően nő. Másrészt a tagok hatalmi indexe nem más, mint a közös erőforrásokból: a büdzséből, a különböző programokból való részesedés aránya. Mivel a britek a kilépés után már nem fizetnek be a büdzsébe, azt gondolnánk, hogy az országok többsége alapvetően rosszul jár. Ez az országok többségére igaz is, azonban a négy legnagyobb ország (Német-, Francia-, Olasz- és Spanyolország) kifejezetten jól járnak a brit kilépéssel (2 ábra). Bár a brexit hatásai igen sokrétűek, érdekes megfigyelés, hogy az EU politikáját meghatározó országoknak nem állt érdekében visszatartani a briteket.

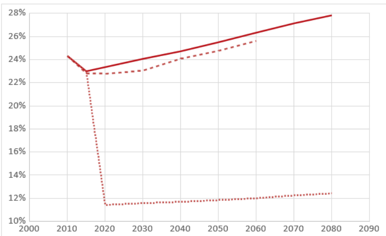
Érdekes egyébként megnézni, hogy a Lisszaboni Szerződés és a brexit hogyan változtatja meg a hatalmi viszonyokat az Unióban. Korábban volt egy érdekes egyensúly az észak és dél, kelet és nyugat között, s így kialakult négy szinte azonos súlyú régió: 1) Az alapító tagok, 2) EFTA tagok (és a Baltikum) 3) Kelet-Európa, 4) Dél-Európa. A lisszabonni szerződés előtt a négy régió döntési képessége hasonló volt.



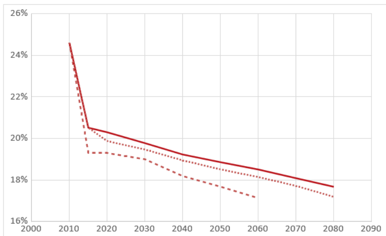
(a) Az Unió magja



(b) Dél-Európa



(c) Észak-Európa, Baltikum, Ausztria



(d) Közép-Kelet Európa

3. ábra. Hatalmi index előrejelzések négy országcsoportra. (A 2010-es Kóczy (2012), aktualizált és Brexit utáni értékek szaggatott, folytonos és pontozott vonallal.)

Mint ez a 3 ábrán is látható, a mag régió befolyása másfélszeresére nő, a kevésbé integrációpárti volt EFTA tagok és volt kommunista országok befolyása összességében megfeleződik.

2.5.3. További tagkilépések

Petróczy et al (2018) megvizsgálták, hogy mennyire robusztusok az eredmények és azt találták, hogy a kilépés utáni hatalmi indexek alakulásában nagy a jelentőség a tagok létszámának, pontosabban annak a paritásának. Ennek oka, hogy az Lisszaboni Szerződés óta a tagok 55%-a szükséges a nyerő koalíciókhoz, s így nem mindegy, hogy a kilépéssel változik-e a nyyerő koalíciókhoz szükséges országok száma. Ha nem, akkor a kicsik, ha csökken, akkor a nagy országok járnak ezzel jól. Így például egy brexitet követő cseh kilépést, a czexitet már nem néznék jó szemmel a nagyobb országok. Érdekes, hogy Lengyelország esetében viszont az országok minősített többsége jól járna.

Hivatkozások

Ambec S, Ehlers L (2008) Sharing a river among satiable agents. Games and Economic Behavior 64:35–50

Aumann RJ, Peleg B (1960) Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments. Bulletin of the American Mathematical Society 66:173–179

Balog D, Bátyi TL, Csóka P, Pintér M (2011) Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. Közgazdasági Szemle 58(7-8):619–632

Banzhaf JF (1965) Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review 19:317–343

Bilbao JM, Edelman PH (2000) The Shapley value on convex geometries. Discrete Applied Mathematics 103(1-3):33–40

Bilbao JM, Jiménez A, López JJ (1998) The Banzhaf power index on convex geometries. Mathematical Social Sciences 36(2):157–174

Bloch F, van den Nouweland A (2014) Expectation formation rules and the core of partition function. Games and Economic Behavior 88:339–353

Chander P, Tulkens H (1997) The core of an economy with multilateral environmental externalities. International Journal of Game Theory 26(3):379–401

Chatterjee K, Dutta B, Ray D, Sengupta K (1993) A noncooperative theory of coalitional bargaining. Review of Economic Studies 60:463–477

Coleman JS (1971) Control of collectives and the power of a collectivity to act. In: Lieberman B (ed) Social Choice, Gordon and Breach, New York, pp 192–225

Csercsik D, Kóczy LÁ (2012) Hatékonyság és stabilitás nagyfeszültségű elektromos hálózatokban: Egy játékelméleti megközelítés. Szigma 43(1-2):43–58

Csercsik D, Kóczy LÁ (2017) Efficiency and stability in electrical power transmission networks: a partition function form approach. Networks and Spatial Economics 17(4):1161–1184

Csóka P (2003) Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. Közgazdasági Szemle 50(10):855–880

Funaki Y, Yamato T (1999) The core of an economy with a common pool resource: A partition function form approach. International Journal of Game Theory 28(2):157–171

Hafalir IE (2007) Efficiency in coalition games with externalities. Games and Economic Behavior 61(2):242–258

Harsanyi JC (1963) A simplified bargaining model for the n-person cooperative game. International Economic Review 4(2):194–220

Hart S, Kurz M (1983) Endogenous formation of coalitions. Econometrica 51(4):1047–1064

Holler MJ, Packel EW (1983) Power, luck and the right index. Journal of Economics 43(1):21–29

Huang CY, Sjöström T (2003) Consistent solutions for cooperative games with externalities. Games and Economic Behavior 43(2):196–213

Huang CY, Sjöström T (2006) Implementation of the recursive core for partition function form games. Journal of Mathematical Economics 42(6):771–793

Huang CY, Sjöström T (2010) The recursive core for non-superadditive games. Games 1(2):66–88

Kóczy LÁ (2007) A recursive core for partition function form games. Theory and Decision 63(1):41–51

Kóczy LÁ (2009) Sequential coalition formation and the core in the presence of externalities. Games and Economic Behavior 66(1):559–565

Kóczy LÁ (2011) Lisszaboni kilátások. Közgazdasági Szemle 58(10):1045–1058

Kóczy LÁ (2012) Beyond Lisbon: Demographic trends and voting power in the European Union Council of Ministers. Mathematical Social Sciences 63(2):152–158

Kóczy LÁ (2015) Stationary consistent equilibrium coalition structures constitute the recursive core. Journal of Mathematical Economics 61:104–110

Kóczy LÁ (2016a) How Brexit affects European Union power distribution. Tech. rep., Institute of Economics, Centre for Economic and Regional Studies, Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Kóczy LÁ (2016b) Power indices when players can commit to reject coalitions. Homo Oeconomicus 33(1-2):77–91

Kóczy LÁ (2018a) Döntési befolyás az Európai Unió Tanácsában: Mit hozhat a Brexit? Alkalmazott Matematikai Lapok 35

Kóczy LÁ (2018b) Partition Function Form Games. Springer International Publishing, DOI 10.1007/978-3-319-69841-0

Kóczy LÁ, Pintér M (2011a) Az ellenzék ereje - általánosított súlyozott szavazási játékok. Közgazdasági Szemle 58(6):543–551

Kóczy LÁ, Pintér M (2011b) The men who weren't even there: Legislative voting with absentees. Tech. rep., Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Kóczy LÁ, Sziklai B (2015) Electing the Pope. Homo Oeconomicus 32(1):14

Kovács G, Radványi AR (2011) Költségelosztási Modellek. Alkalmazott Matematikai Lapok 28:59–76

Lange F, Kóczy LÁ (2012) Power indices expressed in terms of minimal winning coalitions. Social Choice and Welfare 41(2):281–292

Laruelle A, Valenciano F (2012) Quaternary dichotomous voting rules. Social Choice and Welfare 38(3):431–454

Mäler KG (1989) The acid rain game. In: Folmer H, Van Ierland E (eds) Valuation methods and policy making in environmental economics, Elsevier, Amsterdam, pp 231–252

Maskin E (2003) Bargaining, coalitions and externalities

McQuillin B (2009) The extended and generalized Shapley value: Simultaneous consideration of coalitional externalities and coalitional structure. Journal of Economic Theory 144(2):696–721

Nash JF (1950) Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences 36:48–49

Nash JF (1953) Two-person cooperative games. Econometrica 21(1):128–140

Penrose LS (1946) The elementary statistics of majority voting. Journal of the Royal Statistical Society 109(1):53–57

Perry M, Reny PJ (1994) A noncooperative view of coalition formation and the core. Econometrica 62(4):795–817

Petróczy DG, Rogers M, Kóczy LÁ (2018) Tagkilépések és a magyar befolyás változása az Európai Unió Tanácsában. Alkalmazott Matematikai Lapok

Pintassilgo P (2003) A coalition approach to the management of high seas fisheries in the presence of externalities. Natural Resource Modeling 16(2):175–197

Pintassilgo P, Lindroos M (2008) Coalition formation in straddling stock fisheries: A partition function form approach. International Game Theory Review 10(3):303–317

Pintér M (2007) Regressziós játékok. Szigma 38(3-4):131–147

Pintér M (2009) A Shapley-érték axiomatizálásai. Alkalmazott Matematikai Lapok 26:289–315

Rajan R (1989) Endogenous coalition formation in cooperative oligopolies. International Economic Review 30(4):863–876

Rubinstein A (1982) Perfect equilibrium in a bargaining model. Econometrica 50(1):97–109

Selten R (1965) Spieltheoretische Behandelung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Teil I: Bestimmung des dynamischen Preisgleichgewichts. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft / Journal of Institutional and Theoretical Economics 121(2):301–324

Shapley LS (1953) A value for n-person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds) Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, chap 17, pp 307–317

Shapley LS (1955) Markets as cooperative games. Tech. rep., The Rand Corporation

Shapley LS, Shubik M (1954) A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American Political Science Review 48(3):787–792

Shenoy PP (1979) On coalition formation: A game-theoretical approach. International Journal of Game Theory 8(3):133–164

Thrall RM, Lucas WF (1963) N-person games in partition function form. Naval Research Logistics Quarterly 10(1):281–298

United Nations (1995) Agreement for the implementation of the provisions of the United Nations Convention on the Law of the Sea of 10 December 1982 relating to the conservation and management of straddling fish stocks and highly migratory fish stocks

Zhou L (1994) A new bargaining set of an N-person game and endogenous coalition formation. Games and Economic Behavior 6(3):512–526

A témakörhöz kapcsolodó legfontosabb tanulmányaim jegyzéke

Csercsik D, Kóczy LÁ (2012) Hatékonyság és stabilitás nagyfeszültségű elektromos hálózatokban: Egy játékelméleti megközelítés. Szigma 43(1-2):43–58

Csercsik D, Kóczy LÁ (2017) Efficiency and stability in electrical power transmission networks: a partition function form approach. Networks and Spatial Economics 17(4):1161–1184

Kóczy LÁ (2007) A recursive core for partition function form games. Theory and Decision 63(1):41–51

Kóczy LÁ (2009a) Measuring voting power: The paradox of new members vs. the null player axiom. In: Rudas IJ, Fodor J, Kacprzyk J (eds) Towards Intelligent Engineering and Information Technology, Springer, Berlin, pp 67–78

Kóczy LÁ (2009b) Sequential coalition formation and the core in the presence of externalities. Games and Economic Behavior 66(1):559–565

Kóczy LÁ (2011) Lisszaboni kilátások. Közgazdasági Szemle 58(10):1045–1058

Kóczy LÁ (2012) Beyond Lisbon: Demographic trends and voting power in the European Union Council of Ministers. Mathematical Social Sciences 63(2):152–158

Kóczy LÁ (2015) Stationary consistent equilibrium coalition structures constitute the recursive core. Journal of Mathematical Economics 61:104–110

Kóczy LÁ (2016) Power indices when players can commit to reject coalitions. Homo Oeconomicus 33(1-2):77–91

Kóczy LÁ (2018a) Döntési befolyás az Európai Unió Tanácsában: Mit hozhat a Brexit? Alkalmazott Matematikai Lapok 35

Kóczy LÁ (2018b) Partition Function Form Games. Springer International Publishing, DOI 10.1007/978-3-319-69841-0

Kóczy LÁ, Pintér M (2011) Az ellenzék ereje - általánosított súlyozott szavazási játékok. Közgazdasági Szemle 58(6):543–551

Kóczy LÁ, Sziklai B (2015) Electing the Pope. Homo Oeconomicus 32(1):14

Lange F, Kóczy LÁ (2012) Power indices expressed in terms of minimal winning coalitions. Social Choice and Welfare 41(2):281–292