Egy- és többváltozós multiplikatív számelméleti függvények aszimptotikus tulajdonságai

MTA doktori értekezés tézisei

Tóth László

Pécsi Tudományegyetem

2018

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Multiplikatív függvények

Sok szerző vizsgálta a multiplikatív számelméleti függvények[1] különböző aszimptotikus tulajdonságait. Az elemi és az analitikus számelmélet egyik fontos célkitűzése éles hibataggal rendelkező aszimptotikus formulák levezetése $\sum_{n\leqslant x} f(n)$ összegekre, ahol $f(n)$ egy speciális multiplikatív függvény, vagy valamely multiplikatív függvényosztályhoz tartozik.

Például a Dirichlet-féle osztóprobléma azon θ kitevők infimumának a meghatározását jelenti, amelyekre

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\theta+\varepsilon}), \tag{1.1}$$

fennáll minden $\varepsilon > 0$ esetén. Ismert, hogy $1/4 \leqslant \theta \leqslant 131/416 \doteq 0.314903$. Pontosabban, (1.1) eddigi legjobb hibatagja $O(x^{131/416}(\log x)^{26947/8320})$, ami Huxley [16] eredménye.[2]

Általánosabban, rögzített pozitív $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ egészek esetén tekintsük a $\tau(a_1,\ldots,a_k;n) := \sum_{d_1^{a_1}\cdots d_k^{a_k}=n} 1$ osztófüggvényt és jelölje $\Delta(a_1,\ldots,a_k;x)$ a következő aszimptotikus képlet maradéktagját:

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(a_1,\ldots,a_k;n) = H(a_1,\ldots,a_k;x) + \Delta(a_1,\ldots,a_k;x),$$

ahol $H(a_1,\ldots,a_k;x)$ a főtag. Lásd például Krätzel [18, Ch. 6] könyvét. Az $a_1 = \cdots = a_k = 1$ esetben a $\tau_k(n)$ Piltz-függvényt kapjuk és legyen, a szokásos jelölés szerint, $\Delta_k(x)$ a megfelelő maradéktag (Piltz osztóprobléma).

A négyzetmentes osztóprobléma Mertens munkásságára nyúlik vissza (1874). Legyen

[1] olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvények, amelyekre $f(mn) = f(m)f(n)$ teljesül, ha $(m,n) = 1$

[2] Egy 2017 szeptemberi új preprintben Bourgain és Watt [4] a jobb $\theta \leqslant 517/1648 \doteq 0.313713$ eredményt bizonyítják. Ugyanez a hibatag érvényes a Gauss-féle körproblémára is.

$\tau^{(2)}(n) = 2^{\omega(n)}$ az n négyzetmentes osztóinak száma. Akkor

$$\sum_{n \leqslant x} \tau^{(2)}(n) = \frac{6}{\pi^2} x \left(\log x + 2\gamma - 1 - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O(R(x)), \tag{1.2}$$

ahol $R(x) \ll x^{1/2}\delta(x)$, a

$$\delta(x) := \exp(-c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}) \tag{1.3}$$

jelöléssel, c egy pozitív konstans. Lásd Suryanarayana és Siva Rama Prasad [30]. Ha a Riemann-hipotézis (RH) igaz, akkor $R(x) \ll x^{4/11+\varepsilon}$, lásd Baker [2].

Az Euler-féle $\phi(n)$ függvényre vonatkozik a

$$\sum_{n \leqslant x} \phi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O\left(x(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3} \right), \tag{1.4}$$

aszimptotikus formula, a jelenleg ismert legjobb hibataggal, amely Walfisz [55, Satz 1, p. 144] eredménye. A

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\phi(n)} = A\left(\log x + \gamma - B \right) + O\left(x^{-1}(\log x)^{2/3} \right) \tag{1.5}$$

formulát, ahol

$$A = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}, \qquad B = \sum_p \frac{\log p}{p^2 - p + 1}, \tag{1.6}$$

először Landau vezette le a gyengébb $O\left(x^{-1}\log x\right)$ maradékkal. Lásd De Koninck és Ivíc [9, Th. 1.1] könyvét. A (1.5) képletben szereplő maradék Sita Rama Chandra Rao [27] eredménye.

Tekintsük most az $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ multiplikatív függvények $\mathcal{W}$ osztályát. Wirsing [57] nevezetes tétele szerint ha $f \in \mathcal{W}$, akkor az

$$M(f) := \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n)$$

középérték létezik és

$$M(f) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu},$$

ahol a szorzat nullának tekintendő, ha a $\sum_p \frac{1-f(p)}{p}$ sor divergál.

Más jellegű eredmények bizonyos multiplikatív függvények maximális nagyságrendjére vonatkoznak. Például a következő jól alkalmazható tétel, amelyet Suryanarayana és

Sita Rama Chandra Rao [29] bizonyított, megadja egy prím-független multiplikatív függvényosztály maximális nagyságrendjét: Legyen f egy olyan pozitív függvény, amelyre $f(n) = O(n^\beta)$, ahol $\beta > 0$ rögzített. Legyen F multiplikatív úgy, hogy $F(p^\nu) = f(\nu)$ minden p^ν ($\nu \geqslant 1$) prímhatványra. Akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log F(n) \log\log n}{\log n} = \sup_{m\geqslant 1} \frac{\log f(m)}{m}.$$

Ez a tétel alkalmazható az $F(n) = \tau(n)$ osztófüggvényre és

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \tau(n) \log\log n}{\log n} = \log 2, \tag{1.7}$$

adódik, ami jólismert eredmény. Itt (1.7) igaz marad, ha $\tau(n)$ helyett a $\tau^{(2)}(n)$ függvényt írjuk. Ha $F(n) = \tau^{(e)}(n)$, az n exponenciális osztóinak száma, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \tau^{(e)}(n) \log\log n}{\log n} = \frac{\log 2}{2},$$

amit Erdős korábban igazolt. Lásd [28, Th. 6.2].

Ramanujan [26] számelméleti függvényeknek a $c_q(n)$ összegek[3] szerinti pontonként konvergens sorfejtését adta. Például, legyen $\sigma(n)$ az n osztóinak összege. Minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \zeta(2) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q(n)}{q^2} \tag{1.8}$$

$$= \frac{\pi^2}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^2} + \frac{2\cos(2\pi n/3)}{3^2} + \frac{2\cos(\pi n/2)}{4^2} + \cdots\right),$$

ami megmutatja hogy $\sigma(n)/n$ értékei miként váltakoznak harmonikusan a $\pi^2/6$ középérték körül.

Egy nem azonosan nulla $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ függvényt multiplikatívnak nevezünk, ha

$$f(m_1 n_1, \ldots, m_k n_k) = f(m_1, \ldots, m_k) f(n_1, \ldots, n_k)$$

teljesül feltéve, hogy $(m_1 \cdots m_k, n_1 \cdots n_k) = 1$. Ha f multiplikatív, akkor értékeit meghatározzák az $f(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_k})$ értékek, ahol p prím és $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pontosabban, $f(1, \ldots, 1) = 1$ és minden $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \prod_p f(p^{\nu_p(n_1)}, \ldots, p^{\nu_p(n_k)}).$$

[3] ezeket ma Ramanujan-összegeknek nevezzük

Ha $k = 1$, akkor visszakapjuk a szokásos multiplikativitást. Egyszerű példák k-változós multiplikatív függvényekre az $(n_1, \ldots, n_k)$ és $[n_1, \ldots, n_k]$. További példák ilyen függvényekre $s(n_1, \ldots, n_k)$ és $c(n_1, \ldots, n_k)$, a $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}, +)$ csoport összes részcsoportjának, illetve a ciklikus részcsoportjainak a száma. Jelölje ϱ_r az olyan $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ rendezett szám r-esek halmazának karakterisztikus függvényét, amelyekre $n_1, \ldots, n_r$ páronként relatív prímek. Akkor ϱ_r egy r-változós multiplikatív függvény és teljesül a

$$\sum_{d_1 | n_1, \ldots, d_r | n_r} \varrho_r(d_1, \ldots, d_r) = \tau(n_1 \cdots n_r) \quad (n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}). \tag{1.9}$$

azonosság.

A többváltozás multiplikatív függvények részletes vizsgálatát adta Vaidyanathaswamy [54] több, mint nyolcvanöt évvel ezelőtt. A [54] dolgozat szinte kizárólag csak algebrai és aritmetikai tulajdonságokat tartalmaz. A mai napig is csak kevés olyan eredmény van az irodalomban, amely többváltozás multiplikatív függvények aszimptotikus tulajdonságaira vonatkozik. A [46] dolgozatomban ennek a témának egy áttekintését adtam.

Az $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ függvény középértéke

$$M(f) := \lim_{x_1, \ldots, x_k \to \infty} \frac{1}{x_1 \cdots x_k} \sum_{n_1 \leqslant x_1, \ldots, n_k \leqslant x_k} f(n_1, \ldots, n_k),$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik. A Wintner tétel (amely az egyváltozós esetre vonatkozik) általánosításaként Ushiroya [52, Th. 1] igazolta a következő eredményt: Ha f egy olyan k-változós függvény (nem feltétlen multiplikatív), hogy

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} \frac{|(\mu_k * f)(n_1, \ldots, n_k)|}{n_1 \cdots n_k} < \infty,$$

akkor az $M(f)$ középérték létezik és

$$M(f) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} \frac{(\mu_k * f)(n_1, \ldots, n_k)}{n_1 \cdots n_k},$$

ahol $*$ a Dirichlet-konvolúciót jelöli, amit

$$(f * g)(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{d_1 | n_1, \ldots, d_k | n_k} f(d_1, \ldots, d_k) g(n_1/d_1, \ldots, n_k/d_k),$$

definiál, $\mu_k(n_1, \ldots, n_k) = \mu(n_1) \cdots \mu(n_k)$ pedig a k-változós Möbius-függvény (a konstans 1 függvény inverze a $*$ konvolúcióra nézve).

A [46] dolgozatomban megadtam az előbbi eredményt multiplikatív függvényekre, a következőképpen, lásd [46, Prop. 19]: Legyen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ egy multiplikatív függvény. Tegyük fel, hogy

$$\sum_p \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_k=0 \\ \nu_1+\dots+\nu_k\geqslant 1}}^{\infty} \frac{|(\mu_k * f)(p^{\nu_1},\dots,p^{\nu_k})|}{p^{\nu_1+\dots+\nu_k}} < \infty.$$

Akkor az $M(f)$ középérték létezik és

$$M(f) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^k \sum_{\nu_1,\dots,\nu_k=0}^{\infty} \frac{f(p^{\nu_1},\dots,p^{\nu_k})}{p^{\nu_1+\dots+\nu_k}}.$$

A többváltozós esetben nem ismerek ennél általánosabb középértéktételt. Bizonyos speciális f függvények esetén $\sum_{n_1,\dots,n_k\leqslant x} f(n_1,\dots,n_k)$ összegekre vonatkozó aszimptotikus képleteket vezettek le Balazard, Naimi, Pétermann [3] és de la Bretèche [10], analitikus módszerrel. Például, a [3] cikkben a szerzők egy k-változós effektív Perron inverziós formulát használtak (egy nagyon bonyolult eljárással) annak bizonyítására, hogy

$$\sum_{n_1,\dots,n_k\leqslant x} \frac{\mu(n_1)\cdots\mu(n_k)}{[n_1,\dots,n_k]} = P_k(\log x) + O(\delta(x)),$$

ahol $P_k(t)$ egy polinom t-ben és $\delta(x)$-et (1.3) definiálja. Azt is igazolták, hogy ha k páratlan, akkor $P_k(t)$ azonosan nulla ($k=1$ esetén ez ekvivalens a prímszámtétellel).

1.2. Az értekezés eredményeiről

Ezt az értekezést az utóbbi 16 évben kifejtett kutatómunkám alapján írtam. Azokat az eredményeimet gyűjtöttem össze, amelyeket a legfontosabbaknak tartok és amelyek kapcsolódnak a 1.1 Szakaszban leírtakhoz. Ezeket az eredményeimet a [33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 49] egyszerzős dolgozataimban publikáltam, valamint a következő társszerzős cikkeimben: [13] (társszerző Mario Hampejs), [14] (társszerző Titus Hilberdink), [23] (társszerző Werner Georg Nowak), [31] (társszerző Marius Tărnăuceanu), [50] (társszerző Eduard Wirsing), [51] (társszerző Wenguang Zhai).

Bemutatom az irodalombeli fontosabb előzetes eredményeket és azokat, amelyek az én dolgozataim után születtek. Kiemelek csoportelméleti, kombinatorikai és numerikus számítási vonatkozásokat is.

A 2 Fejezetben az egyváltozós multiplikatív függvényekre vonatkozó eredményeim szerepelnek. A $\sum_{n\leqslant x} f(n)$ típusú összegek aszimpotikus becsléseire a *konvolúció-módszer*t használom. Ehhez az szükséges, hogy az f függvényt $f = g * h$ Dirichlet-konvolúcióként írjuk. Ha a $g(n)$ függvény „eléggé kicsi” és van egy „jó” formula a $\sum_{n\leqslant x} h(n)$ összegre, akkor megfelelően éles hibatagú aszimptotikus képletet tudunk levezetni a $\sum_{n\leqslant x} f(n)$ összegre.

A levezetett hibatagok sok esetben javítják az irodalomban ismerteket. Ezek nagy része feltételhez nem kötött, de néhány esetben használom a Riemann-sejtés igaz voltát. A kapott maradéktagok több esetben is olyan nevezetes problémák maradéktagjaitól függnek, mint az (1.1) Dirichlet-féle osztóprobléma vagy az (1.2) négyzetmentes osztóprobléma.

A 3 Fejezet a többváltozós multiplikatív függvényekkel kapcsolatos eredményeimet tartalmazza. Bizonyos $F(n_1, \ldots, n_k)$ multiplikatív függvényekre vonatkozó aszimptotikák levezetésére kidolgoztam *a többváltozós konvolúció-módszer* részleteit. Sok esetben ez tűnik a *legtermészetesebb eljárás*nak. Ahhoz, hogy felírjunk és alkalmazzunk egy többváltozós konvolúciós azonosságot, szükséges a megfelelő

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty} \frac{F(n_1,\ldots,n_r)}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}} = \prod_p \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_r=0}^{\infty} \frac{F(p^{\nu_1},\ldots,p^{\nu_r})}{p^{\nu_1 s_1+\cdots+\nu_r s_r}},$$

többszörös Dirichlet-sorok és Euler-szorzatok alapos vizsgálata. A bizonyításaimban *elemi módszerek*et használok. A technikai nehézség abban áll, hogy az eljárás során

$$\sum_{\substack{n_1\leqslant x,\ldots,n_t\leqslant x\\ n_{t+1}>x,\ldots,n_k>x}} \psi(n_1,\ldots,n_k),$$

típusú többszörös összegeket kell megbecsülni bizonyos fellépő k-változós ψ multiplikatív függvényekre.

1.3. Jelölések

Az értekezésben a standard jelöléseket használom. Néhányat közülük az alábbiakban rögzítek. További jelölések magyarázata az első előfordulás helyén szerepel.

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ jelöli a pozitív egészek, az egész, a valós, illetve a komplex számok halmazát;
- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a modulo n ($n \in \mathbb{N}$) maradékosztályok halmaza;
- az $n \in \mathbb{N}$ prímtényezős alakja $n = \prod_p p^{\nu_p(n)}$, ahol a szorzat az összes p prímre vonatkozik és véges sok kitevő kivételével minden $\nu_p(n)$ nulla;
- $(n_1, \ldots n_k)$ és $\gcd(n_1, \ldots n_k)$ az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok legnagyobb közös osztója;
- $[n_1, \ldots, n_k]$ és $\operatorname{lcm}(n_1, \ldots, n_k)$ az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok legkisebb közös többszöröse;
- id az $\operatorname{id}(n) = n$ ($n \in \mathbb{N}$) függvény;
- $\tau(n)$ az n osztóinak száma, $\sigma(n)$ az n osztóinak összege, $\sigma_s(n)$ az n osztói s-edik hatványösszege;
- $\phi(n)$ az Euler-függvény, $\phi_s(n) = n^s \prod_{p|n}(1 - 1/p^s)$ az s-edrendű Jordan-függvény;
- $\mu(n)$ a Möbius-függvény, $\psi(n) = n \prod_{p|n}(1+1/p)$ a Dedekind-függvény, $\kappa(n) = \prod_{p|n} p$ az n legnagyobb négyzetmentes osztója;

- $\omega(n)$ az n különböző prímosztóinak száma, $\Omega(n) = \sum_p \nu_p(n)$ az n prímhatvány-osztóinak száma;
- $\tau^{(2)}(n) = 2^{\omega(n)}$ az n négyzetmentes osztóinak száma;
- $\tau_k(n)$ a Piltz-függvény, ami megadja az $n = d_1 \cdots d_k$ felírások számát;
- $\tau^{(e)}(n) = \prod_{p^\nu || n} \tau(\nu)$ az n exponenciális osztóinak száma;
- $\sigma^{(e)}(n) = \prod_{p^\nu || n} \sum_{d|\nu} p^d$ az n exponenciális osztóinak összege;
- $a(n)$ az n-edrendű nemizomorf Abel-csoportok száma;
- $P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k,n)$ az lnko-összegfüggvény (Pillai-függvény);
- $P(n)$ a partíciófüggvényt is jelöli;
- $c_q(n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant q, (k,q)=1} \exp(2\pi ikn/q)$ a Ramanujan-összegek;
- $*$ a számelméleti függvények Dirichlet-konvolúciója;
- ζ a Riemann-féle dzétafüggvény;
- $\gamma \doteq 0.577215$ az Euler-állandó;
- $G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \doteq 0.915956$ a Catalan-állandó;
- $\sum_p$ és $\prod_p$ a prímek szerinti összegek és szorzatok;
- az O ($\ll$), o, Ω és $\sim$ jelöléseket a szokásos módon használjuk, az első esetén az implikált konstans bizonyos paraméterektől függhet;

2. fejezet

Egyváltozós multiplikatív függvényekre vonatkozó eredmények

2.1. Átlagértékek

A $\tau(n)$ osztófüggvényre Wilson (1922) analitikus eszközökkel bizonyította be, általánosítva Ramanujan (1915) egy korábbi állítását, hogy minden $r \geqslant 2$ egész esetén

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n)^r = x P_{2^r-1}(\log x) + O(x^{\frac{2^r-1}{2^r+2}+\varepsilon}), \tag{2.1}$$

ahol $P_{2^r-1}(t)$ egy (2^r-1)-edfokú polinom t-ben, amelynek főegyütthatója

$$C_r = \frac{1}{(2^r-1)!} \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)^r}{p^\nu}.$$

Tekintsük most a $\tau^{(e)}(n)$ függvényt, amely az n exponenciális osztóinak száma. Lásd a 2.4 Szakaszt. Itt $\tau^{(e)}$ multiplikatív és $\tau^{(e)}(p^\nu) = \tau(\nu)$ minden p^ν $(\nu \geqslant 1)$ prímhatványra. Wu (1995) igazolta, Subbarao (1972) egy eredményét javítva, hogy

$$\sum_{n \leqslant x} \tau^{(e)}(n) = A_1 x + B_1 x^{1/2} + O(x^{2/9} \log x), \tag{2.2}$$

ahol

$$A_1 := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\tau(\nu)-\tau(\nu-1)}{p^\nu}\right),$$

$$B_1 := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{\tau(\nu)-\tau(\nu-1)-\tau(\nu-2)+\tau(\nu-3)}{p^{\nu/2}}\right).$$

A (2.2) hibatagja szorosan kapcsolódik a $\tau(1,2;n) = \sum_{ab^2=n} 1$ függvényre vonatkozó $\Delta(1,2;x)$ hibataghoz, és tovább javítható.

Legyen $\Delta_{k,\ell}(x) := \Delta((1, \underbrace{\ell, \ell, \ldots, \ell}_{k-1}); x)$ a megfelelő általánosított osztóprobléma hibatagja.

2.1.1. Tétel (Tóth [35], [39, Th. 2]). *Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ egy multiplikatív számelméleti függvény. Tegyük fel, hogy*

i) $f(p) = f(p^2) = \cdots = f(p^{\ell-1}) = 1$, $f(p^\ell) = k$ minden p prímre, ahol $\ell, k \geqslant 2$ rögzített egészek,

ii) $f(p^\nu) \ll 2^{\nu/(\ell+1)}$ $(\nu \to \infty)$ egyenletesen a p prímekre.

Akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta^{k-1}(\ell s)V(s),$$

abszolút konvergens $\Re(s) > 1$ esetén, ahol a $V(s)$ Dirichlet-sor abszolút konvergens, ha $\Re(s) > 1/(\ell+1)$.

Továbbá, tegyük fel, hogy $\Delta_{k,\ell} \ll x^{\alpha_{k,\ell}}(\log x)^{\beta_{k,\ell}}$, ahol $1/(\ell+1) < \alpha_{k,\ell} < 1/\ell$. Akkor

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \widetilde{C}_f x + x^{1/\ell} P_{f,k-2}(\log x) + R_f(x), \tag{2.3}$$

ahol $P_{f,k-2}$ egy $(k-2)$-edfokú polinom,

$$\widetilde{C}_f := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=\ell}^{\infty} \frac{f(p^\nu) - f(p^{\nu-1})}{p^\nu}\right),$$

és $R_f(x) \ll x^{\alpha_{k,\ell}}(\log x)^{\beta_{k,\ell}}$ (ugyanaz).

2.1.2. Megjegyzés. Minden $k, \ell \geqslant 2$ esetén $\Delta_{k,\ell}(x) \ll x^{u_{k,\ell}+\varepsilon}$, ahol $u_{k,\ell} := \frac{2k-1}{3+(2k-1)\ell} \in (\frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell})$. Lásd [18, Th. 6.10]. Így $R_f(x) \ll x^{u_{k,\ell}+\varepsilon}$ is igaz.

A 2.1.1 általános Tételt és a 2.1.2 Megjegyzést alkalmazva az $f(n) = \tau^{(e)}(n)^r$ függvényre (az $\ell = 2$, $k = 2^r$ választással) megkapjuk a (2.1) formula analógját:

2.1.3. Tétel (Tóth [35, Eq. (4)]). *Legyen $r \geqslant 1$ egy rögzített egész. Akkor*

$$\sum_{n \leqslant x} \tau^{(e)}(n)^r = A_r x + x^{1/2} Q_{2^r-2}(\log x) + O(x^{u_r+\varepsilon})$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén, ahol

$$A_r := \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{\tau(a)^r - \tau(a-1)^r}{p^a}\right),$$

Q_{2^r-2} egy (2^r-2)-edfokú polinom és $u_r := \frac{2^{r+1}-1}{2^{r+2}+1}$.

A 2.1.1 Tétel más speciális függvényekre is alkalmazható. Legyen $a(n)$ az n-edrendű nemizomorf Abel-csoportok száma. Itt $a(n)$ multiplikatív és $a(p^\nu) = P(\nu)$ a partíciófüggvény, minden p^ν ($\nu \geqslant 1$) prímhatványra. Az $\sum_{n\leqslant x} a(n)$ összegre először Erdős és Szekeres (1934) vezettek le aszimptotikát. Zhang, Lü és Zhai [58] $\sum_{n\leqslant x} a(n)^2$ aszimptotikus becslését adták.

2.1.4. Következmény (Tóth [39, Th. 1]). *Legyen $r \geqslant 2$ egy rögzített egész. Tegyük fel, hogy $\Delta_r(x) := \Delta((1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{2^r-1}); x) \ll x^{\alpha_r}(\log x)^{\beta_r}$, ahol $1/3 < \alpha_r < 1/2$. Akkor*

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)^r = C_r x + x^{1/2} S_{2^r-2}(\log x) + R_r(x),$$

ahol

$$C_r := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{P(\nu)^r - P(\nu-1)^r}{p^\nu}\right),$$

S_{2^r-2} egy (2^r-2)-edfokú polinom és $R_r(x) \ll x^{\alpha_r}(\log x)^{\beta_r}$ (ugyanaz). Igaz az $R_r(x) \ll x^{u_r}$ becslés, ahol u_r a 2.1.3 Tételben adott.

2.1.5. Megjegyzés. Krätzel [19] egy eredménye szerint

$$\Delta_2(x) = \Delta((1, 2, 2, 2); x) \ll x^{45/127}(\log x)^5,$$

ahol $45/127 \doteq 0.354330 \in (1/3, 1/2)$. Így ugyanez a hibatag igaz $\sum_{n\leqslant x} a(n)^2$ esetén. Ez javítja az $R_2(x) \ll x^{96/245+\varepsilon}$ becslést, amit az [58] cikkben adtak.

2.1.6. Megjegyzés. Az én [35] cikkemre hivatkozva, Lelechenko [21, Th. 4] belátta, hogy a 2.1.2 Megjegyzésbeli $R_f(x) \ll x^{u_{k,\ell}+\varepsilon}$ maradék javítható. Mégpedig, $u_{k,\ell} = \frac{1}{\ell+1-\theta_{k-1}}$ vehető, ahol θ_t-re $\Delta_t(x) \ll x^{\theta_t+\varepsilon}$. Mivel $\theta_t(x) \leqslant \frac{t-1}{t+2}$ igaz $t \geqslant 4$ esetén, következik, hogy $u_{k,\ell} \leqslant \frac{k+1}{\ell(k+1)+3} \in (1/(\ell+1), 1/\ell)$, ha $k \geqslant 5$. Emiatt, ha $r \geqslant 3$, akkor a 2.1.3 Tétel és a 2.1.4 Következmény hibatagjai javíthatók az $u_r = \frac{2^r+1}{2^{r+1}+5}$ választással.

2.2. Multiplikatív függvények alternáló összegei

Bordellès és Cloitre [5]

$$\sum_{n\leqslant x} (-1)^{n-1} \frac{1}{f(n)} \tag{2.4}$$

alternáló összegekre vezettek le aszimptotikákat, ahol $f(n)$ bizonyos multiplikatív függvények, például $f(n) = \phi(n)$, $\sigma(n)$, $\psi(n)$.

Ha $f(n)$ multiplikatív, akkor $(-1)^{n-1}\frac{1}{f(n)}$ szintén multiplikatív. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{f(n)n^s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)n^s}\right)\left(2\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{f(2^\nu)2^{\nu s}}\right)^{-1}-1\right),$$

így alkalmazhatók az $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{f(n)}$ összegekre ismert eredmények, de jó hibatagok levezetése érdekében szükség van bizonyos reciprok hatványsorok együtthatóinak pontos becslésére.

A következő eredményeim javítják az [5] cikkbeli maradéktagokat, a módszerem más, és új eredményeket is bizonyítok. Tekintsük a következő Bell-hatványsort: $S_{1/f}(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, ahol $a_\nu = 1/f(2^\nu)$ ($\nu \geqslant 0$), $a_0 = 1$. Jelölje $\overline{S}_{1/f}(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ a reciprok haványsort, amelyre $b_0 = 1$ és $\sum_{j=0}^{\nu} a_j b_{\nu-j} = 0$ ($\nu \geqslant 1$).

2.2.1. Tétel (Tóth [48, Prop. 7]). *Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ egy multiplikatív függvény. Tegyük fel, hogy*

(i) léteznek olyan D_f és E_f konstansok, hogy

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{f(n)} = D_f(\log x + E_f) + O\left(x^{-1}R_{1/f}(x)\right), \tag{2.5}$$

ahol $1 \ll R_{1/f}(x) = o(x)$, ha $x \to \infty$, és $R_{1/f}(x)$ nemcsökkenő;

(ii) az $S_{1/f}(x)$ hatványsor konvergenciasugara $r_{1/f} > 1$;

(iii) a b_ν együtthatókra $b_\nu \ll M^\nu$, ha $\nu \to \infty$, ahol $0 < M < 1$ egy valós szám.

Akkor

$$\sum_{n\leqslant x}(-1)^{n-1}\frac{1}{f(n)} = D_f\left(\left(\frac{2}{S_{1/f}(1)}-1\right)(\log x + E_f) + 2(\log 2)\frac{S'_{1/f}(1)}{S_{1/f}(1)^2}\right) + O\left(T_{1/f}(x)\right), \tag{2.6}$$

ahol

$$T_{1/f}(x) = \begin{cases} x^{-1}R_{1/f}(x), & \text{ha } 0 < M < \frac{1}{2}; \\ x^{-1}R_{1/f}(x)\log x, & \text{ha } M = \frac{1}{2}; \\ x^{\log M/\log 2}\max(\log x, R_{1/f}(x)), & \text{ha } \frac{1}{2} < M < 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ha $f(n) = \phi(n)$ és $M = 1/2$, akkor az (1.5) formula „alternáló alakját” kapjuk:

2.2.2. Következmény (Tóth [48, Th. 17]).

$$\sum_{n\leqslant x}(-1)^{n-1}\frac{1}{\phi(n)} = -\frac{A}{3}\left(\log x + \gamma - B - \frac{8}{3}\log 2\right) + O\left(x^{-1}(\log x)^{5/3}\right), \tag{2.8}$$

ahol A és B értékeit (1.6) definiálja.

Ez javítja [5, Cor. 4, (i)] hibatagját, ami $O\left(x^{-1}(\log x)^3\right)$.

2.2.3. Következmény (Tóth [48, Th. 23]).

$$\sum_{n\leqslant x}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sigma(n)} = E\left(\left(\frac{2}{K}-1\right)(\log x+\gamma+F)+2(\log 2)\frac{K'}{K^2}\right) \tag{2.9}$$

$$+O\left(x^{-1}(\log x)^{5/3}(\log\log x)^{4/3}\right),$$

ahol a fellépő konstansok értékei az értekezésben explicit módon adottak.

A (2.9) maradéka jobb, mint $O\left(x^{-1}(\log x)^4\right)$, lásd [5, Cor. 4, (v)].

A következő formula Ramanujan (1915) egy ismert képletének alternáló megfelelője:

2.2.4. Tétel (Tóth [48, Th. 27]). *Minden rögzített $N\geqslant 1$ estén*

$$\sum_{n\leqslant x}(-1)^{n-1}\frac{1}{\tau(n)} = x\sum_{t=1}^{N}\frac{B_t}{(\log x)^{t-1/2}}+O\left(\frac{x}{(\log x)^{N+1/2}}\right), \tag{2.10}$$

ahol B_t $(1\leqslant t\leqslant N)$ explicit módon megadható konstansok,

$$B_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\log 2}-1\right)\prod_p\left(\sqrt{p^2-p}\,\log\left(\frac{p}{p-1}\right)\right).$$

A (2.9) és (2.10) becslések levezetésére szükség van Kaluza [17] egy régi, reciprok hatványsorokra vonatkozó eredményére. Más esetekben ez nem használható. A következő új, explicit Kendall-típusú egyenlőtlenséget igazoltam, amely alkalmazható más, általam vizsgált függvényekre is.

2.2.5. Állítás (Tóth [48, Prop. 12]). *Legyen $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ egy olyan komplex együtthatójú hatványsor, amelyre $a_0=1$ és $|a_\nu|\leqslant Aq^\nu$ $(\nu\geqslant 1)$ valamely $A,q>0$ konstansokra. Akkor a reciprok hatványsor b_ν együtthatóira*

$$|b_\nu|\leqslant Aq^\nu(A+1)^{\nu-1}\quad(\nu\geqslant 1).$$

Jelölje $\sigma^{**}(n)$ az n bi-unitér osztóinak számát (bi-unitary divisors). A $\sigma^{**}(n)$ függvény multiplikatív. A 2.2.5 Állítást használva igazoltam, hogy

2.2.6. Tétel (Tóth [48, Th. 50]).

$$\sum_{n\leqslant x}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sigma^{**}(n)} = A_1^{**}\log x+B_1^{**}+O(x^c(\log x)^{14/3}(\log\log x)^{4/3}),$$

ahol A_1^{**},B_1^{**} explicit konstansok és $c=(\log 9/10)/(\log 2)\doteq -0.152003$.

2.3. Maximális nagyságrendek

A továbbiakban egyszerűen alkalmazható tételeket mutatok be

$$L = L(f) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\log\log n}$$

meghatározására, ahol f bizonyos nemnegatív valós értékű multiplikatív függvények. Legyen

$$\varrho(p) = \varrho(f, p) := \sup_{\nu \geqslant 0} f(p^\nu)$$

a p prímekre, ahol $\varrho(p) \geqslant f(p^0) = 1$ és

$$R = R(f) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \varrho(p).$$

Az L alsó, illetve felső becsléseire vonatkoznak az alábbiak:

2.3.1. Tétel (Tóth és Wirsing [50, Th. 1]). *Tegyük fel, hogy $\varrho(p) < \infty$ minden p prímre és az R szorzat feltétel nélkül (azaz a sorrendtől függetlenül) konvergál, improprius határértékek megengedettek. Akkor*

$$L \leqslant e^\gamma R. \tag{2.11}$$

A következő tétel egy más feltételt használ.

2.3.2. Tétel (Tóth és Wirsing [50, Th. 2]). *Tegyük fel, hogy $\varrho(p) < \infty$ minden p-re, az R szorzat konvergál, improprius határértékek megengedettek, és*

$$\varrho(p) \leqslant 1 + o\left(\frac{\log p}{p}\right).$$

Akkor (2.11) *fennáll.*

Ahhoz, hogy $e^\gamma R$ az alsó becslés legyen, több információ szükséges. Mégpedig az kell, hogy a $\varrho(p)$ szuprémum jól approximálható legyen a p nem túl nagy hatványainál.

2.3.3. Tétel (Tóth és Wirsing [50, Th. 3]). *Tételezzük fel, hogy*

(i) $\varrho(p) < \infty$ minden p prímre,

(ii) minden p prímre létezik $e_p = p^{o(1)} \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\prod_p f(p^{e_p}) \varrho(p)^{-1} > 0,$$

(iii) az R szorzat konvergál, improprius határértékek megengedettek.

Akkor

$$L \geqslant e^\gamma R.$$

2.3.4. Következmény (Tóth és Wirsing [50, Cor. 1]). *Ha minden p prímre*

(i) $\varrho(p) \leqslant (1-1/p)^{-1}$, *és*

(ii) létezik olyan $e_p = p^{o(1)} \in \mathbb{N}$, *hogy* $f(p^{e_p}) \geqslant 1 + 1/p$, *akkor*

$$L = e^\gamma R,$$

azaz $f(n)$ *maximális nagyságrendje* $e^\gamma R \log\log n$.

A 2.3.4 Következmény alkalmazható például az $f(n) = \sigma(n), 1/\phi(n)$ függvényekre és Gronwall (1913), valamint Landau (1909) ismert eredményeit kapjuk. Legyen $f(n) = \sigma^{(e)}(n)$ az n exponenciális osztóinak összege. Akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma^{(e)}(n)}{n \log\log n} = \frac{6}{\pi^2} e^\gamma$$

adódik, ami Fabrykowski és Subbarao (1989) eredménye. Egy más alkalmazás a 2.5.4 Tétel. További alkalmazásokat adott Apostol (2013), Apostol és Petrescu (2013).

2.4. Exponenciális osztókkal definiált számelméleti függvények

Legyen $d = \prod_p p^{\nu_p(d)}$ az $n = \prod_p p^{\nu_p(n)}$ szám egy osztója. Azt mondjuk, hogy d egy *exponenciális osztó*, ha $\nu_p(d) \mid \nu_p(n)$ minden p prímre. Jelölés: $d \mid_e n$. Ezt a fogalmat Subbarao [28] vezette be. Jelölje $\tau^{(e)}(n)$ és $\sigma^{(e)}(n)$ az n exponenciális osztóinak a számát, illetve összegét, amelyek multiplikatív függvények. Ezeket és más hasonló módon definiált függvényeket sok szerző vizsgálta. Lásd például Cao és Zhai [7], Lelechenko [21, 22], Pétermann és Wu [25], Wu [56].

2.4.1. Exponenciális Euler-függvény

A $\phi^{(e)}(n)$ exponenciális Euler-függvény multiplikatív és $\phi^{(e)}(p^\nu) = \phi(\nu)$ minden p^ν ($\nu \geqslant 1$) prímhatványra. A 2.1.1 Tétel és a 2.1.2 Megjegyzés egy újabb alkalmazásaként kapjuk:

2.4.1. Tétel (Tóth [33, Th. 1], [35, Eq. (6)]). *Legyen* $r \geqslant 1$ *egy egész szám. Akkor*

$$\sum_{n\leqslant x} \phi^{(e)}(n)^r = B_r x + x^{1/3} T_{2^r-2}(\log x) + O(x^{t_r+\varepsilon}), \tag{2.12}$$

minden $\varepsilon > 0$ *esetén, ahol*

$$B_r := \prod_p \left(1 + \sum_{a=3}^\infty \frac{\phi(a)^r - \phi(a-1)^r}{p^a}\right),$$

T_{2^r-2} *egy* (2^r-2)*-edfokú polinom,* $t_1 = 1/5$ *és* $t_r := \frac{2^{r+1}-1}{3\cdot 2^{r+1}}$, *ha* $r \geqslant 2$.

Az $r = 1$ esetben Pétermann [24, Th. 1] $O(x^{1/5}\log x)$-re javította (2.12) hibatagját. Cao és Zhai [8] az (a,b,c,c) típusú négydimenziós osztóproblémára értek el új eredményeket és alkalmazásként tovább javították a maradékot. Az $r \geqslant 3$ esetben a maradékra a jobb $t_r = \frac{2^r+1}{3(2^r+2)}$ is igaz, amint azt Lelechenko [21] megmutatta. Lásd még a 2.1.6 Megjegyzést.

2.4.2. Exponenciális Möbius-függvény

A $\mu^{(e)}(n)$ exponenciális Möbius-függvény multiplikatív és $\mu^{(e)}(p^\nu) = \mu(\nu)$ minden p^ν ($\nu \geqslant 1$) prímhatványra. A következő eredményem Wu [56, Th. 2] maradéktagját javítja, ha a Riemann-sejtés (RH) igaz.

2.4.2. Tétel (Tóth [34, Th. 3]). *Ha RH igaz, akkor*

$$\sum_{n\leqslant x} |\mu^{(e)}(n)| = C_1 x + O(x^{1/5+\varepsilon}).$$

Itt $C_1 = \prod_p \left(1 + \sum_{a=4}^{\infty} \frac{\mu^2(a)-\mu^2(a-1)}{p^a}\right)$ az exponenciálisan négyzetmentes számok (minden $\nu_p(n) \geqslant 1$ kitevő négyzetmentes) aszimptotikus sűrűsége. Később, Cao és Zhai [7, Th. 1, 2] igazolták, hogy RH esetén $\sum_{n\leqslant x} |\mu^{(e)}(n)| = C_1 x + C_2 x^{1/5} + O(x^{38/193+\varepsilon})$ és hogy ez utóbbi maradék $\Omega(x^{1/8})$.

2.4.3. Tétel (Tóth [34, Th. 2]).

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^{(e)}(n) = Kx + O(x^{1/2}\exp(-c(\log x)^{9/25-\delta}), \tag{2.13}$$

minden $\delta > 0$ esetén, ahol $c > 0$ egy konstans és

$$K = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{\mu(a)-\mu(a-1)}{p^a}\right).$$

Ha RH igaz, akkor a maradék $O(x^{(2-r)/(5-4r)+\varepsilon})$, ahol $1/4 < r < 1/3$ a négyzetmentes számokra vonatkozó hibatagban szereplő kitevő.

Itt r legjobb ismert értéke $r = 17/54 \doteq 0.314814$ (Jia, 1993), így RH mellett (2.13) maradéka $O(x^{91/202+\varepsilon})$, ahol $91/202 \doteq 0.450495$. A Perron-képletet használva Cao és Zhai [7, Th. 1, 2] ezt $O(x^{37/94+\varepsilon})$-ra javították és igazolták, hogy a hiba $\Omega(x^{1/4})$.

2.4.3. A $t^{(e)}(n)$ függvény

A [34] dolgozatomban bevezettem és vizsgáltam a $t^{(e)}(n)$ függvényt, ahol az $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ jelöléssel
$$t^{(e)}(n) = 2^{\omega(a_1)}\cdots 2^{\omega(a_r)}.$$

2.4.4. Tétel (Tóth [34, Th. 4]).
$$\sum_{n\leqslant x} t^{(e)}(n) = C_1 x + C_2 x^{1/2} + O(x^{1/4+\varepsilon}), \tag{2.14}$$
ahol C_1, C_2 explicit módon adott konstansok.

Pétermann [24, Th. 1] a (2.14) maradékát $O(x^{1/4})$-re javította. Cao és Zhai [7, Th. 1, 2] RH mellett megmutatták, hogy ez $O(x^{3728/15469+\varepsilon})$ és $\Omega(x^{1/6})$.

2.5. Lnko-összegfüggvények

2.5.1. Lnko-összegfüggvény

Az lnko-összegfüggvény (gcd-sum function, Pillai's function) így definiált:
$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k,n).$$

Itt $P(n)$ multiplikatív és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $(1,n),\ldots,(n,n)$ értékek számtani közepe
$$A(n) := \frac{P(n)}{n} = \sum_{d\mid n} \frac{\phi(d)}{d} = \tau(n) \prod_{p^\nu \mid\mid n} \left(1 - \frac{\nu/(\nu+1)}{p}\right), \tag{2.15}$$
ami „közel van" $\tau(n)$-hez.

A $P(n)$ függvény tulajdonságait sok szerző vizsgálta, lásd az én [37] survey cikkemet. A következő eredményem az $A(n)$ függvény négyzetes momentumára vonatkozik. Legyen α_4 a $\tau_4(n)$ Piltz osztóproblémában fellépő kitevő. Ismert, hogy $\alpha_4 \leqslant 1/2$ (Hardy és Littlewood) és az a sejtés, hogy $\alpha_4 = 3/8$.

2.5.1. Tétel (Tóth [37, Th. 1]). *i) Minden $\varepsilon > 0$-ra*
$$\sum_{n\leqslant x} A(n)^2 = x(C_1 \log^3 x + C_2 \log^2 x + C_3 \log x + C_4) + O(x^{1/2+\varepsilon}), \tag{2.16}$$
ahol
$$C_1 = \frac{1}{\pi^2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^3} - \frac{4}{p(p+1)}\right),$$

és C_2, C_3, C_4 explicit konstansok.

ii) Tegyük fel, hogy $\alpha_4 < 1/2$. Akkor (2.16) *hibatagja $O(x^{1/2}\delta(x))$, ahol $\delta(x)$-et* (1.3) *definiálja.*

iii) Ha RH igaz, akkor (2.16) *hibatagja $O(x^{(2-\alpha_4)/(5-4\alpha_4)}\lambda(x))$, ahol*

$$\lambda(x) := \exp((\log x)^{1/2}(\log\log x)^{14}).$$

2.5.2. Megjegyzés. Legyen $M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)$ a Mertens-függvény. Az előbbi maradéktag az $M(x) \ll \sqrt{x}\,\lambda(x)$ becslés következménye, ami az eddigi legjobb, és Soundararajan (2009) eredménye. Analitikus módszerrel Zhang és Zhai [60, Th. 1] általánosították a (2.16) képletet $\sum_{n\leqslant x} A(n)^k$ esetére, ahol $k \geqslant 2$ egész szám, de a $k = 2$-re vonatkozó maradéktagot nem javították.

2.5.2. Exponenciális lnko-összegfüggvény

A [33] cikkemben bevezettem a

$$P^{(e)}(n) = \sum_{\substack{j=1 \\ \kappa(j)=\kappa(n)}}^{n} (j,n)_{(e)},$$

függvényt, ahol $(j,n)_{(e)}$ a j és n legnagyobb közös exponenciális osztója. Ez a Pillai-függvény exponenciális megfelelője. A $P^{(e)}(n)$ függvény multiplikatív és minden p^ν ($\nu \geqslant 1$) prímhatványra

$$P^{(e)}(p^\nu) = \sum_{t=1}^{\nu} p^{(t,\nu)} = \sum_{d\mid\nu} p^d \phi(\nu/d).$$

2.5.3. Tétel (Tóth [33, Th. 3]).

$$\sum_{n\leqslant x} P^{(e)}(n) = C_4 x^2 + O(x(\log x)^{5/3}), \tag{2.17}$$

ahol C_4 egy explicit konstans.

2.5.4. Tétel (Tóth [33, Th. 4]).

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{P^{(e)}(n)}{n\log\log n} = \frac{6}{\pi^2}e^\gamma. \tag{2.18}$$

Itt (2.18) egyszerű következménye, hogy (2.17)-ben a maradék $\Omega(x\log\log x)$. Pétermann [24, Th. 2] igazolta, hogy ez a maradék $\Omega_\pm(x\log\log x)$.

2.5.3. A (mod n) reguláris egészekkel definiált lnko-összegfüggvény

Azt mondjuk, hogy a $k \in \mathbb{Z}$ szám reguláris (mod n), ha létezik olyan $x \in \mathbb{Z}$ szám, hogy $k^2x \equiv k$ (mod n), azaz $\widehat{k}$ a $\mathbb{Z}_n$ maradékosztálygyűrű egy Neumann-reguláris eleme. Legyen $\operatorname{Reg}_n = \{k : 1 \leqslant k \leqslant n,\ k \text{ reguláris (mod } n)\}$.

A [36] dolgozatomban bevezettem a

$$\widetilde{P}(n) := \sum_{k \in \operatorname{Reg}_n} (k, n)$$

függvényt, amely multiplikatív és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\widetilde{P}(n) = n \prod_{p|n} \left(2 - \frac{1}{p}\right) = 2^{\omega(n)} n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{2p}\right). \tag{2.19}$$

2.5.5. Tétel (Tóth [36, Th. 2]).

$$\sum_{n \leqslant x} \widetilde{P}(n) = \frac{x^2}{2\zeta(2)}(K_1 \log x + K_2) + O(x^{3/2}\delta(x)), \tag{2.20}$$

ahol K_1 és K_2 explicit konstansok és $\delta(x)$-et (1.3) definiálja.

Ha RH igaz, akkor (2.20) hibatagja $O(x^{(7-5\theta)/(5-4\theta)}\eta(x))$, ahol θ a Dirichlet osztóprobléma kitevője és $\eta(x) := \exp\left(B(\log x)(\log\log x)^{-1}\right)$ ($B > 0$ egy konstans).

2.5.6. Tétel (Tóth [36, Th. 1]). *A $\widetilde{P}(n)$ minimális nagyságrendje $3n/2$, $\log(\widetilde{P}(n)/n)$ maximális nagyságrendje pedig $\log 2 \log n / \log\log n$.*

Zhang és Zhai [59] rámutattak arra, hogy (2.20) hibatagja szoros kapcsolatban van a négyzetmentes osztóproblémával. Használva Baker [2] eredményét (lásd Bevezetés) igazolták, hogy RH mellett a hiba $O(x^{15/11+\varepsilon})$.

2.6. Ramanujan-összegek súlyozott átlagai

Alkan [1] a $c_k(j)$ Ramanujan-összegek

$$S_r(k) := \frac{1}{k^{r+1}} \sum_{j=1}^{k} j^r c_k(j) \quad (r \in \mathbb{N}) \tag{2.21}$$

súlyozott átlagait vizsgálta és igazolta, hogy minden $k, r \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_r(k) = \frac{\phi(k)}{2k} + \frac{1}{r+1} \sum_{m=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{r+1}{2m} B_{2m} \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^{2m}}\right), \tag{2.22}$$

ami az

$$\sum_{k\leqslant x} S_r(k) = \left(\frac{3}{\pi^2} + \frac{1}{r+1}\sum_{m=1}^{\lfloor r/2\rfloor}\binom{r+1}{2m}\frac{B_{2m}}{\zeta(2m+1)}\right)x + O(\log x)$$

aszimptotikához vezet, ahol B_m ($m \geqslant 0$) a Bernoulli-számok.

A [43] cikkemben (2.22) egy egyszerűbb bizonyítását adtam és igazoltam a következő új azonosságokat:

2.6.1. Állítás (Tóth [43, Prop. 2, 4, 5]). *Minden $k \in \mathbb{N}$-re*

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\log j)c_k(j) = \Lambda(k) + \sum_{d\mid k}\frac{\mu(d)}{d}\log(d!), \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{\phi(k)}\sum_{j=1}^{k}(\log\Gamma(j/k))c_k(j) = \frac{1}{2}\sum_{p\mid k}\frac{\log p}{p-1} - \frac{\log 2\pi}{2} \quad (k \geqslant 2), \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}c_k(j) = \sum_{d\mid k}\mu(k/d)\sum_{\ell=1}^{d}(-1)^{\ell k/d}\cos^k(\ell\pi/d) \tag{2.25}$$

ahol Λ *a von Mangoldt-függvény,* Γ *pedig a Gamma-függvény.*

2.7. Többismeretlenes kvadratikus kongruenciák megoldásszáma

Legyen $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ és jelölje $N_k(n,r)$ az $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \equiv n \pmod r$ kvadratikus kongruencia inkongruens megoldásainak számát. Az $r \mapsto N_k(n,r)$ függvény multiplikatív. Jólismert, hogy ha $r = p^s$ egy prímhatvány, akkor $N_k(n,p^s)$ megadható a Gauss- és Jacobi-összegekkel. Kevésbé ismert az, hogy ha k páros és r páratlan, akkor $N_k(n,r)$ kifejezhető a $c_q(n)$ Ramanujan-összegekkel. Továbbá, ha k páratlan, r páratlan és $(n,r) = 1$, akkor $N_k(n,r)$ felírható a Möbius-függvény és a Jacobi-szimbólum segítségével.

A [45] dolgozatomban rövid, közvetlen bizonyítását adtam ezeknek az azonosságoknak és igazoltam a következő aszimptotikus képleteket, amelyek tudomásom szerint nem szerepelnek az irodalomban.

2.7.1. Tétel (Tóth [45, Prop. 28]).

$$\sum_{r\leqslant x} N_1(0,r) = \frac{3}{\pi^2}x\log x + cx + O(x^{2/3}),$$

ahol $c = \frac{3}{\pi^2}\left(3\gamma - 1 - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)$.

2.7.2. Tétel (Tóth [45, Prop. 30]).

$$\sum_{r \leqslant x} N_1(1,r) = \frac{6}{\pi^2} x \log x + c_1 x + O(x^{1/2}\delta(x)),$$

ahol $c_1 = \frac{6}{\pi^2}\left(2\gamma - 1 - \frac{\log 2}{2} - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)$ *és* $\delta(x)$*-et* (1.3) *definiálja. Ha RH igaz, akkor a maradék* $O(x^{4/11+\varepsilon})$*.*

2.7.3. Tétel (Tóth [45, Prop. 34]).

$$\sum_{r \leqslant x} N_2(0,r) = \frac{\pi}{8G} x^2 + O(x^{547/416}(\log x)^{26947/8320})$$

ahol G *a Catalan-állandó.*[1]

Itt az $N_1(0,r)$-re vonatkozó aszimptotika az (1.1) Dirichlet-képlet megfelelője, $\sum_{n \leqslant x} N_1(1,r)$ a négyzetmentes osztóproblémával kapcsolatos, míg $\sum_{n \leqslant x} N_2(0,r)$ a Gauss-féle körprobléma analógja.

2.8. Véges Abel-csoportok részcsoportjainak száma

A véges Abel-csoportok részcsoportjai számának vizsgálata visszavezethető a p-csoportokra. A részcsoportok számára különböző formulákat adtak Delsarte (1948), Yeh (1948), Shokuev (1972), Bhowmik (1996) és mások. Lásd Butler [6] monográfiáját. Ugyanakkor, igen körülményes alkalmazni ezeket a képleteket még a kevés generálóelemmel rendelkező p-csoportok esetén is, és nehéz meghatározni a megfelelő Hall-polinomok együtthatóit. Egyszerűbb a helyzet a kommutatív p-csoportok ciklikus részcsoportjai számára nézve.

Abel-féle p-csoportok helyett én a $G := \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ csoportokat vizsgáltam, ahol $n_1, \ldots, n_k$ tetszőleges pozitív egészek. Jelölje $s(n_1, \ldots, n_k)$ és $c(n_1, \ldots, n_k)$ a G összes részcsoportjának, illetve a ciklikus részcsoportjainak a számát. Ezek k-változós multiplikatív függvények.

2.8.1. Tétel (Tóth [40, Th. 1]). *Ha* $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$*, akkor*

$$c(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{d_1 \mid n_1, \ldots, d_k \mid n_k} \frac{\phi(d_1) \cdots \phi(d_k)}{\phi([d_1, \ldots, d_k])}. \tag{2.26}$$

Az $s(n_1, \ldots, n_k)$ függvényre nem adható ilyen egyszerű képlet és nehéznek tűnik ezen függvények aszimptotikus tulajdonságainak a vizsgálata tetszőleges k esetén. A $k = 2$ és $k = 3$ speciális esetekkel foglalkozom a következő szakaszokban. Az $\sum_{m,n \leqslant x} s(m,n)$ összegre vonatkozó aszimptotika a 3.4 Szakaszban szerepel.

---

[1] Jobb maradéktag a $O(x^{2165/1648})$, ami következik Bourgain és Watt [4] eredményéből. Lásd a Bevezetést.

2.8.1. A $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ csoportok

A [44] cikkemben a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ csoportok részcsoportjainak a következő reprezentációját adtam. A bizonyítás a Goursat-lemmát használja. Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$J_{m,n} := \left\{(a,b,c,d,\ell) \in \mathbb{N}^5 : a \mid m, b \mid a, c \mid n, d \mid c, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \ell \leqslant \frac{a}{b}, \gcd\left(\ell, \frac{a}{b}\right) = 1\right\}. \tag{2.27}$$

Ha $(a,b,c,d,\ell) \in J_{m,n}$, akkor legyen

$$K_{a,b,c,d,\ell} := \left\{\left(i\frac{m}{a}, i\ell\frac{n}{c} + j\frac{n}{d}\right) : 0 \leqslant i \leqslant a-1, 0 \leqslant j \leqslant d-1\right\}. \tag{2.28}$$

2.8.2. Tétel (Tóth [44, Th. 3.1]). *i) Az $(a,b,c,d,\ell) \mapsto K_{a,b,c,d,\ell}$ megfeleltetés egy bijekció a $J_{m,n}$ halmaz és $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ részcsoportjai halmaza között.*

ii) $K_{a,b,c,d,\ell} \simeq \mathbb{Z}_{(b,d)} \times \mathbb{Z}_{[a,c]}$, ahol $(b,d) \mid [a,c]$.

iii) A $K_{a,b,c,d,\ell}$ részcsoport rendje ad és exponense $[a,c]$.

iv) A $K_{a,b,c,d,\ell}$ részcsoport akkor és csak akkor ciklikus, ha $(b,d) = 1$.

2.8.3. Tétel (Tóth [44, Th. 4.1]). *Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ részcsoportjainak a száma*

$$s(m,n) = \sum_{i \mid m, j \mid n} (i,j) = \sum_{t \mid (m,n)} \phi(t)\tau\left(\frac{m}{t}\right)\tau\left(\frac{n}{t}\right). \tag{2.29}$$

A [31, Prop. 3.2] dolgozatban igazoltuk, hogy $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ részcsoportjai exponenseinek az összege $\sigma(m)\sigma(n)$. Tekintsük az $m = n$ esetet. Jelölje $AE(n)$ a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ részcsoportjai exponenseinek a számtani közepét.

2.8.4. Tétel (Tărnăuceanu és Tóth [31, Prop. 3.3]).

$$\sum_{n \leqslant x} AE(n) = \frac{C}{2}x^2 + O\left(x \log^3 x\right), \tag{2.30}$$

ahol

$$C := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(p^{\nu+1}-1)^2}{p^{2\nu}(p^{\nu+2} + p^{\nu+1} - (2\nu+3)p + 2\nu + 1)}.$$

2.8.2. A $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_r$ csoportok

2.8.5. Tétel (Hampejs és Tóth [13, Th. 2.1]). *Ha $m, n, r \in \mathbb{N}$, akkor a $\Gamma := \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_r$ részcsoportjai így reprezentálhatók:*

(i) Legyenek $a, b, c \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a \mid m, b \mid n, c \mid r$.

(ii) Legyen $A := \gcd(a, n/b)$, $B := \gcd(b, r/c)$, $C := \gcd(a, r/c)$.

(iii) Tekintsük

$$X := \frac{ABC}{\gcd(a(r/c), ABC)}.$$

(iv) Legyen $s := at/A$, ahol $0 \leqslant t \leqslant A-1$.

(v) Legyen

$$v := \frac{bX}{B\gcd(t,X)}w, \text{ ahol } 0 \leqslant w \leqslant B\gcd(t,X)/X - 1.$$

(vi) Határozzuk meg az $(r/c)u \equiv rvs/(bc) \pmod a$ lineáris kongruencia egy u_0 megoldását.

(vii) Legyen $u := u_0 + az/C$, ahol $0 \leqslant z \leqslant C-1$.

(viii) Tekintsük:

$$U_{a,b,c,t,w,z} := \langle (a,0,0), (s,b,0), (u,v,c) \rangle$$
$$= \{(ia + js + ku, jb + kv, kc) : 0 \leqslant i \leqslant n/a - 1, 0 \leqslant j \leqslant n/b - 1, 0 \leqslant k \leqslant n/c - 1\}.$$

Akkor $U_{a,b,c,t,w,z}$ egy $mnr/(abc)$-rendű részcsoportja Γ-nak. Mi több, bijektív megfeleltetés van az (i)-(viii) feltételekkel meghatározott (a,b,c,t,w,z) vektorok és Γ részcsoportjai között.

Következményként adódik:

2.8.6. Tétel (Hampejs és Tóth [13, Th. 2.2]). *Ha $m,n,r \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_r$ részcsoportjainak a száma*

$$s(m,n,r) = \sum_{a|m,\, b|n,\, c|r} \frac{ABC}{X^2} P(X), \tag{2.31}$$

a 2.8.5 Tétel jelölései szerint, ahol $P(n)$ az lnko-összegfüggvény.

Megjegyzem, hogy a [31, Cor. 2.2] cikkben igazoltuk, hogy a $\mathbb{Z}_{p^{\lambda_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\lambda_2}} \times \mathbb{Z}_{p^{\lambda_3}}$ ($\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant 1$) p-csoport részcsoportjainak a száma $\frac{F(p)}{(p^2-1)^2(p-1)}$, ahol

$$\begin{aligned}F(p) =& (\lambda_3+1)(\lambda_1-\lambda_2+1)p^{\lambda_2+\lambda_3+5} + 2(\lambda_3+1)p^{\lambda_2+\lambda_3+4} - 2(\lambda_3+1)(\lambda_1-\lambda_2)p^{\lambda_2+\lambda_3+3} \\ &- 2(\lambda_3+1)p^{\lambda_2+\lambda_3+2} + (\lambda_3+1)(\lambda_1-\lambda_2-1)p^{\lambda_2+\lambda_3+1} - (\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+3)p^{2\lambda_3+4} \\ &- 2p^{2\lambda_3+3} + (\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-1)p^{2\lambda_3+2} + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+5)p^2 + 2p - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1).\end{aligned}$$

A fejezet utolsó eredménye a $\mathbb{Z}_n^3$ csoport részcsoportjai számára vonatkozik, jelölés: $s(n) := s(n,n,n)$.

2.8.7. Tétel (Hampejs és Tóth [13, Th. 2.3]).

$$\sum_{n \leqslant x} s(n) = \frac{x^3}{3}\left(A(\log x + 2\gamma - 1) + B\right) + O(x^{2+\theta+\varepsilon}), \tag{2.32}$$

ahol A, B explicit konstansok és θ az (1.1) Dirichlet-féle osztóprobléma kitevője.

3. fejezet

Többváltozós multiplikatív függvényekre vonatkozó eredmények

3.1. k-anként relatív prím komponensű szám r-esek

Ismert, hogy a relatív prím komponensű szám r-esek ($r \geqslant 2$) aszimptotikus sűrűsége $1/\zeta(r)$. Jelölje $\varrho_{r,2}(n_1, \ldots, n_r)$ azon $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ szám r-esek karakterisztikus függvényét, amelyekre $n_1, \ldots, n_r$ páronként relatív prímek.

A [32] cikkemben induktív módszerrel igazoltam, hogy

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \varrho_{r,2}(n_1, \ldots, n_r) = d_{r,2}x^r + O\left(x^{r-1}(\log x)^{r-1}\right), \tag{3.1}$$

ahol $d_{r,2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{r-1} \left(1 + \frac{r-1}{p}\right)$ a megfelelő sűrűség.

Általánosabban, legyen $\varrho_{r,k}(n_1, \ldots, n_r)$ a k-anként relatív prím komponensű szám r-esek karakterisztikus függvénye, ahol $r \geqslant k \geqslant 2$ adott egészek. A (3.1) formulámat általánosítva és a módszeremet használva Hu [15] igazolta, hogy

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \varrho_{r,k}(n_1, \ldots, n_r) = d_{r,k}x^r + O\left(x^{r-1}(\log x)^{\delta_{r,k}}\right), \tag{3.2}$$

ahol $d_{r,k}$ a megfelelő aszimptotikus sűrűség (explicit módon adott) és

$$\delta_{r,k} = \max\left\{\binom{r-1}{j} : 1 \leqslant j \leqslant k-1\right\}.$$

Más szerzők, például de Reyna és Heyman (2015), J. L. Fernández és P. Fernández (2015) is foglalkoztak hasonló kérdésekkel.

A [47] dolgozatomban abból indultam ki, hogy a $\varrho_{r,k}(n_1,\ldots,n_r)$ függvény multiplikatív és Dirichlet-sorára explicit képlet adható. A többváltozós konvolúció-módszerrel, ami a legtermészetesebbnek tűnik a kérdés vizsgálatára, javítottam (3.2) hibatagját. Jelölje $e_j(x_1,\ldots,x_r)$ a j-edfokú elemi szimmetrikus polinomokat.

3.1.1. Tétel (Tóth [47, Th. 2.1]). *Legyenek $r \geqslant k \geqslant 2$ és $s_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Ha $\Re s_i > 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty} \frac{\varrho_{r,k}(n_1,\ldots,n_r)}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}} = \zeta(s_1)\cdots\zeta(s_r) D_{r,k}(s_1,\ldots,s_r),$$

ahol

$$D_{r,k}(s_1,\ldots,s_r) = \prod_p \left(1 - \sum_{j=k}^{r} (-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} e_j(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_r})\right)$$

abszolút konvergens, ha $\Re(s_{i_1}+\cdots+s_{i_j}) > 1$ minden $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant r$ esetén $(k \leqslant j \leqslant r)$.

3.1.2. Tétel (Tóth [47, Th. 2.2]). *Ha $r \geqslant k \geqslant 2$, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \varrho_{r,k}(n_1,\ldots,n_r) = A_{r,k} x^r + O\left(R_{r,k}(x)\right),$$

ahol

$$A_{r,k} = \prod_p \left(1 - \sum_{j=k}^{r} (-1)^{j-k} \binom{r}{j} \binom{j-1}{k-1} \frac{1}{p^j}\right) \tag{3.3}$$

és

$$R_{r,k}(x) = \begin{cases} x^{r-1}, & \text{ha} \quad r \geqslant k \geqslant 3, \\ x^{r-1}(\log x)^{r-1}, & \text{ha} \quad r \geqslant k = 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2. k pozitív egész legkisebb közös többszörösének átlagértéke

Ismert, hogy ha $r \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sum_{m,n \leqslant x} [m,n]^r = \frac{\zeta(r+2)}{\zeta(2)} \cdot \frac{x^{2(r+1)}}{(r+1)^2} + O(x^{2r+1}(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3}),$$

ami az (1.4) Walfisz-formula következménye. J. L. Fernández és P. Fernández [12, Th. 3(b)] igazolták, hogy $r \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{m,n,q \leqslant x} [m,n,q]^r \sim c_r \frac{x^{3(r+1)}}{(r+1)^3} \quad (x \to \infty),$$

ahol c_r egy alkalmas konstans. A bizonyításuk az $[m,n,q](m,n)(m,q)(n,q) = mnq(m,n,q)$ $(m,n,q \in \mathbb{N})$ azonosságon alapszik.

A következő eredmények $\sum_{n_1,\ldots,n_k \leqslant x} f([n_1,\ldots,n_k])$ összegek becslésére vonatkoznak, ahol $k \geqslant 3$ és f bizonyos feltételeknek megfelelő függvény.

Legyen $r \in \mathbb{R}$ és jelölje $\mathcal{A}_r$ azoknak az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikatív függvényeknek az osztályát, amelyekre léteznek olyan C_1, C_2 valós konstansok, hogy

$$|f(p) - p^r| \leqslant C_1 p^{r-1/2} \quad \text{minden } p \text{ prímre,} \tag{i}$$

és

$$|f(p^\nu)| \leqslant C_2 p^{\nu r} \quad \text{minden } p^\nu \text{ prímhatványra, ahol } \nu \geqslant 2. \tag{ii}$$

Például, a következő függvények $\mathcal{A}_r$-beliek: $f(n) = n^r, \sigma(n)^r, \phi(n)^r, \sigma^{(e)}(n)^r$ $(r \in \mathbb{R})$, $f(n) = \sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ $(r \in \mathbb{R},\ r \geqslant 1/2)$. Ha f korlátos és $f(p) = 1$ minden p prímre, akkor $f \in \mathcal{A}_0$.

3.2.1. Tétel (Hilberdink és Tóth [14, Th. 2.1]). *Legyen $k \geqslant 2$ és $f \in \mathcal{A}_r$, ahol $r > -1$ valós szám. Akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k \leqslant x} f([n_1,\ldots,n_k]) = C_{f,k} \frac{x^{k(r+1)}}{(r+1)^k} + O\left(x^{k(r+1) - \frac{1}{2}\min(r+1,1)+\varepsilon}\right), \tag{3.5}$$

és

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k \leqslant x} \frac{f([n_1,\ldots,n_k])}{(n_1\cdots n_k)^r} = C_{f,k} x^k + O\left(x^{k - \frac{1}{2}\min(r+1,1)+\varepsilon}\right), \tag{3.6}$$

ahol

$$C_{f,k} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_k=0}^{\infty} \frac{f(p^{\max(\nu_1,\ldots,\nu_k)})}{p^{(r+1)(\nu_1+\cdots+\nu_k)}}.$$

Itt (3.5) szerint $f([n_1,\ldots,n_k])$ átlagértéke $C_{f,k}(n_1\cdots n_k)^r$, abban az értelemben, hogy

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k \leqslant x} f([n_1,\ldots,n_k]) \sim \sum_{n_1,\ldots,n_k \leqslant x} C_{f,k}(n_1\cdots n_k)^r \quad (x \to \infty).$$

Továbbá (3.6)-ból következik, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} \sum_{n_1,\ldots,n_k \leqslant x} \frac{f([n_1,\ldots,n_k])}{(n_1\cdots n_k)^r} = C_{f,k},$$

ami az $f([n_1,\ldots,n_k])/(n_1\cdots n_k)^r$ függvény középértéke.

3.2.2. Tétel (Hilberdink és Tóth [14, Th. 2.2]). *Ha $k \geqslant 2$ és $f \in \mathcal{A}_r$, ahol $r \geqslant 0$ valós, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k\leqslant x} f\left(\frac{[n_1,\ldots,n_k]}{(n_1,\ldots,n_k)}\right) = D_{f,k}\frac{x^{k(r+1)}}{(r+1)^k} + O\left(x^{k(r+1)-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{3.7}$$

ahol

$$D_{f,k} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^k \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_k=0}^{\infty} \frac{f(p^{\max(\nu_1,\ldots,\nu_k)-\min(\nu_1,\ldots,\nu_k)})}{p^{(r+1)(\nu_1+\cdots+\nu_k)}}.$$

3.3. Osztófüggvények többváltozós átlagai

Tekintsük a $\tau(1,k;n) = \sum_{ab^k=n} 1$ függvényt, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ha $k \geqslant 2$, akkor

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(1,k;n) = \zeta(k)x + \zeta(1/k)x^{1/k} + O(x^{\theta_k+\varepsilon}), \tag{3.8}$$

ahol $1/(2(k+1)) \leqslant \theta_k \leqslant 1/(k+2)$, ami javítható. Lásd Krätzel [18, Ch. 5]. Itt $\theta_2 \leqslant \frac{1057}{4785} \doteq 0.220898$, ami Graham és Kolesnik (1988) eredménye.

Lelechenko [20] egy kétdimenziós Perron-formulát használva igazolta, hogy

$$\sum_{m,n\leqslant x} \tau(1,2;mn) = A_2x^2 + B_2x^{3/2} + O(x^{10/7+\varepsilon}), \tag{3.9}$$

ahol A_2, B_2 konstansok és $10/7 \doteq 1.428571$. Megjegyezte, hogy $k \geqslant 3$-ra a módszere nem adja ki a várt

$$\sum_{m,n\leqslant x} \tau(1,k;mn) = A_kx^2 + B_kx^{1+1/k} + O(x^{\alpha_k+\varepsilon}), \tag{3.10}$$

képletet, mert a kapott hiba nagyobb, mint $x^{4/3}$, még RH mellett is, és elnyeli az $x^{1+1/k}$ tagot.

Ebben a szakaszban javítjuk (3.9) hibatagját és levezetjük a (3.10) képletet. Általánosabban, aszimptotikus képleteket vezetünk le az $\sum_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} \tau(1,k;n_1\cdots n_r)$ és $\sum_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} \tau(1,k;[n_1,\ldots,n_r])$ összegekre, ahol $k \geqslant 1$ és $r \geqslant 2$ fix egészek. Továbbá, hasonló képleteket adunk a $\tau^{(e)}(n)$ és $\tau^{(2)}(n) = 2^{\omega(n)}$ függvényekre. Megjegyzendő, hogy a 3.2.1 Tétel itt nem alkalmazható.

3.3.1. Tétel (Tóth és Zhai [51, Th. 3.1]). *Ha $k, r \geqslant 2$, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} \tau(1,k;n_1\cdots n_r) = A_{r,k}x^r + B_{r,k}x^{r-1+1/k} + O(x^{r-1+\theta_k+\varepsilon}), \tag{3.11}$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} \tau(1,k;[n_1,\ldots,n_r]) = C_{r,k}x^r + D_{r,k}x^{r-1+1/k} + O(x^{r-1+\theta_k+\varepsilon}), \tag{3.12}$$

minden $\varepsilon > 0$-ra, ahol θ_k a (3.8) képletbeli kitevő és $A_{r,k}$, $B_{r,k}$, $C_{r,k}$, $D_{r,k}$ explicit módon megadható konstansok.

3.3.2. Tétel (Tóth és Zhai [51, Th. 3.2]). *Ha $r \geqslant 2$, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \tau^{(e)}(n_1 \cdots n_r) = K_r x^r + L_r x^{r-1/2} + O(x^{r-1+\theta_2+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \tau^{(e)}([n_1, \ldots, n_r]) = K'_r x^r + L'_r x^{r-1/2} + O(x^{r-1+\theta_2+\varepsilon}),$$

minden $\varepsilon > 0$-ra, ahol θ_2 a (3.8) képletbeli kitevő és K_r, L_r, K'_r, L'_r explicit konstansok.

A τ és $\tau^{(2)}$ függvényekre vonatkozó többváltozós formulák a következő általános konvolúciós tétel következményei.

3.3.3. Tétel (Tóth és Zhai [51, Th. 3.3]). *Legyen $r \geqslant 2$ és legyenek $h : \mathbb{N}^r \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{N}^r \to \mathbb{C}$, $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ olyan függvények, hogy*

$$h(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{d_1 m_1 = n_1, \ldots, d_r m_r = n_r} g(d_1, \ldots, d_r) f_1(m_1) \cdots f_r(m_r)$$

minden $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy

(i) léteznek $0 < b_j < a_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ konstansok, hogy

$$F_j(x) := \sum_{n \leqslant x} f_j(n) = x^{a_j} P_j(\log x) + O(x^{b_j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant r),$$

ahol $P_j(u)$ polinomok u-ban, amelyek foka δ_j és főegyütthatójuk K_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$,

(ii) a

$$G(s_1, \ldots, s_r) := \sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty} \frac{g(n_1, \ldots, n_r)}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}$$

Dirichlet-sorok abszolút konvergensek, ha $(s_1, \ldots, s_r) = (a_1 - \varepsilon, \ldots, a_{j-1} - \varepsilon, b_j - \varepsilon, a_{j+1} - \varepsilon, \ldots, a_r - \varepsilon)$, ahol $\varepsilon > 0$ elegendően kicsi és $1 \leqslant j \leqslant r$.

Akkor

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} h(n_1, \ldots, n_r) = x^{a_1+\cdots+a_r} Q(\log x) + O(x^{a_1+\cdots+a_r-\Delta} (\log x)^{\delta_1+\cdots+\delta_r}),$$

ahol $Q(u)$ egy polinom u-ban, amelynek foka $\delta_1+\cdots+\delta_r$, főegyütthatója $K_1 \cdots K_r G(a_1, \ldots, a_r)$ és $\Delta = \min_{1 \leqslant j \leqslant r}(a_j - b_j)$.

3.3.4. Tétel (Tóth és Zhai [51, Th. 3.4]). *Ha $r \geqslant 2$, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \tau(n_1 \cdots n_r) = x^r P_r(\log x) + O(x^{r-1+\theta+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \tau([n_1,\ldots,n_r]) = x^r Q_r(\log x) + O(x^{r-1+\theta+\varepsilon}),$$

ahol θ az (1.1) Dirichlet osztóprobléma kitevője, $P_r(t)$ és $Q_r(t)$ r-edfokú polinomok t-ben, amelyek főegyütthatói explicit módon megadhatók.

Tekintsük a $\tau^{(2)}(n)$ függvényt, amelyre $\tau^{(2)}(n_1 \cdots n_r) = \tau^{(2)}([n_1,\ldots,n_r])$ minden $n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{N}$-re.

3.3.5. Tétel (Tóth és Zhai [51, Th. 3.5]). *Ha $r \geqslant 2$, akkor*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r \leqslant x} \tau^{(2)}(n_1 \cdots n_r) = x^r P_r^*(\log x) + O(x^{r-1/2+\varepsilon}),$$

ahol $P_r^*(t)$ egy r-edfokú polinom t-ben és főegyütthatója

$$K_{P*,r} := \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^r \left(2-\left(1-\frac{1}{p}\right)^r\right).$$

3.4. A $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ csoportok részcsoportjai számának az átlaga

Jelölje $s(m,n)$, ahogy a fentiekben is, a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ csoport részcsoportjainak a számát.

3.4.1. Tétel (Nowak és Tóth [23, Th. 2.1]). *Ha $z, w \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $\Re z > 1, \Re w > 1$, akkor*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{s(m,n)}{m^z n^w} = \frac{\zeta^2(z)\zeta^2(w)\zeta(z+w-1)}{\zeta(z+w)}. \tag{3.13}$$

3.4.2. Tétel (Nowak és Tóth [23, Th. 2.2]). *Miden $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\sum_{m,n \leqslant x} s(m,n) = x^2 \sum_{r=0}^{3} A_r (\log x)^r + O\left(x^{\frac{1117}{701}+\varepsilon}\right), \tag{3.14}$$

ahol $1117/701 \doteq 1.593437$, *$A_3 = \frac{2}{\pi^2}$, A_2, A_1, A_0 további explicit konstansok.*

3.4.3. Megjegyzés. Valójában a hibatag $O\left(x^{\frac{3-\theta}{2-\theta}+\varepsilon}\right)$, ahol θ a Dirichlet-féle osztóprobléma kitevője. A fenti O-tag Huxley eddigi legjobb eredményének következménye.

3.4.4. Megjegyzés. Az A_0 konstans pontos numerikus értéke nehezen adható meg, mert ahhoz szükséges a $\sum_{k=1}^{\infty} \tau(k)\Delta(k)k^{-2}$ sor összegének becslése, ahol $\Delta(x)$ a Dirichlet-probléma hibatagja.

A [23] dolgozatban hasonló formulákat vezettünk le a $\sum_{m,n\leqslant x,(m,n)>1} s(m,n)$, valamint a $\sum_{m,n\leqslant x} c(m,n)$ és $\sum_{m,n\leqslant x,(m,n)>1} c(m,n)$ összegekre is, ahol $c(m,n)$ a $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ csoport ciklikus részcsoportjainak a száma. Itt az $(m,n) = 1$ feltétel mellett a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ csoport két generálóelemű (rank two group).

A [23] dolgozatra hivatkozva Ushiroya [53] a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2(\log x)^{k-1}} \sum_{m,n\leqslant x} f(m,n),$$

középérték létezésének kérdését vizsgálta, ahol $f(m,n)$ egy kétváltozós multiplikatív függvény és $k \in \mathbb{N}$ rögzített.

3.5. A Busche-Ramanujan-azonosságok általánosításai

Legyen g és h két teljesen multiplikatív függvény és legyen $f = g * h$. A Busche-Ramanujan-azonosságok szerint minden $m,n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(mn) = \sum_{d\mid \gcd(m,n)} f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)g(d)h(d) \tag{3.15}$$

és

$$f(m)f(n) = \sum_{d\mid \gcd(m,n)} f\left(\frac{mn}{d^2}\right) g(d)h(d). \tag{3.16}$$

Ezek az azonosságok kétváltozós függvények használatával érthetők meg jól. Például az $f = \sigma$ függvényre (3.15) és (3.16) közös analitikus alakja

$$\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{\sigma(n_1n_2)}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_1-1)\zeta(s_2)\zeta(s_2-1)}{\zeta(s_1+s_2-1)} \quad (\Re s_1, \Re s_2 > 2),$$

ami a (3.15) és (3.16) típusú azonosságok ekvivalenciáját is megmagyarázza.

A Busche-Ramanujan-formulák következő általánosításait bizonyítottam:

3.5.1. Tétel (Tóth [41, Th. 3.1]). *Legyenek g és h teljesen multiplikatív függvények és $f = g*h$. Legyen ψ_f a következőképpen definiált r-változós ($r \in \mathbb{N}$) multiplikatív függvény:*

$$\psi_f(p^{\nu_1},\ldots,p^{\nu_r}) = \begin{cases} 1, & \nu_1 = \cdots = \nu_r = 0, \\ (-1)^{j-1} g(p)h(p)f(p^{j-2}), & \nu_1,\ldots,\nu_r \in \{0,1\}, \\ & j := \nu_1 + \cdots + \nu_r \geqslant 2, \\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

minden p prímre és minden $\nu_1, \dots, \nu_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-ra.

Jelölje ψ_f^{-1*} a ψ_f inverzét az r-változós konvolúcióra nézve. Akkor minden $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n_1 \cdots n_r) = \sum_{a_1 | n_1, \dots, a_r | n_r} f\left(\frac{n_1}{a_1}\right) \cdots f\left(\frac{n_r}{a_r}\right) \psi_f(a_1, \dots, a_r), \tag{3.17}$$

és

$$f(n_1) \cdots f(n_r) = \sum_{a_1 | n_1, \dots, a_r | n_r} f\left(\frac{n_1 \cdots n_r}{a_1 \cdots a_r}\right) \psi_f^{-1*}(a_1, \dots, a_r). \tag{3.18}$$

Megjegyzem, hogy a $\tau(n)$ osztófüggvényre a 3.5.1 Tétel analitikus alakja

$$\sum_{n_1, \dots, n_r = 1}^{\infty} \frac{\tau(n_1 \cdots n_r)}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}$$

$$= \zeta^2(s_1) \cdots \zeta^2(s_r) \prod_p \left(1 + \sum_{j=2}^{r} (-1)^{j-1}(j-1) \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_j \leqslant r} \frac{1}{p^{s_{i_1} + \cdots + s_{i_j}}}\right), \tag{3.19}$$

ami a 3.1.1 Tétel speciális esete $k = 2$-re az (1.9) figyelembevételével.

3.5.2. Tétel (Tóth [41, Th. 3.2]). *Legyenek $f_1, \dots, f_k$ teljesen multiplikatív függvények ($k \in \mathbb{N}$) és $F = f_1 * \cdots * f_k$. Legyen ϑ_F a következőképpen definiált kétváltozós multiplikatív függvény. Minden p prímre és minden $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-ra*

$$\vartheta_F(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}) = \begin{cases} 1, & \nu_1 = \nu_2 = 0, \\ (-1)^{\nu_1+\nu_2-1} e_{\nu_1+\nu_2}(f_1(p), \dots, f_k(p)), & \nu_1, \nu_2 \geqslant 1, \nu_1 + \nu_2 \leqslant k, \\ 0, & \textit{másképp}, \end{cases}$$

ahol $e_d(x_1, \dots, x_k)$ a d-edfokú elemi szimmetrikus polinomokat jelöli. Legyen ϑ_F^{-1*} a ϑ_F inverze az kétváltozós konvolúcióra nézve. Akkor minden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ esetén

$$F(n_1 n_2) = \sum_{a_1 | n_1, a_2 | n_2} F\left(\frac{n_1}{a_1}\right) F\left(\frac{n_2}{a_2}\right) \vartheta_F(a_1, a_2), \tag{3.20}$$

és

$$F(n_1) F(n_2) = \sum_{a_1 | n_1, a_2 | n_2} F\left(\frac{n_1 n_2}{a_1 a_2}\right) \vartheta_F^{-1*}(a_1, a_2). \tag{3.21}$$

A Piltz-féle osztófüggvényre a 3.5.2 Tétel következményeként kapjuk:

3.5.3. Következmény (Tóth [41, Cor. 3.4]). *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Minden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$-re*

$$\tau_k(n_1 n_2) = \sum_{a_1 \mid n_1,\, a_2 \mid n_2} \tau_k\left(\frac{n_1}{a_1}\right) \tau_k\left(\frac{n_2}{a_2}\right) \vartheta_k(a_1, a_2),$$

ahol a ϑ_k multiplikatív függvény így definiált:

$$\vartheta_k(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}) = \begin{cases} 1, & \nu_1 = \nu_2 = 0, \\ (-1)^{\nu_1+\nu_2-1}\binom{k}{\nu_1+\nu_2}, & \nu_1, \nu_2 \geqslant 1, \nu_1 + \nu_2 \leqslant k, \\ 0, & \textit{másképp.} \end{cases}$$

3.6. Többváltozós számelméleti függvények Ramanujan-összegek szerinti sorfejtése

Jelölje $c_q(n)$ a Ramanujan-összegeket. Igaz a következő tétel, amely általánosítja Delange [11] egyváltozós függvényekre vonatkozó eredményét.

3.6.1. Tétel (Tóth [49, Th. 2]). *Legyen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ egy függvény, ahol $k \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} 2^{\omega(n_1)+\cdots+\omega(n_k)} \frac{|(\mu_k * f)(n_1,\ldots,n_k)|}{n_1 \cdots n_k} < \infty. \tag{3.22}$$

Akkor minden $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n_1,\ldots,n_k) = \sum_{q_1,\ldots,q_k=1}^{\infty} a_{q_1,\ldots,q_k} c_{q_1}(n_1) \cdots c_{q_k}(n_k), \tag{3.23}$$

abszolút konvergens, ahol

$$a_{q_1,\ldots,q_k} = \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k * f)(m_1 q_1, \ldots, m_k q_k)}{m_1 q_1 \cdots m_k q_k}. \tag{3.24}$$

Megjegyzem, hogy a Bevezetőben említett általánosított Wintner-tétel szerint, a 3.6.1 Tétel feltételei mellett létezik az $M(f)$ középérték és $a_{1,\ldots,1} = M(f)$.

Ha f multiplikatív, akkor a (3.22) feltétel ekvivalens a

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} \frac{|(\mu_k * f)(n_1,\ldots,n_k)|}{n_1 \cdots n_k} < \infty \tag{3.25}$$

feltétellel és a következővel is:

$$\sum_p \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_k=0 \\ \nu_1+\cdots+\nu_k \geqslant 1}}^{\infty} \frac{|(\mu_k * f)(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_k})|}{p^{\nu_1+\cdots+\nu_k}} < \infty. \tag{3.26}$$

3.6.2. Következmény (Tóth [49, Cor. 1]). *Legyen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{C}$ multiplikatív függvény ($k \in \mathbb{N}$). Tegyük fel, hogy (3.25) vagy (3.26) igaz. Akkor minden $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$-re fennáll a (3.23) abszolút konvergens sorfejtés és az együtthatók*

$$a_{q_1,\ldots,q_k} = \prod_p \sum_{\nu_1 \geqslant \nu_p(q_1),\ldots,\nu_k \geqslant \nu_p(q_k)} \frac{(\mu_k * f)(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_k})}{p^{\nu_1+\cdots+\nu_k}}.$$

Innen egyszerű úton megkaphatók speciális multiplikatív függvényekre vonatkozó ismert formulák - lásd például (1.8) - k-dimenziós általánosításai.

3.6.3. Következmény (Tóth [49, Cor. 3]). *Ha $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, akkor a következő sorok abszolút konvergensek:*

$$\frac{\sigma_s((n_1, \ldots, n_k))}{(n_1, \ldots, n_k)^s} = \zeta(s+k) \sum_{q_1,\ldots,q_k=1}^{\infty} \frac{c_{q_1}(n_1) \cdots c_{q_k}(n_k)}{Q^{s+k}} \quad (s \in \mathbb{R}, s+k > 1),$$

$$\frac{\sigma((n_1, \ldots, n_k))}{(n_1, \ldots, n_k)} = \zeta(k+1) \sum_{q_1,\ldots,q_k=1}^{\infty} \frac{c_{q_1}(n_1) \cdots c_{q_k}(n_k)}{Q^{k+1}} \quad (k \geqslant 1) \tag{3.27}$$

$$\tau((n_1, \ldots, n_k)) = \zeta(k) \sum_{q_1,\ldots,q_k=1}^{\infty} \frac{c_{q_1}(n_1) \cdots c_{q_k}(n_k)}{Q^{k}} \quad (k \geqslant 2), \tag{3.28}$$

ahol $Q = [q_1, \ldots, q_k]$.

Ha $k = 1$, akkor (3.27) az (1.8) képletet adja. Ugyanakkor (3.28)-nak nincs közvetlen egydimenziós megfelelője. A Ramanujantól származó

$$\tau(n) = -\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log q}{q} c_q(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

formula nem vezethető le ezzel a módszerrel, mert az $M(\tau)$ középérték nem létezik.

Irodalomjegyzék

[1] E. Alkan, Distribution of averages of Ramanujan sums, *Ramanujan J.* **29** (2012), 385–408.

[2] R. C. Baker, The square-free divisor problem II, *Quart. J. Math. (Oxford)* (2) **47** (1996), 133–146.

[3] M. Balazard, M. Naimi, and Y.-F. S. Pétermann, Étude d'une somme arithmétique multiple liée à la fonction de Möbius, *Acta Arith.* **132** (2008), 245–298.

[4] J. Bourgain and N. Watt, Mean square of zeta function, circle problem and divisor problem revisited, Preprint, 23 pp. https://arxiv.org/abs/1709.04340

[5] O. Bordellès and B. Cloitre, An alternating sum involving the reciprocal of certain multiplicative functions, *J. Integer Seq.* **16** (2013), Article 13.6.3, 12 pp.

[6] L. M. Butler, *Subgroup Lattices and Symmetric Functions*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 112, no. **539**, 1994.

[7] X. Cao and W. Zhai, Some arithmetic functions involving exponential divisors, *J. Integer Seq.* **13** (2010), Article 10.3.7, 13 pp.

[8] X. Cao and W. Zhai, On the four-dimensional divisor problem of (a,b,c,c) type, *Funct. Approx. Comment. Math.* **49** (2013), 251–267.

[9] J.-M. De Koninck and A. Ivić, *Topics in Arithmetical Functions*, North-Holland Mathematics Studies **43**, Notas de Matemática (72), North-Holland Publishing Company, XVII, 1980.

[10] R. de la Bretèche, Estimation de sommes multiples de fonctions arithmétiques, *Compos. Math.* **128** (2001), 261–298.

[11] H. Delange, On Ramanujan expansions of certain arithmetical functions, *Acta. Arith.* **31** (1976), 259–270.

[12] J. L. Fernández and P. Fernández, On the probability distribution of the gcd and lcm of r-tuples of integers, Preprint, 2013, 24 pp. https://arxiv.org/abs/1305.0536

[13] M. Hampejs and L. Tóth, On the subgroups of finite abelian groups of rank three, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect Comp.* **39** (2013), 111–124.

[14] T. Hilberdink and L. Tóth, On the average value of the least common multiple of k positive integers, *J. Number Theory* **169** (2016), 327–341.

[15] J. Hu, The probability that random positive integers are k-wise relatively prime, *Int. J. Number Theory* **9** (2013), no. 5, 1263–1271.

[16] M. N. Huxley, Exponential sums and lattice points III., *Proc. London Math. Soc.* **87** (2003), 591–609.

[17] T. Kaluza, Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen, *Math. Z.* **28** (1928), 161–170.

[18] E. Krätzel, *Lattice Points*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1988.

[19] E. Krätzel, New estimates in the four-dimensional divisor problem with applications, *Acta Math. Hung.* **126** (2010), 258–278.

[20] A. V. Lelechenko, Average number of squares dividing mn, *Visn. Odessk. Univ., Ser. Mat. Mekh.* **19** #2 (22) (2014), 52–65.

[21] A. V. Lelechenko, Exponential divisor functions, *Šiauliai Math. Semin.* **10(18)** (2015), 181–197.

[22] A. V. Lelechenko, Exponential and infinitary divisors, *Ukr. Math. J.* **68** (2017), no. 8, 1222–1237.

[23] W. G. Nowak and L. Tóth, On the average number of subgroups of the group $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, *Int. J. Number Theory* **10** (2014), no. 2, 363–374.

[24] Y.-F. S. Pétermann, Arithmetical functions involving exponential divisors: note on two papers by L. Tóth, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **32** (2010), 143–149.

[25] Y.-F. S. Pétermann and J. Wu, On the sum of exponential divisors of an integer, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **77** (1997), 159–175.

[26] S. Ramanujan, On certain trigonometric sums and their applications in the theory of numbers, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **22** (1918), 179–199.

[27] R. Sita Rama Chandra Rao, On an error term of Landau, *Indian J. Pure Appl. Math.* **13** (1982), 882–885.

[28] M. V. Subbarao, On some arithmetic convolutions, in *The Theory of Arithmetic Functions*, Lecture Notes in Mathematics No. **251**, 247–271, Springer, 1972.

[29] D. Suryanarayana and R. Sita Rama Chandra Rao, On the true maximum order of a class of arithmetical functions, Math. J. Okayama Univ. **17** (1975), 95–101.

[30] D. Suryanarayana and V. Siva Rama Prasad, The number of k-free divisors of an integer, *Acta Arith.* **17** (1971), 345–354.

[31] M. Tărnăuceanu and L. Tóth, On the number of subgroups of a given exponent in a finite abelian group, *Publ. Inst. Math. Beograd* **101 (115)** (2017), 121–133.

[32] L. Tóth, The probability that k positive integers are pairwise relatively prime, *Fibonacci Quart.* **40** (2002), no. 1, 13–18.

[33] L. Tóth, On certain arithmetic functions involving exponential divisors, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **24** (2004), 285–294.

[34] L. Tóth, On certain arithmetical functions involving exponential divisors. II., *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **27** (2007), 155–166.

[35] L. Tóth, An order result for the exponential divisor function, *Publ. Math. Debrecen* **71** (2007), no. 1-2, 165–171.

[36] L. Tóth, A gcd-sum function over regular integers modulo n, *J. Integer Seq.* **12** (2009), no. 2, Article 09.2.5, 8 pp.

[37] L. Tóth, A survey of gcd-sum functions, *J. Integer Seq.* **13** (2010), Article 10.8.1, 23 pp.

[38] L. Tóth, Weighted gcd-sum functions, *J. Integer Seq.* **14** (2011), Article 11.7.7, 10 pp.

[39] L. Tóth, A note on the number of abelian groups of a given order, *Math. Pannon.* **23** (2012), 157–160.

[40] L. Tóth, On the number of cyclic subgroups of a finite Abelian group, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)* **55(103)** (2012), 423–428.

[41] L. Tóth, Two generalizations of the Busche-Ramanujan identities, *Int. J. Number Theory* **9** (2013), 1301–1311.

[42] L. Tóth, Another generalization of the gcd-sum function, *Arab. J. Math.* **2** (2013), 313–320.

[43] L. Tóth, Averages of Ramanujan sums: Note on two papers by E. Alkan, *Ramanujan J.* **35** (2014), 149–156.

[44] L. Tóth, Subgroups of finite Abelian groups having rank two via Goursat's lemma, *Tatra Mt. Math. Publ.* **59** (2014), 93–103.

[45] L. Tóth, Counting solutions of quadratic congruences in several variables revisited, *J. Integer Seq.* **17** (2014), Article 14.11.6, 23 pp.

[46] L. Tóth, Multiplicative arithmetic functions of several variables: a survey, *Mathematics Without Boundaries*, Springer, New York, 2014, 483–514.

[47] L. Tóth, Counting r-tuples of positive integers with k-wise relatively prime components, *J. Number Theory* **166** (2016), 105–116.

[48] L. Tóth, Alternating sums concerning multiplicative arithmetic functions, *J. Integer Seq.* **20** (2017), Article 17.2.1, 41 pp.

[49] L. Tóth, Ramanujan expansions of arithmetic functions of several variables, *Ramanujan J.*, accepted, 2017. https://doi.org/10.1007/s11139-017-9944-z

[50] L. Tóth and E. Wirsing, The maximal order of a class of multiplicative arithmetical functions, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **22** (2003), 353–364.

[51] L. Tóth and W. Zhai, On multivariable averages of divisor functions, Preprint, 2017, https://arxiv.org/abs/1711.04257

[52] N. Ushiroya, Mean-value theorems for multiplicative arithmetic functions of several variables, *Integers* **12** (2012), 989–1002.

[53] N. Ushiroya, On some generalizations of mean value theorems for arithmetic functions of two variables, *JP J. Algebra Number Theory Appl.* **38** (2016), 151–184.

[54] R. Vaidyanathaswamy, The theory of multiplicative arithmetic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **33** (1931), 579–662.

[55] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Mathematische Forschungsberichte, XV, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.

[56] J. Wu, Problème de diviseurs exponentiels et entiers exponentiellement sans facteur carré, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **7** (1995), 133–141.

[57] E. Wirsing, Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 411–467.

[58] L. Zhang, M. Lü, and W. Zhai, On the mean value of $a^2(n)$, *Sci. Magna* **4** (2008), No. 4, 15–17.

[59] D. Zhang and W. Zhai, Mean values of a gcd-sum function over regular integers modulo n, *J. Integer Seq.* **13** (2010), no. 4, Article 10.4.7, 11 pp.

[60] D. Zhang and W. Zhai, On an open problem of Tóth, *J. Integer Seq.* **16** (2013), no. 6, Article 13.6.5, 8 pp.