

Tóth László Egy- és többváltozós multiplikatív számelméleti függvények aszimptotikus tulajdonságai MTA doktori értekezésének bírálata

A számelméleti függvények témakörében az egyik központi kérdés az átlagértékek vizsgálata, aminek alapja az $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ összegfüggvény aszimptotikus viselkedésének leírása minél jobb hibataggal. A leghíresebb talán az („igazi” hibatag vonatkozásában ma is megoldatlan) osztóprobléma, amikor $f(n)$ az n pozitív osztóinak a száma, de számos más függvény esetén is hemzsegnak a nyitott kérdések. Tóth László ezen a nehéz terepen rengeteg új eredményt ért el, részben általánosítva mások korábbi eredményeit, részben számos általa újonnan felvetett érdekes függvényre. Egyes eredményei és módszerei jól kapcsolódnak más területekhez is. A többváltozós multiplikatív függvények hatékony kezeléséhez kifejlesztette az ennek megfelelő konvolúciós módszert. Az értekezés 14 egy-szerzős és 6 egy-egy társszerzővel közös dolgozatán alapul.

Rátérek a legfontosabb eredmények vázlatos ismertetésére.

A 2. fejezet egyváltozós multiplikatív függvényekre vonatkozó eredményekről szól.

A 2.1 és 2.4 pontban az exponenciális osztókkal kapcsolatos függvények szerepelnek. Ez a Subbarao által bevezetett és sok más szerző által is használt fogalom a következő: d exponenciális osztója n -nek, ha d -ben az n minden prímosztójának kitevője osztója az n -beli kitevőnek. A 2.1.3 Tétel az n exponenciális osztói száma r -edik hatványának összegfüggvényére ad aszimptotikát jó hibataggal. A 2.1.4 Következményben az n elemű nem izomorf Abel-csoportok száma r -edik hatványának összegfüggvényére kapunk szép aszimptotikát. A 2.1.3 Tétel speciális esete a nagyon általános és bonyolult feltételrendszerű 2.1.1 Tételnek. Itt felmerül, hogy esetleg más speciális esetek is önmagukban érdekes és mutatós eredményeket szolgáltathatnak. Ez a kérdés a későbbiekre is vonatkozik, amikor valamely nevezetes eredményt a szerző egy általánosabb tétel speciális eseteként vezet le.

Az exponenciális Euler-függvény az n azon osztóinak a száma, amelyekben minden prím kitevője relatív prím a megfelelő n -beli kitevőhöz. A 2.4.1 Tétel az exponenciális Euler-függvény r -edik hatványának összegfüggvényére vonatkozik. A 2.4.2–2.4.4 Tételek további, hasonló módon definiált, részben a szerző által bevezetett exponenciális függvények összegfüggvényére, illetve Dirichlet-sorára mondanak ki eredményeket.

A 2.2 pont $(-1)^{n-1}/f(n)$ összegfüggvényével foglalkozik, ahol $f(n)$ el nem tűnő multiplikatív függvény. A 2.2.1 Tétel nagyon általános feltételek mellett ad erre hibatagos aszimptotikát, és ennek speciális eseteként szép eredményeket kapunk, amikor $f(n)$ az osztók száma (2.2.4 Következmény), osztók összege (2.2.3 Következmény), az Euler-függvény (2.2.2 Következmény), illetve az ún. biunitér osztók összege (ahol d és n/d relatív prímek, 2.2.7 Tétel). A hibatagok levezetéséhez egy új típusú egyenlőtlenséget állított fel (2.2.5 Állítás).

A 2.3 pontban a $\limsup f(n)/\log \log n$ -re vonatkozó, Wirsinggel közös eredmények szerepelnek, ahol $f(n)$ megfelelő feltételeket teljesítő multiplikatív függvény.

A 2.5 pont lnko-hoz kapcsolódó összegekkel foglalkozik. A 2.5.1 Tétel a $\sum_{k=1}^n (k, n)/n$ négyzetének összegfüggvényére ad aszimptotikát, amelyben a hibatag egyes nevezetes sejtéseket feltéve tovább javítható. Ezt a tételt Zhang és Zhai négyzet helyett magasabb hatványokra általánosították. A 2.5.5 és 2.5.4 Tételek a szerző által bevezetett függvényre, az exponenciális lnko-k összegére állapít meg maximális nagyságrendet és az összegfügg-

vényre aszimptotikát. Egy másik érdekes általánosítás vonatkozásában mondanak ki hasonló eredményeket a 2.5.6 és 2.5.7 Tételek.

A 2. fejezet további részei a korábbiakhoz lazábban kapcsolódó kérdéseket vizsgálnak, a 2.6 pont Ramanujan-összegek súlyozott átlagaira, 2.7 többváltozós kvadratikus kongruenciák megoldásszámára, 2.8 pedig véges Abel-csoportok részcsoporthoz számára vonatkozó eredményeket tartalmaznak.

A 3. fejezetben többváltozós multiplikatív függvényekre vonatkozó eredmények szerepelnek. Ezek főleg $F(x) = \sum_{n_i \leq x} f(n_1, \dots, n_r)$ összegfüggvényekről szólnak.

A 3.1.2 Tétel a k -anként relatív prím szám r -esek ilyen értelemben vett számára ad jó hibatagú aszimptotikát. Ezt az eredményt először a szerző korábban $k = 2$ -re érte el, majd a módszerével ezt Hu tetszőleges k -ra igazolta. A szerző eztuán a Dirichlet-sorok és a többváltozós konvolúció segítségével egy sokkal természetesebb megközelítést talált, ami a Hu-énál jobb hibatagot eredményezett. A Hilberdinkkel közös 3.2.1 Tétel egyváltozós f multiplikatív függvények nagyon általános osztályánál talál aszimptotikát az $F(x) = \sum_{n_i \leq x} f([n_1, \dots, n_r])$ összegfüggvényre.

A Zhai-jal közös 3.3.1 Tétel az $n_1 \dots n_r$ szorzat, illetve az $[n_1, \dots, n_r]$ lkkt k -adik hatvány osztói számának $n_i \leq x$ szerint képzett összegfüggvényére mond ki aszimptotikát. Hasonló eredményeket érnek el a szorzat, illetve lkkt osztóira, exponenciális osztóira, valamint négyzetmentes osztóira (3.3.4, 3.3.2 és 3.3.5 Tételek).

Legyen $s(m, n)$ a $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$ csoport részcsoporthozainak a száma. A Nowakkal közös 3.4.2 Tétel a $\sum_{m, n \leq x} s(m, n)$ összegre ad aszimptotikát. Van-e remény három ciklikus csoport direkt szorzatánál is hasonló eredményre, akár esetleg hibatag nélkül?

A 3.5 és 3.6 pontok a Busche–Ramanujan azonosságok általánosításával, illetve többváltozós számelméleti függvények Ramanujan-összegek szerinti sorfejtésével kapcsolatos (társszerzők nélküli) eredményeket tartalmaznak.

A bizonyítások világosak, jól követhetők, és közülük különösen a 3.2 és 3.3 pontbeliek tűnnek ki összetettségükkel és ötletességükkel. Megismétlem, hogy nagyon jónak tartom egyes fontos eredményeknél azoknak egy jóval általánosabb, önmagában viszont nem túl „mutató” tételből történő levezetését.

A dolgozat felépítése és stílusa a nehéz téma, a sokféle szokatlan fogalom ellenére olvasható. Az eligazodást jól segíti a részletes név- és tárgymutató, valamint a sokszor előforduló jelöléseket külön is összefoglaló 1.3 pont.

Értékelés: Az értekezésből megállapítható, hogy Tóth László a számelméleti függvények egy fontos részterületének nemzetközileg is elismert vezető kutatója, aki számos új eredménnyel gazdagította ezt a témakört, mind korábbi munkák általánosításával és javításával, mind pedig általa felvetett kérdések megoldásával. Ezekhez a meglevő módszereket ügyesen adaptálta, és több esetben új fogalmakat vezetett be és új eljárásokat dolgozott ki. Rendkívül tájékozott az irodalomban, folyamatosan követi azt. Munkássága szorosan kapcsolódik számos más kutatóéhoz, egymásra ösztönzőleg hatva. Dolgozatai mind idegen nyelvűek, és jelentős részük rangos nemzetközi folyóiratokban jelent meg.

Mindezek alapján javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és sikeres védelem esetén az MTA doktori fokozat odaítélését.

Budapest, 2019. április 27.

Freud Róbert