

Válasz Ruzsa Z. Imre bírálataira

Nagyon köszönöm Ruzsa Z. Imre bírálói véleményét és támogatását.

Az értekezésem 2.2 fejezetének a célja egy olyan eljárás magadása volt, amely adott feltételeket teljesítő $f(n)$ multiplikatív függvények esetén közvetlen aszimptotikát szolgáltat az (1) $\sum_{n \leq x} (-1)^{n-1}/f(n)$ alternáló összegre a (2) $\sum_{n \leq x} 1/f(n)$ összegre vonatkozó aszimptotika ismeretében. Bizonyos $f(n)$ függvényekre az (1) alternáló összegre így adódó hibatag azonos a (2) összeg hibatagjával. Ilyen például a $\tau(n)$ osztófüggvény és a $\psi(n)$ Dedekind-függvény. Ez utóbbira vonatkozó eredmény nem szerepel az értekezésben, csak a publikált cikkemben.

Más esetekben az (1)-re adódó hibatag nagyobb, mint (2) hibatagja. Ilyen például a $\varphi(n)$ Euler-függvény, amelyre a hiba egy $\log x$ faktorral nagyobb. De valóban, ahogy bírálóm megjegyzi, a $\sum_{n \leq x} (-1)^{n-1}/\varphi(n)$ összegre is a (2)-nek megfelelő hibatag kapható egy egyszerű észrevétellel, amely Dirichlet-sorokra felírt formában az én módszeremnek is a kiindulópontja. Lásd a (4.1) képletet. A 2.2.1. általános tétel hibatagja nem elég érzékeny az olyan függvényekre, mint a $\varphi(n)$, és nem látom módját annak, hogy ez finomítható lenne.

Az említett észrevétel általánosítható a következőképpen: Legyen Q prímek egy véges halmaza, $t_Q(n) = 1$, ha n -nek nincs Q -beli osztója és $t_Q(n) = -1$ másképp. A (3) $\sum_{n \leq x} t_Q(n)/f(n)$ általánosított alternáló összeg (1)-et adja $Q = \{2\}$ esetén. Továbbá (3) éppen $2 \sum_{n \leq x, (n,k)=1} 1/f(n) - \sum_{n \leq x} 1/f(n)$, ahol k a Q -beli prímek szorzata. Ez szerepel a cikkem utolsó szakaszában. Az Euler-függvény esetén a (3) összegre így $O((\log x)/x)$ hiba adódik.

Az értekezésemben több helyen is szerepelnek a hibatagok alsó becslésére vonatkozó eredmények – igaz, hogy nem a kiemelt tételekben, illetve következményekben. Ezek közül az egyik az én eredményem. A többi más szerzők eredményei, az én cikkeimre való hivatkozással. A többváltozós függvények esetén nem tűnik egyszerűnek Ω -eredmények levezetése.

A továbbiakban válaszolok a feltett kérdésekre.

1. Kérdés. Tud-e példát olyan multiplikatív függvényre, ahol az alternáló összeg hibatagja ténylegesen nagyobb, mint a teljes összegé?

Válasz. Nem tudok példát ilyen függvényre. Az általam vizsgált több más multiplikatív függvény esetén az alternáló összegre ugyanaz a hiba adódik, mint a teljes összegre. A publikált cikkemben szerepel egy másik általános tétel is $\sum_{n \leq x} (-1)^{n-1}g(n)$ összegekre vonatkozóan, amely közvetlenül alkalmazható a $g(n) = \varphi(n), \psi(n), \sigma(n)$ és más multiplikatív függvényekre, és ahol a hibatag azonos a $\sum_{n \leq x} g(n)$ teljes összeg hibatagjával.

Így például, használva hogy $\sum_{n \leq x} \varphi(n) - \frac{3}{\pi^2} x^2 \ll x(\log x)^{2/3}(\log \log x)^{1/3} =: R(x)$, amely H.-Q. Liu egy 2016-os új eredménye, és amely egy $\log \log x$ faktorról javítja Walfisz korábbi becslését, következik, hogy $\sum_{n \leq x} (-1)^{n-1} \varphi(n) - \frac{1}{\pi^2} x^2 \ll R(x)$, a maradék ugyanaz.

2. Kérdés. Tud-e az eredmények némelyikénél alsó becslést adni a hibatagra, ami lehetővé tenné az eredmény élességének pontosabb megítélését?

Válasz. A $P^{(e)}(n)$ függvényre vonatkozóan a 2.5.4. Tétel szerint $\sum_{n \leq x} P^{(e)}(n) = C_4 x^2 + O(x(\log x)^{5/3})$, ahol C_4 egy explicit konstans. A 2.5.5. Tétel szerint pedig $\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(e)}(n)/(n \log \log n) = 6e^\gamma/\pi^2$. Ennek egyszerű következménye hogy az előbbi hibatag $\Omega(x \log \log x)$ – hasonlóan, mint a $\sigma(n)$ függvényre. Hivatkozva az én eredményemre Pétermann (2010) igazolta, hogy ez a hiba $\Omega_\pm(x \log \log x)$.

A 2.4.3. szakaszban a $t^{(e)}(n)$ függvényre a 2.4.4. Tétel szerint $\sum_{n \leq x} t^{(e)}(n) = C_1 x + C_2 x^{1/2} + O(x^{1/4+\varepsilon})$, ahol C_1, C_2 explicit konstansok. Pétermann (2010) az előbbi maradékot $O(x^{1/4})$ -re javította. Cao és Zhai (2010) RH mellett megmutatták, hogy a hiba $O(x^{3728/15469+\varepsilon})$, ahol a kitevő $0,240998\dots$, és RH-tól függetlenül a hiba $\Omega(x^{1/6})$.

További Ω -eredmények szerepelnek a $\mu^{(e)}(n)$ exponenciális Möbius-függvényre a 2.4.2. szakaszban.

Pécs, 2019. szeptember 19.

Tóth László