Válasz Freud Róbert bírálatára

Nagyon köszönöm Freud Róbert bírálói véleményét, támogatását és a dicsérő szavakat. A továbbiakban válaszolok a feltett kérdésekre, illetve megjegyzésekre.

Kérdés. A 2.1.3 Tétel speciális esete a nagyon általános és bonyolult feltételrendszerű 2.1.1 Tételnek. Itt felmerül, hogy esetleg más speciális esetek is önmagukban érdekes és mutatós eredményeket szolgáltathatnak. Ez a kérdésem a későbbiekre is vonatkozik, amikor valamely nevezetes eredményt a szerző egy általánosabb tétel speciális eseteként vezet le.

Válasz. A 2.1.1. Tétel egy másik speciális esete a 2.4.1. Tétel, amely a $\phi^{(e)}(n)$ exponenciális Euler-függvény r-edik momentumára vonatkozik. Más alkalmazások is adhatók. Tekintsük például a $\phi^*(n)$ unitér Euler-függvényt, ahol $\phi^*(n) = (p_1^{a_1} - 1)\cdots(p_r^{a_r} - 1)$, ha $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$. Legyen $\phi^{(e)*}(n) = \phi^*(a_1)\cdots\phi^*(a_r)$ az előbbi $\phi^{(e)}(n)$ függvény unitér megfelelője. A 2.1.1. Tételből az $\ell = 3$, $k = 2$ választással következik, hogy $\sum_{n\le x}\phi^{(e)*}(n) = Ax + Bx^{1/3} + O(x^{1/4+\varepsilon})$, ahol A, B explicit konstansok. Lásd az értekezésben nem említett, N. Minculete-vel közös, 2011-ben publikált cikkemet.

A bemutatott további általános eredményeimre is adhatók más alkalmazások. Például a 3.2.1. Tételből következnek a $\sum_{n_1,\ldots,n_k\le x}\phi([n_1,\ldots,n_k])$ és $\sum_{n_1,\ldots,n_k\le x}\mu^2([n_1,\ldots,n_k])$ összegekre vonatkozó aszimptotikák, amelyek szerepelnek a publikált cikkemben.

Megjegyzés. ... nagyon jónak tartom egyes fontos eredményeknél azoknak egy jóval általánosabb, önmagában viszont nem túl „mutatós” tételből történő levezetését.

Válasz. Magam is erre törekedtem. Példaként megemlítem még a 2.3. fejezet eredményeit, amelyek a Wirsinggel közös cikkemből valók. Az általános feltételeket tartalmazó 2.3.4. Következményből közvetlenül adódnak a $\sigma(n)$, $\sigma^{(e)}(n)$, $P^{(e)}(n)$ függvények maximális nagyságrendjére, valamint $\phi(n)$, $\rho(n) := \#\{k : 1 \le k \le n, k \text{ reguláris} \pmod n\}$ minimális nagyságrendjére vonatkozó eredmények. Így például $\liminf_{n\to\infty}(\rho(n)\log\log n)/n = e^{-\gamma}$, a Euler-féle ϕ függvényhez hasonlóan.

Kérdés. Van-e remény három ciklikus csoport direkt szorzatánál is hasonló eredményre, akár esetleg hibatag nélkül?

Válasz. Legyen $c(n_1, n_2, n_3)$ és $s(n_1, n_2, n_3)$ a $\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\mathbb{Z}_{n_3}$ csoport ciklikus részcsoportjainak, illetve az összes részcsoportjának a száma. A három változós Perron-képletet és komplex integrálást alkalmazva igazoltuk, meglehetősen bonyolult számítások révén, hogy $\sum_{n_1,n_2,n_3\le x} c(n_1, n_2, n_2) = x^3 P_7(\log x) + O\left(x^{8/3+\varepsilon}\right)$, ahol $P_7(t)$ egy alkalmas 7-edfokú polinom t-ben (közlésre benyújtva, társszerző Wenguang Zhai). Úgy tűnik, hogy a ciklikus részcsoportok számára a k-dimenziós esetben is adható aszimptotika a 2.8.1. Tételben szereplő formulából kiindulva, $x^k P_{2^k-1}(\log x)$ főtaggal, itt egy (2^k-1)-edfokú polinom szerepel, de pontos hibatag nélkül. Az $s(n_1, n_2, n_3)$ függvényre és annak k-változós általánosítására ($k \geq 3$) nem sikerült aszimptotikát adni.

Mivel a $\mathbb{Z}_n$ csoport részcsoportjainak a száma a $\tau(n)$ osztófüggvény, ez a kérdéskör úgy is tekinthető, mint a Dirichlet-féle osztóprobléma egy általánosítása.

Pécs, 2019. szeptember 19.

Tóth László