

Ruzsa Z. Imre
Rényi Intézet
Budapest, Pf. 127
1364
e-mail: ruzsa@renyi.hu

2019. augusztus 27.

A MTA III. osztálya és doktori bizottsága részére

Vélemény Tóth László
„Asymptotic properties of multiplicative arithmetic functions
of one and several variables”
című doktori értekezéséről

Az értekezés eredményei az analitikus-valószínűségi számelmélet elemi vonulatába tartoznak. Ez azt jelenti, hogy bár Dirichlet-sorok időnként ki vannak számítva, a becslések nem ezek komplex integrálásával adódnak. Ez nem véletlen, a vizsgált kérdések nagy része az osztóprobléma családjába tartozik, ahol ezek a módszerek kevésbé alkalmazhatók.

Szokás dicsérőleg említeni, ha valaki „mély”, „nehéz” módszereket alkalmaz. Az én eszményem az adekvát, vagyis a cél eléréséhez elegendő minimális eszköztár, ami itt általában áll. Tóth fel is hoz egy példát, ahol elemileg javítja mások analitikus becslését. Nem titkolja el azt sem, hogy az ellenkezőjére is van példa, a Möbius-függvényre hasonlító esetben az ő elemi becslését javították meg mások analitikus módszerrel.

A fenti elismerés alól kivétel az alternáló összegekről szóló 2.2 fejezet. Tóth figyelmét elkerüli az az elemi tény, hogy az alternáló összeg megkapható, ha a páratlan számokra kiterjesztett összeg kétszereséből levonjuk a teljes összeget; a teljes összeg becslés általában ismert, a páratlan eset pedig hasonlóan kezelhető. Például az $1/\varphi(n)$, $1/\sigma(n)$ függvények esetén a páratlan összegre a naív becslést használva $O((\log x)/x)$ hibatag adódik, ha pedig a teljes összegre ismert javítás a páratlan esetre is működik (ami valószínű, de nem ellenőriztem), a logaritmus kitevője $2/3 + \varepsilon$ -ra javítható.

Ezen elnézésre mentségül lehet felhozni, hogy az értekezés gyengébb becslései (a logaritmus $4/3$ -os kitevője) egy általános tétel következményeként adódnak, és teljes általánosságban a javítás legalábbis nem egyszerű. Említésre érdemes még, hogy más szerzők előtte még gyengébb hibatagot bizonyítottak.

1. kérdés. Tud-e példát olyan multiplikatív függvényre, ahol az alternáló összeg hibatagja ténylegesen nagyobb, mint a teljes összegé?

Az értekezés vizsgál jónéhány érdekes és természetes kérdést, mint pl. az első részben kvadratikusan kongruenciák átlagos megoldásszáma, a másodikban egész számok k -asai legkisebb közös többszörösének statisztikus viselkedése. . Függvények egy osztályára, amely magában foglalja a pozitív kitevőjű hatványokat, az osztók összegét és az Euler-

függvényt, hibatagos becslést ad a

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \leq x} f([n_1, \dots, n_k])$$

összegre. Sajnálatosul állapítja meg, hogy a (-1) -edik momentumra (vagyis a legkisebb közös többszörösök reciprokösszegére) csak nagyságrendet tud bizonyítani, aszimptotikát nem. Első ránézésre azt gondoltam, hogy ez nem lehet nehéz; némi fejtörés után kénytelen voltam belátni, hogy „de igen”, bár lehetetlennek sem tűnik.

Komoly hiányossága viszont az értekezésnek, hogy a felső becsléseket nem támaszja alá a hibatagok alsó becslésével, így az olyan önértékelés, hogy valamely becslés „sharp”, a levegőben lóg. Erre vonatkozik másik kérdésem.

2. kérdés. Tud-e az eredmények némelyikénél alsó becslést adni a hibatagra, ami lehetővé tenné az eredmény élességének pontosabb megítélését?

Az említett erényeket és hiányosságokat összevetve úgy vélem, az értekezés nem kiemelkedő, de elfogadható, az értekezés vitára bocsátását és a fokozat megítélését javaslom.

Ruzsa Z. Imre