Moduláris formák ciklusintegráljai

Doktori értekezés tézisei

Tóth Árpád

ELTE TTK
Matematika Intézet
Analízis Tanszék

és

MTA Rényi Alfréd Matematatikai Kutatóintézet
Automorf Formák Kutatócsoport

2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A disszertáció célja moduláris formák bizonyos zárt görbék menti integráljaival kapcsolatos új eredmények bemutatása. Klasszikusan ezek a görbék zárt geodetikusok a Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus sík egybevágóságainak egy számelméletileg kitüntetett Γ diszkrét csoportjára nézve. Ha a hiperbolikus síkot a $\mathcal{H}$ felső félsíkkal modellezzük, a hiperbolikus sík irányítástartó egybevágóságainak csoportja

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\},$$

és a kitüntetett diszkrét csoport

$$\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}.$$

Ezek az algebrai csoportok a $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-transzformációk által hatnak $\mathcal{H}$-n. A Γ pályáiból álló fakorteret $\Gamma\backslash\mathcal{H}$-vel jelöljük.

A $\mathcal{H}$ modellben a geodetikusok a valós középpontú félkörök és a függőleges félegyenesek. A tézisben főszerepet játszó ciklusok, azok a geodetikusok amik a $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ hányadostérben önmagukba záródnak. Megmutatható, hogy ezek a zárt geodetikusok egész együtthatós kétváltozós indefinit kvadratikus alakokkal írhatók le (2. alfejezet). A ciklusintegrálok így figyelemre méltó kölcsönhatást teremtenek a geometria, analízis és számelmélet között.

Ha f egy Γ-invariáns folytonos függvény, akkor vehetjük a zárt geodetikusok menti ívhossz szerinti integráljait. Két érdekes függvényosztály áll a kutatások középpontjában, a holomorf, illetve a négyzetesen integrálható függvények terei. A holomorf elméletnek fontos aritmetikus alkalmazásai vannak, elég csak a Wiles-tételt említenünk. Az $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H})$ tér vizsgálata más jellegű, de továbbra is kapcsolódási pontot nyújt a számelmélet irányába. A jelen disszertációban szerepelnek mind holomorf függvények, mind L^2 függvények ciklusintegráljai.

A modern harmonikus analízis a geometria és spektrális tulajdonságok kapcsolatát vizsgálja. A zenei áthallás nem véletlen, hiszen egy hangszer térbeli alakja és materiális tulajdonságai határozzák meg a hangzását, ami viszont egy spektrális jelenség. A moduláris formák elméletében ez a nézőpont Maass és Selberg munkáihoz nyúlik vissza. Selberg többek között kapcsolatot talált a zárt geodetikusok hosszai és a Laplace-operátor sajátértékei között. Hasonló, a geometriát és a spektrumot összekötő eredmények a disszertációban is megjelennek.

Az értekezésben továbbá megkerülhetetlen szerepet játszanak a technikailag bonyolultabb elméletű 1/2-súlyú moduláris formák. Shimura alapvető munkája nyomán létezik egy lineáris leképezés a négyzetesen integrálható 1/2-súlyú moduláris formák és a Γ-invariáns függvények között. Egy Katok és Sarnak által bizonyított fontos formula összeköti egy 1/2-súlyú moduláris forma Fourier-együtthatóit (lásd (2.4) formula) és a Shimura-kapcsolt függvény ciklusintegráljait.

A tézis eredményei nagyon röviden a következők.

- Az invariáns függvények egy elemi konstrukciója egy átlagolási eljárás, az ún. Poincaré-sorok. A 3. fejezetben a Poincaré-sorok ciklusintegráljaira adunk megfelelő formalizmust. Ezúton új bizonyítást adunk és kiterjesztjük a Katok-Sarnak formulát.

A Katok-Sarnak formula kiterjesztése magára a Shimura-kapcsolatra is új bizonyítást ad, az elméletre más nézőpontból tekint és új alkalmazások előtt nyitja meg az utat. Ezen alkalmazások 4 csoportba oszthatók:

- Számelméletileg definiált immertált felületek egyenletes eloszlása $\Gamma\backslash\mathcal{H}$-n. (4. fejezet)
- A Salié-féle exponenciális összegek szögei egyenletesen oszlanak el. (7. fejezet)
- A Ramanujan által megálmodott ál-moduláris formák egyszerű konstrukciója a klasszikus Klein-féle invariáns ciklusintegráljaival. (5. fejezet)
- Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ téren a geodetikus folyam periodikus pályáiból képzett szimmetrikus linkek hurkolódási számának kifejezése ciklusintegrálok segítségével. (6. fejezet)

A következőkben először ismertetjük a fenti eredmények matematikai hátterét, majd minden eredménynél vázoljuk annak beágyazottságát a klasszikus és modern kutatási irányokba. A tézisben felsorolt eredmények szemelvények a [17, 18, 19] és [44] cikkekből. Ezek közül 7 számozott tétel Duke-kal, Imamogluval közös, 3 pedig önálló saját eredmény.

2. Analízis a hiperbolikus síkon

Ebben a fejezetben a tézisben szereplő tételek kimondásához szükséges jelölést ismertetjük.

A Laplace-operátor és a spektráltétel. A modern elmélet az $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H})$ téren vizsgálja a Laplace-operátor spektrumát. Hogy ezt az operátort definiáljuk, szükséges további jelölés bevezetése. Egy U mérhető halmaz hiperbolikus területe a $\mathcal{H}$ modellben

$$\int_U \frac{1}{y^2} dxdy.$$

Ezt a mértéket μ-vel jelöljük, $\mu = \frac{dxdy}{y^2}$. Ez a mérték invariáns minden egybevágóságra nézve, és így egy jól definiált mértéket ad meg $\Gamma\backslash\mathcal{H}$-n. Legyen

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1,\ |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

a standard fundamentális tartomány, ekkor $\mathcal{F}$ területe $\frac{\pi}{3}$. A $\Gamma\backslash\mathcal{H}$-n értelmezett függvényeket azonosítjuk a $\mathcal{H}$-n értelmezett Γ-invariáns függvényekkel. Ha $f, g : \Gamma\backslash\mathcal{H} \colon \to \mathbb{C}$, legyen

$$\langle f, g \rangle = \frac{3}{\pi} \int\limits_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu,$$

és legyen

$$L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}) = \{ f \colon \Gamma\backslash\mathcal{H} \to \mathbb{C} : \langle f, f \rangle < \infty \}.$$

A spektrális elmélet a $\Delta_{\mathcal{H}}$ csak egy sűrű halmazon értelmezett, nem-korlátos operátor spektrumát vizsgálja az $L^2(G\backslash\mathcal{H})$ téren, ahol

$$\Delta_{\mathcal{H}} f = y^2\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) f.$$

Legyen $\Gamma_\infty = \{\pm\left(\begin{smallmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) : k \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma$. Ekkor a Γ_∞-invarianciából következik, hogy

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n,y)e(nx),$$

ahol $x = \operatorname{Re} z$, és $y = \operatorname{Im} z$. Az L^2 egy kitüntetett altere a csúcsformák tere

$$L^2_{\text{csúcs}} = \{f \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}) : \int_0^1 f(x+iy)dx = 0 \text{ (m.m. } y)\}.$$

Az $L^2_{\text{csúcs}}$-térnek van a $\Delta_{\mathcal{H}}$ operátor sajátfüggvényeiből álló Hilbert-bázisa. Az $L^2_{\text{csúcs}}$ ortogonális komplementerét kifeszítik a $\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\psi(\gamma z)$ alakú függvények, ahol ψ kompakt tartójú a $(0,\infty)$-n. Egy fontos nem kompakt tartójú eset, amikor $\psi(y) = y^s$. Az ebből képzett

$$E(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (\operatorname{Im}\gamma z)^s \tag{2.1}$$

ún. Eisenstein-sor konvergens $\operatorname{Re} s > 1$ esetén, és meromorfan folytatható a $\mathbb{C}$-re. $E(z,s)$ sajátfüggvénye $\Delta_{\mathcal{H}}$-nek, és bár sosincs L^2-ben, mégis fennáll a következő

Tétel. *Ha $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H})$ sima, akkor*

$$f(z) = c_0 + \sum_{\varphi} c(\varphi)\varphi(z) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(t)E(z,\tfrac{1}{2}+it)dt, \tag{2.2}$$

ahol a szummában φ egy a $\Delta_{\mathcal{H}}$ nem-konstans sajátfüggvényeiből álló ortonormált bázison fut át, és ahol $c_0 = \langle f,1\rangle$, $c(\varphi) = \langle f,\varphi\rangle$ és $c(t) = \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{E(z,1/2+it)}d\mu(z)$.

A sajátértékeket a következő normalizálással paraméterezzük (mivel $-\Delta \geq 0$). Ha

$$\Delta f + \lambda f = 0,$$

akkor λ sajátérték, ami

$$\lambda = \frac{1}{4} + r^2 = s(1-s)$$

alakban is írható. Itt $r \in \mathbb{R}$ vagy $ir \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ és $s = \frac{1}{2} + ir$. Legyen $U_r \subset L^2_{\text{csúcs}}$ azon csúcsformák tere, ahol a $\Delta_{\mathcal{H}} u + (1/4+r^2)u = 0$. Ha $u \in U_r$, akkor a változók szétválasztásával a Fourier-kifejtés explicit alakra hozható:

$$u(z) = 2y^{1/2}\sum_{m\neq 0} a(m)K_{ir}(2\pi|m|y)e(mx),$$

ahol $a(n) \in \mathbb{C}$, K_ν egy módosított Bessel függvény [37, Ch. 10].

Minden m-re adott egy $T(m) : L^2_{\text{csúcs}} \to L^2_{\text{csúcs}}$ Hecke-operátor, ezek egymással és $\Delta_{\mathcal{H}}$-vel is felcserélhetők. Ha φ a Hecke-operátorok sajátfüggvénye is, akkor $a(1) \neq 0$, így feltehető, hogy $a(1) = 1$. Ekkor φ-t Hecke-normalizáltnak hívjuk, ez eltér az L^2-normalizálástól. Ilyenkor φ L-függvénye Euler-szorzat alakban áll elő (ha $\operatorname{Re}(s) > 1$):

$$L(s;\varphi) = \sum_{n\geq 1} a(n)n^{-s} = \prod_{p \text{ prím}} (1 - a(p)p^{-s} + p^{-2s})^{-1}. \tag{2.3}$$

Továbbá feltehetjük, hogy $a(-n) = a(-1)a(n) = \pm a(n)$. Ha $a(-1) = 1$ a φ-t párosnak, egyébként páratlannak hívjuk, mert $\varphi(-\overline{z}) = a(-1)\varphi(z)$.

1/2-súlyú moduláris formák és a Shimura-kapcsolat. Legyen $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2 z)$ és $J(\gamma, z) = \theta(\gamma z)/\theta(z)$, $V^{\frac{1}{2}}$ azon L^2-beli függvények, amikre $f(\gamma z) = f(z)J(\gamma, z)$. Az $\frac{1}{2}$-súlyú Laplace-operátor

$$\Delta_{1/2} = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \tfrac{1}{2} iy\partial_x$$

értelmes sima $\psi \in V^{\frac{1}{2}}$ esetén. A spektrális elmélet hasonló, de technikailag bonyolultabb, mint az invariáns esetben.

Ha $\Delta_{1/2}F + \lambda F = 0$, akkor a paraméterezés változik, $\lambda = \lambda(F) = \frac{1}{4} + (\frac{r}{2})^2$. Ilyenkor a Fourier-kifejtés

$$\psi(z) = \sum_{n\neq 0} b(n) W_{\frac{1}{4}\operatorname{sign} n, \frac{ir}{2}}(4\pi|n|y)e(nx) \tag{2.4}$$

alakot ölt, ahol W egy ún. Whittaker-függvény [37, Ch. 13] A csúcsforma pontos definíciójában a $\Gamma_0(4)$ mindhárom csúcsában elvárjuk, hogy a Fourier-kifejtés konstans tagja legyen azonosan 0.

Az $U_r \subset L^2_{\text{csúcs}}$ térhez hasonlóan, de a módosított paraméterezéssel legyen V_r azon 1/2-súlyú csúcsformák tere, ahol a $\Delta_{1/2}$ sajátértéke $1/4 + r^2/4$. A Shimura-leképezés a V_r tér elemeihez rendel U_r-beli elemet.

Az 1/2-súlyú esetben ezúttal minden négyzetszámra adott $T_{1/2}(m^2)$, amik a V_r tereket önmagukba képezik. A V_r egy fontos speciális altere V_r^+, amelyben a Fourier-együtthatókra teljesül, hogy $b(n) = 0$, ha $n \equiv 2, 3 \bmod 4$. V_r^+-ban létezik ortonormált bázis $B_r = \{\psi\}$, amik egyben Hecke-sajátfüggvények. Ha $\psi \in B_r$ Fourier-kifejtése mint (2.4)-ben, és d fundamentális diszkrimináns, amire $b(d) \neq 0$, akkor a Hecke-reláció $T_{1/2}(p^2)\psi = a_\psi(p)\psi$ miatt

$$L(s + \tfrac{1}{2}, \chi_d) \sum_{n\geq 1} b(dn^2) n^{-s+1} = b(d) \prod_p (1 - a_\psi(p)p^{-s} + p^{-2s})^{-1}.$$

(Itt $L(s, \chi_d)$ a χ_d Dirichlet karakter L-függvénye.) Legyen $a_\psi(n)$ olyan, hogy

$$\prod_p (1 - a_\psi(p)p^{-s} + p^{-2s})^{-1} = \sum_{n\geq 1} a_\psi(n) n^{-s}, \tag{2.5}$$

és legyen

$$\operatorname{Shim}\psi(z) = y^{1/2} \sum_{n\neq 0} 2a_\psi(|n|) K_{ir}(2\pi|n|y)e(nx). \tag{2.6}$$

(Mivel valamely d értékre $b(d) \neq 0$, ez mindig definiált.)

Tétel (Shimura [41]). *Ha $\psi \in V_r$ egy Hecke-sajátfüggvény, akkor* $\operatorname{Shim}\psi \in U_r$ *és szintén Hecke-sajátfüggvény.*

Zárt geodetikusok. A $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ tér zárt geodetikusai háromféleképpen jellemezhetők: hiperbolikus elemek konjugált osztályaival, valós másodfokú testbővítések algebrai egészeinek ideálosztályaival, és indefinit egész együtthatós kvadratikus alakok osztályaival. Mi ez utóbbit használjuk e füzetben.

Legyen $D \neq 1$ egy fundamentális diszkrimináns, és jelölje

$$\mathcal{Q}_D = \{Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \mid B^2 - 4AC = D\} \tag{2.7}$$

a D diszkriminánsú kvadratikus alakok terét. Γ balról hat a $\mathcal{Q}_D$ téren

$$\gamma Q(x, y) = Q(dx - by, -cx + ay), \quad \text{ha } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A $\Lambda_D = \Gamma\backslash\mathcal{Q}_D$, faktortér véges, az elemszámát osztályszámnak hívjuk, h_D-vel jelöljük.

Legyen $\Gamma_Q = \{\gamma \in \Gamma : Q\gamma = Q\}$ a Q kvadratikus alak stabilizátora. Ismert, hogy ha $D > 0$, akkor Γ_Q végtelen ciklikus csoport. Ha t, u a legkisebb pozitív egész megoldásai a $t^2 - Du^2 = 4$ Pell-típusú egyenletnek, akkor Γ_Q egyik generátora

$$\sigma_Q = \begin{bmatrix} \frac{t+Bu}{2} & Cu \\ -Au & \frac{t-Bu}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

A $Q \mapsto \sigma_Q$ hozzárendelés bijekció a Q $\mathcal{Q}_D$-beli Γ-orbitja, más néven osztálya és a σ_Q Γ-konjugáltjai között.

Ha S_Q a σ fixpontjait összekötő félkör, és $z_0 \in S_Q$ tetszőleges, akkor a $t \to \exp(t \log \sigma_Q) z_0$ görbe periodikus lesz $\Gamma\backslash\mathcal{H}$-n, tetszőleges $z_0 \in S_\sigma$ választással. Ezt a zárt geodetikust azonosítjuk a z_0-t és $\sigma_Q z_0$-t összekötő C_Q geodetikus ívvel, aminek hossza $2 \log \varepsilon_D$, ahol $\varepsilon_D = \frac{t+u\sqrt{D}}{2}$. Könnyen látható, hogy Γ-konjugált elemek ugyanazt a zárt geodetikust adják meg $\Gamma\backslash\mathcal{H}$-n.

3. Ciklusintegrálok és a Katok-Sarnak formula

A zárt geodetikusok menti integrálokra fontos példa az alábbi Hecke-től származó eredmény [27]. Ha $E(z, s)$ a (2.1)-ben definiált Eisenstein sor, akkor

$$\sum_{Q \in \Lambda_D} \int_{C_Q} E(z, s) ds = \frac{D^{s/2} \Gamma(s/2)^2}{\Gamma(s)} \frac{\zeta(s) L(s, \chi_D)}{\zeta(2s)}.$$

Itt C_Q a fenti paragrafusban definiált ív, $\zeta(s)$ a Riemann-féle ζ-függvény, $L(s, \chi_D)$ pedig a χ_D Dirichlet-karakter L-függvénye. Az $s \to 1$ határátmenetből megkapjuk Dirichlet híres osztályszám-formuláját:

$$h(D) \log \varepsilon_D = D^{1/2} L(1, \chi_D).$$

A Katok-Sarnak formula a fenti Eisenstein esetet általánosítja csúcsformákra. Ennek megfelelő megfogalmazásához definiálnunk kell a $\Lambda_D = \Gamma\backslash\mathcal{Q}_D$ halmaz, ami egy Abel-csoport a Gauss által felfedezett kompozícióra nézve [46], másodrendű, ún. génuszkaraktereit. Ezek bijekcióban állnak a $D = d'd$ faktorizációkkal, ahol d-ről feltesszük, hogy fundamentális diszkrimináns. Ha $Q = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, legyen [12, 49]

$$\chi(Q) = \left(\frac{D}{m}\right),$$

ha $(A, B, C, D) = 1$, és m a Q értékkészletében olyan szám, amire $(m, D) = 1$, és 0, ha $(A, B, C, D) > 1$.

A Katok-Sarnak formula [32], illetve általánosításai pl. [6] szerint, ha $\psi(z) = \sum_{n \neq 0} b(n) W_{\frac{1}{4} \operatorname{sign} n, \frac{ir}{2}}(4\pi |n| y) e(nx)$ egy Hecke-sajátfüggvény, aminek Shimura-kapcsoltja φ, akkor $d', d > 0$ esetén

$$12\sqrt{\pi} |D|^{\frac{3}{4}} b(d) \overline{b(d')} = \langle \varphi, \varphi \rangle^{-1} \sum_{Q \in \Lambda_D} \chi(Q) \int_{C_Q} \varphi(z)\, ds.$$

A $D < 0$ esetben is fennáll egy azonosság. Ha $Q = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \in \mathcal{Q}_D$, legyen $z_Q = \frac{-B+\sqrt{D}}{2A} \in \mathcal{H}$ és ω_Q a Γ_Q elemszáma. Ekkor, azaz a $dd' < 0$ esetben,

$$6|D|^{3/4} b(d) \overline{b(d')} = \langle \varphi, \varphi \rangle^{-1} \sum_{Q \in \Lambda_D} \chi(Q) \omega_D^{-1}\, \varphi(z_Q).$$

A $d, d' > 0$ eset hiányzik ezekből a formulákból, a ciklusintegrálok átlagai ilyenkor triviálisokból eltűnnek. A [19] cikkben megmutattuk, hogy ebben az esetben is van formula a $b(d)\overline{b(d')}$ szorzatra, ezúttal a Shimura-kapcsolt függvény parciális deriváltjaiból előállított invariáns differenciálforma ciklusintegráljaként.

A fő eredmény, ami a Shimura-kapcsolat létét is bizonyítja, az alábbi

1. Tétel ([19]). *Legyen*

$$\varphi(z) = 2y^{1/2} \sum_{n\neq 0} a(n) K_{ir}(2\pi|n|y) e(nx)$$

egy páros Hecke-normalizált Γ-invariáns csúcsforma. Ekkor létezik egy egyértelmű $F(z)$, a $\Gamma_0(4)$-re nézve 1/2-súlyú moduláris forma, aminek Fourier-kifejtése

$$F(z) = \sum_{\substack{n\equiv 0,1 \pmod 4\\ n\neq 0}} b(n) W_{\frac{1}{4}\operatorname{sgn} n, \frac{ir}{2}}(4\pi|n|y) e(nx),$$

ahol bármely d, d' relatív prím fundamentális diszkrimináns esetén fennáll, hogy

$$12\sqrt{\pi}|D|^{\frac{3}{4}}\, b(d')\bar{b}(d) = \langle\varphi,\varphi\rangle^{-1} \sum_{Q\in\Lambda_D} \chi(Q) \begin{cases} \int_{C_Q} \partial_z\varphi(z) y^{-1}|dz| & \text{ha } d', d < 0 \\ \int_{C_Q} \varphi(z) y^{-1}|dz| & \text{ha } d', d > 0 \\ 2\sqrt{\pi}\,\omega_D^{-1}\, \varphi(z_A) & \text{ha } d'd < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

ahol χ a $D = d'd$ faktorizációhoz tartozó génuszkarakter. Itt $\langle F, F\rangle = \int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}} |F|^2 d\mu = 1$ és a $b(dm^2)$ értékek ($m \in \mathbb{Z}^+$) kielégítik a

$$m \sum_{\substack{n|m\\ n>0}} n^{-\frac{3}{2}} \left(\tfrac{d}{n}\right) b\left(\tfrac{m^2 d}{n^2}\right) = a(m) b(d)$$

Shimura-relációkat.

A $|b(d)|^2$ értéke szintén meghatározható ld. pl. [32, 3]. A jelenlegi kontextusban a fenti jelölést használva

$$12\pi|d||b(d)|^2 = \langle\varphi,\varphi\rangle^{-1}\Gamma(\tfrac{1}{2} + \tfrac{ir}{2} - \tfrac{\operatorname{sign} d}{4})\Gamma(\tfrac{1}{2} - \tfrac{ir}{2} - \tfrac{\operatorname{sign} d}{4}) L(\tfrac{1}{2}, \varphi, \chi_d),$$

ahol

$$L(s, \varphi, \chi_d) = \sum_{n\geq 1} \chi_d(n) a(n) n^{-s}.$$

Az azonosság legfontosabb alkalmazása, hogy szubkonvex becslések pl. [7] alkalmazásával egyenletes eloszlásokat lehet bizonyítani. A fenti típusú tételeknek hosszú története van, különös tekintettel a holomorf esetre. Néhány fontos korai eredmény Kohnen és Zagier [34], Shintani [42] és Waldspurger [47].

4. Geometriai eloszlás-problémák

A klasszikus Katok-Sarnak formulák azonnal értelmezhetők bizonyos eloszlási problémák tükrében.

Ha $D < 0$, vegyük a $\{z_Q : Q \in \Gamma\backslash\mathcal{Q}_D\}$ véges halmazt és azt a μ_D valószínűségi mértéket, ami minden z_Q-hoz $\frac{1}{h(D)}$ súlyt rendel, azaz ami folytonos $f \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathcal{H})$ függvényhez a

$$\frac{1}{h(D)} \sum_{Q\in\Gamma\backslash\mathcal{Q}_D} f(z_Q)$$

értéket rendeli. Hasonlóképpen ha $D > 0$, vegyük a $\{C_Q : Q \in \Gamma\backslash\mathcal{Q}_D\}$ íveket, és most a μ_D valószínűségi mérték rendelje f-hez a

$$\frac{1}{h(D)} \sum_{Q\in\Gamma\backslash\mathcal{Q}_D} \int_{C_Q} f(z)\, ds$$

értéket.

Duke egy fontos tétele [15] szerint ezek a mértékek a természetes $\mu = \frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2}$ hiperbolikus mértékhez tartanak, ahogy $D \to \pm\infty$ fundamentális diszkriminánsokon keresztül. Ez a tétel továbbra is élénk kutatás tárgya, ld. pl. [20] (a 4 szerző közül kettő Fields-érmes).

Felmerül a kérdés, hogy az új esetben, amikor a $d, d' > 0$, az általunk felfedezett új azonosságnak van-e geometriai alkalmazása. A [19] cikkben konstruáltunk egy olyan véges hiperbolikus területtel rendelkező felületet, aminek természetes immerziója a $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ térbe a C_Q zárt geodetikust határolja, és amihez tartozó átlagolt mértékek szintén az invariáns hiperbolikus mértékhez tartanak.

Legyen $w_Q(z)$ a C_Q zárt geodetikus körülfordulási száma a z pont körül. A Green-tétel szerint

$$\int_{C_Q} g(z)dz = 2i\int_{\mathcal{F}} w(z)y^2\partial_{\bar{z}}g\frac{dxdy}{y^2},$$

ahol $\partial_{\bar{z}}g = \frac{1}{2}(\partial_x g + i\partial_y g)$.

Ha $g(z) = \partial_z u$, akkor $y^2\partial_z\partial u = \Delta_{\mathcal{H}}u$, tehát egy sajátfüggvényre

$$\sum_{Q\in\Lambda_D}\chi(Q)\int_{C_Q}\partial_z\varphi(z)dz = \tfrac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{F}}\varphi(z)\sum_{Q\in\Lambda_D}\chi(Q)w_Q(z)d\mu.$$

Továbbra is felvetődik, hogy a fenti előjeles mérték realizálható-e egy felület immertálásával. Elég ezt virtuálisan megoldani, azaz elég olyan felületet találni, amelyre az immerzió előre tolása egy additív konstans erejéig megegyezik a $\sum_{Q\in\Lambda_D}\chi(Q)w_Q(z)$ sűrűségfüggvénnyel. Jogos elvárás, hogy ez a felület aritmetikusan legyen definiálva. A következőkben az erre a kérdésre adott pozitív választ ismertetem.

Legyen adott egy Q kvadratikus alak, $\sigma_Q \in \Gamma$ a hozzátartozó hiperbolikus elem (2.8). A Q osztályát jelölje A. Az A-ban levő kvadratikus alakokhoz tartozó hiperbolikus elemek a σ_Q Γ-konjugáltjaiból állnak. Mivel $S = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ és $T = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ generálja Γ-t, minden $\gamma \in \Gamma$ előáll $T^{m_1}ST^{m_2}S...ST^{m_l}$ alakban, ahol $m_j \in \mathbb{Z}$. Már klasszikusan ismert volt [31], hogy γ konjugált egy olyan elemmel, ahol $m_j \in \mathbb{N}$. Feltehető tehát, hogy σ_Q ilyen alakú. Legyen

$$S_k = T^{(n_1+\cdots n_k)}ST^{-(n_1+\cdots n_k)}$$

és

$$\Gamma_A = \langle S, S_1, \ldots, S_{\ell-1}, T\rangle, \tag{4.1}$$

ahol $m = m_1 + ... + m_l$.

Legyen $\mathcal{N}_Q = \mathcal{N}_{\Gamma_Q}$ a Γ_A csoport Nielsen-tartománya [4], és $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{\Gamma_A}$ az ennek megfelelő felület.

2. Tétel ([19])**.** *A (4.1)-ban definiált Γ_A csoport egy második típusú Fuchs-csoport, aminek szignatúrája*

$$(0; \underbrace{2, \ldots, 2}_{\ell}; 1; 1).$$

Azaz az $\mathcal{F}_A$ hiperbolikus Riemann-felület génusza 0, ℓ másodrendű pontot, egy csúcsot, és egy határoló görbét tartalmaz. A $\partial\mathcal{F}_A$ határ egy zárt geodetikus, aminek a képe $\mathcal{F}$-ben $\mathcal{C}_A$. Továbbá

$$\text{hossz}(\partial\mathcal{F}_A) = 2\log\epsilon_D \quad \textit{és} \quad \text{terület}(\mathcal{F}_A) = \pi\ell.$$

Az $\mathcal{F}_A$ Riemann-felület konform osztálya meghatározza A-t.

A fő eredmény ami összeköti a fenti Riemann-felületet a Katok-Sarnak típusú formulákkal a következő. Tegyük fel, hogy $F(z)$ valós analitikus Γ_A-invariáns függvény $\mathcal{H}$-n, amire fennáll, hogy

$$\Delta F = -y^2(F_{xx} + F_{yy}) = s(1-s)F$$

és a következő nagyságrendi feltétel: $\int_0 \partial_z F(x+iY)dx = o(1)$, amint $Y \to \infty$. Ekkor

$$\tfrac{s(1-s)}{2} \int_{\mathcal{F}_A} F(z)d\mu(z) = \int_{\partial\mathcal{F}_A} i\,\partial_z F(z)dz.$$

Legyen most

$$\mathrm{Weyl}(u,\chi) = \sum_{A\in \mathrm{Cl}^+(\mathbb{K})} \chi(A) \begin{cases} \frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{F}_A} u(z)d\mu(z) & \text{ha } d', d < 0 \\ \int_{\partial\mathcal{F}_A} u(z)\,ds & \text{ha } d', d > 0 \\ \frac{1}{\omega_D}\, u(z_A) & \text{ha } d'd < 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

($\omega_{-3} = 3$ és $\omega_{-4} = 2$ egyébként $\omega_D = 1$.)

Itt $u(z)$ vagy $E(z, 1/2+it)$ alakú, vagy $\langle\varphi,\varphi\rangle^{-1}\varphi(z)$ egy Hecke-normalizált φ sajátfüggvényre. A spektrális felbontás (2.2) miatt, felhasználva, hogy $E(z,s) \in L^1(\mathcal{F}_A)$ ha $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, az egyenletes eloszlásról szóló Weyl-kritérium moduláris változatában a fenti $\mathrm{Weyl}(u,\chi)$ integrálokat kell megbecsülni nemtriviálisan a D paraméterben, egyenletesen a spektrális paraméterekben. Így a következő tételt kapjuk.

3. Tétel ([19])**.** *A $D > 1$ fundamentális diszkriminánshoz válasszunk egy G_D génuszt a $\Gamma\backslash\mathcal{C}$-ben. Legyen Ω egy nyílt körlap az $\mathcal{F}$ fundamentális tartományban, és legyen $\Gamma\Omega$ az Ω Γ-eltoltjaiból álló invariáns halmaz. Ekkor*

$$\tfrac{\pi}{3}\sum_{A\in G_D} \text{terület}(\mathcal{F}_A\cap\Gamma\Omega) \sim \text{terület}(\Omega)\sum_{A\in G_D}\text{terület}(\mathcal{F}_A), \tag{4.3}$$

ahogy $D\to\infty$ fundamentális diszkriminánsokon keresztül.

5. A Klein-féle invariáns ciklusintegráljai és ál-moduláris formák

Legyen $q = e^{2\pi i z}$,

$$E_4(z) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}, \qquad E_6(z) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^n}{1-q^n},$$

és

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728}\left(E_4^3(z) - E_6^2(z)\right).$$

A Klein féle j-invariáns

$$j(z) = \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$$

az elliptikus görbék leírásában játszik alapvető szerepet. Ezenkívül számos érdekes problémánál bukkan fel, például Hermite megmutatta, hogyan oldható meg a j-függvénnyel az ötödfokú egyenlet, Picard a j-függvény felhasználásával bizonyította a kis Picard-tételt. A j függvény Fourier-együtthatói a Monster-csoport irreducibilis reprezentációinak dimenzióival is szoros kapcsolatban állnak. (Az erre vonatkozó sejtést Borcherds (szintén Fields-érmes) bizonyította.)

A számunkra legfontosabb alkalmazás Kronecker "ifjúkori álmához" fűződik, ez a $j(z_Q)$ értékek algebrai számelméletének megértése. Ez a probléma az egyik fő motivációja volt az osztálytest-elméletnek, amit klasszikusan Hilbert, Takagi, Artin dolgoztak ki.

Tegyük fel, hogy $D < 0$. Ha $Q \in \mathcal{Q}_D$ (2.7) és z_Q a $Q(z,1)$ polinom egy $\mathcal{H}$-ban fekvő gyöke, akkor a $j(z_Q)$ számok algebrai egészek, amik egy $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-invariáns halmazt alkotnak. Emiatt a

$$\mathrm{Tr}_D(j_1) = \sum_{Q\in\Gamma\backslash\mathcal{Q}_D} |\Gamma_Q|^{-1} j_1(z_Q)$$

kifejezés értéke (közönséges) egész. (Itt a $j_1 = j - 744$ függvényt technikai okokból egyszerűbb használni.)

Zagier egy tétele szerint [50] ezek az egész számok egy $\mathbf{T}_-(z) \in M^!_{3/2}$, 3/2-súlyú gyengén holomorf moduláris forma Fourier-együtthatóit adják meg :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_-(z) &= -q^{-1} + 2 + \sum_{D\le 0} \mathrm{T}r_d(j_1) D q^{|D|} \\ &= -q^{-1} + 2 - 248\,q^3 + 492\,q^4 - 4119\,q^7 + 7256\,q^8 + \cdots .\end{aligned} \tag{5.1}$$

Zagier munkája szorosan kapcsolódik Borcherds elméletéhez [10].

Egy természetes kérdés a Katok-Sarnak formulák tükrében, hogy vajon megfogalmazható-e hasonló eredmény a $\mathrm{T}r_D(j_1)$ ciklusintegrálokra is, ahol

$$\mathrm{T}r_D(j_1) = \tfrac{1}{2\pi} \sum_{Q\in\Gamma\backslash\mathcal{Q}_D} \int_{C_Q} j_1(z) \tfrac{dz}{Q(z,1)}.$$

($D > 0$, de nem négyzet-szám.)

A [17] cikkben megmutattuk, hogy ezek a ciklusintegrálok ál-moduláris formák Fourier-együtthatóit adják meg. Ugyanebben a cikkben a Borcherds-féle eredményeket is általánosítottuk a $D > 0$ esetre.

Legyen $J(\gamma, z) = \theta(\gamma z)/\theta(z)$ és $M^!_{3/2}$ azon $g(z) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n\, q^n$ alakú függvények, amikre $g(\gamma z) = J^3(\gamma, z) g(z)$. Minden $g \in M^!_{3/2}$ függvényre definiáljuk az Eichler-integrálját a

$$g^*(z) = -4\sqrt{y} \sum_{n\le 0} b_n\, \mathcal{E}(4ny)\, q^{-n} + \sum_{n>0} \frac{b_n}{\sqrt{n}}\, \beta(4ny) q^{-n} \tag{5.2}$$

képlettel. Legyen $f(z) = \sum_{n=n_1} a_n q^n$ olyan, hogy az a_n együtthatók csak akkor lehetnek zérustól különbözők, ha $n \equiv 0, 1 \pmod 4$.

Az $f(z)$ függvényt 1/2-súlyú ál-moduláris formának hívjuk a $\Gamma_0(4)$-ra nézve, ha van olyan $g \in M^!_{3/2}$, az f ún. árnyéka, amelyre

$$\hat{f}(z) = f(z) + g^*(z)$$

1/2-súlyú $\Gamma_0(4)$-ra nézve. Az ál-moduláris formák terét jelölje $\mathbb{M}_{1/2}$.

A [17] cikkben megmutattuk, hogy a

$$\mathbf{T}_+(z) = \sum_{d>0} \mathrm{T}r_d(j_1) q^d \tag{5.3}$$

generátor-függvény, (a $\mathrm{T}r_d(j_1)$ megfelelő definiálásával a négyzetszámokra) 1/2-súlyú ál-moduláris formát határoz meg, aminek árnyéka a (5.1)-beli $\mathbf{T}_-(z)$.

4. Tétel ([17])**.** *A $\widehat{\mathbf{T}}_+(z) : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ függvényt definiáljuk a*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{T}}_+(z) &= \mathbf{T}_+(z) + \mathbf{T}^*_-(z) \\ &= \sum_{d>0} \mathrm{T}r_d(j_1)\, q^d + 4\sqrt{y}\,\mathcal{E}(-4y)\, q - 8\sqrt{y} + \sum_{d<0} \frac{\mathrm{T}r_d(j_1)}{\sqrt{|d|}}\, \beta(4|d|\, y)\, q^d\end{aligned}$$

Fourier-sorral. Ekkor $\widehat{\mathbf{T}}_+(z)$ egy 1/2 súlyú harmonikus forma a $\Gamma_0(4)$ csoportra nézve.

Zagier[50] és Borcherds[10] munkáit tovább általánosítva a

$$\mathrm{Tr}_{d,d'}(j_m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum \chi(Q)|\Gamma_Q|^{-1} j_m(z_Q), & \text{ha } dd' < 0 \text{ ;} \\ \frac{1}{2\pi} \sum \chi(Q) \int_{C_Q} j_m(z) \frac{dz}{Q(z,1)} & \text{ha } dd' > 0, \end{cases}$$

ciklusintergálokról is beláttuk, hogy azok 1/2-súlyú harmonikus formák Fourier együtthatói, akárcsak a Katok-Sarnak formulákban.

A [17] cikkben még egy váratlan kapcsolatot fedeztünk fel ál-moduláris formák és racionális periódus függvények (RPF) között. Ezekről bővebben, a következő részben számolunk be, de a kiinduló felfedezés szoros kapcsolatban áll a j-függvény ciklusintegráljaival.

Definiáljuk $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ esetén az

$$F_d(z) = -\mathrm{Tr}_d(1) - \sum_{m \geq 1} \Big(\sum_{n|m} n\, a(n^2, d) \Big) q^m \tag{5.4}$$

függvényt. Vegyük észre, hogy $F_d(z)$ az f_d formális Shimura-kapcsoltjának a deriváltja. A $d < 0$ esetben Borcherds megmutatta, hogy F_d egy meromorf 2-súlyú moduláris forma Γ-ra nézve, aminek egyszeres pólusai vannak a d diszkriminánshoz tartozó $z_Q \in \mathcal{H}$ pontokban $|\Gamma_Q|^{-1}$ reziduummal. Ezért a

$$q^{-\mathrm{Tr}_d(1)} \prod_{m \geq 1} (1 - q^m)^{a(m^2, d)}$$

végtelen szorzatnak is hasonló tulajdonságai vannak. A $d = 0$ esetben ez a szorzat $\Delta(z)^{1/12}$, és így azt kapjuk, hogy

$$F_0(z) = \tfrac{1}{12} - 2 \sum_{n \geq 1} \sigma(m) q^m = \tfrac{1}{12} E_2(z).$$

Ez egy úgynevezett 2-súlyú moduláris integrál, aminek periódusfüggvénye:

$$F_0(z) - z^{-2} F_0(-\tfrac{1}{z}) = -\tfrac{1}{2\pi i}\, z^{-1}$$

racionális függvény.

5. Tétel ([17])**.** *Legyen $d > 0$ nem négyzetszám, és legyen F_d a (5.4)-ban definiált függvény. Ekkor*

$$F_d(z) - z^{-2} F_d(-\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{c<0<a \\ b^2-4ac=d}} (az^2 + bz + c)^{-1}. \tag{5.5}$$

Az $F_d(z)$ függvény Fourier-kifejtése megadható az

$$F_d(z) = -\sum_{m \geq 0} \mathrm{Tr}_d(j_m)\, q^m$$

alakban is.

6. A geodetikus folyam és moduláris kociklusok

A geodetikus folyam vizsgálata hiperbolikus sokaságokon Hadamard-ig nyúlik vissza [8], a $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ esetet először Artin vizsgálta [1]. Az egységhosszú érintővektorok tere a jobboldali mellékosztályokból álló $M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ faktortér, ami mint 3-sokaság diffeomorf a háromlevelű csomó S^3-beli komplementerével. Ennek a ténynek a bizonyítása (amit Milnor Quillennek tulajdonít) megtalálható például a [36] könyvben.

A zárt geodetikusok a geodetikus folyam érdekes periodikus pályáit adják. Tegyük fel, hogy $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ egy primitív hiperbolikus elem aminek egyik sajátértéke $\epsilon > 1$. Rögzítsünk egy $g \in G$ elemet oly módon, hogy $g^{-1}\gamma g = \left(\begin{smallmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \end{smallmatrix}\right)$. Ekkor

$$\Gamma g \mapsto \Gamma g \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$t \in [0, \log \epsilon]$ egy primitív periodikus pálya $\Gamma\backslash G$-ben, amely csak a γ konjugáltosztályától függ. Ezen periodikus pályákat moduláris csomóknak hívjuk. 2006-os ICM előadásában [25] Ghys a moduláris csomók és a háromlevelű csomó hurkolódási számát [24] vizsgálta, és észrevette, hogy ezek a számok szorosan kapcsolódnak a

$$\int_{z_0}^{\gamma z_0} \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} dz$$

ciklusintegrálokhoz. (Az integrál nem tűnik el, mert $\Delta'(z)dz/\Delta(z)$ nem invariáns.) A fenti ciklusintegrálokra fennáll, hogy

$$\log \Delta(\gamma z) - \log \Delta(z) - 6 \log(-(cz+d)^2) = 2\pi i \Phi(\gamma),$$

egy csak γ-tól függő $\Phi(\gamma)$ konstanssal, amire Dedekind adott először formulát [13].

A Dedekind-szimbólum $\Phi(\gamma)$ számos egymástól távol álló területen is meglepően fontos szerepet játszik [2]. Ghys észrevétele az volt, hogy egy moduláris csomó $\Psi(\gamma)$ hurkolódási száma a háromlevelű csomóval megegyezik a Dedekind-szimbólum homogenizáltjával, azaz

$$\Psi(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(\gamma^n)}{n}.$$

Cikkének végén Ghys megemlíti a moduláris csomók egymással való hurkolódási számának kérdését. Különösen érdekes a kérdés a moduláris formák oldaláról vizsgálva.

A [18] cikket, amiben a Dedekind-szimbólum megfelelő általánosítása szerepel, ez a kérdés motiválta. Az általános szimbólum homogenizáltja szintén hurkolódási számhoz vezet, két szimmetrizált moduláris lánc hurkolódási számára.

A cikk a Dedekind-szimbólum megfelelő újraértelmezésén alapul, a Dedekind-szimbólum egy olyan 0-súlyú moduláris kociklus határértéke, aminek a deriváltja $\frac{12c}{cz+d}$. Ez a határérték létezik és egy egész szám, és a szimbólum homogenizáltja ismét egy egész, ami megadja a háromlevelű csomóval vett hurkolódási számot.

Legyen $\mathcal{P}$ azon $\mathcal{H}$-n értelmezett holomorf függvények tere, amikre fennáll, hogy $f(z) \ll y^\alpha + y^{-\alpha}$ valamely α-ra, ami függhet f-től. Ha k egy páros egész szám, akkor $\gamma \in \Gamma$ k-súlyú hatása $\mathcal{P}$-n az $f|_k\gamma = (cz+d)^{-k} f(\gamma z)$. Egy k-súlyú 1-kociklus a Γ csoporton ($\mathcal{P}$-ben) egy $\Gamma \to \mathcal{P}$, $\gamma \mapsto r(\gamma, z)$ leképezés amire

$$r(\sigma\gamma, z) = r(\sigma, z)|_k\gamma + r(\gamma, z)$$

minden $\gamma, \sigma \in \Gamma$ esetén.

Ha $r(\gamma, z)$ egy 2-súlyú kociklus, akkor létezik egy egyértelmű 0-súlyú 1-kociklus $R(\gamma, z)$, amire

$$\frac{d}{dz} R(\gamma, z) = r(\gamma, z),$$

(Az egyértelműség abból következik, hogy $H^1(\Gamma, \mathbb{C}) = \{0\}$.) Az $R(\gamma, z)$ az $r(\gamma, z)$ primitívjének hívjuk.

A Dedekind-szimbólum szempontjából a releváns 2-súlyú kociklus $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ esetén

$$r(\gamma, z) = \frac{12c}{cz+d}.$$

Egy konstanstól eltekintve ez a $\frac{\Delta'}{\Delta}$ tramszformációs formulájában jelenik meg. Ennek egy primitívje

$$R(\gamma, z) = 6\log(-(cz+d)^2) + 2\pi i\Phi(\gamma),$$

ha $c \neq 0$, amiből megkapjuk a $\Phi(\gamma)$ limesz-előállítását:

$$\Phi(\gamma) = \tfrac{1}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \operatorname{Im} R(\gamma, iy). \tag{6.1}$$

Ghys hurkolódási formulájának általánosításához először minden $\operatorname{tr}\sigma > 2$ hiperbolikus elem $\mathcal{C}$ konjugált osztályához hozzárendeljük az alábbi 2-súlyú 1-kociklust Ha $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ és $c \neq 0$, akkor

$$r_{\mathcal{C}}(\gamma, z) := \varepsilon_{\mathcal{C}} \sum \left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w'} \right), \tag{6.2}$$

az összegzés olyan $\sigma \in \mathcal{C}$ elemekre, aminek w', w konjugált fixpontjaira fennáll, hogy $w' < -d/c < w$ és ahol

$$\varepsilon_{\mathcal{C}} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sigma \not\sim \sigma^{-1} \\ 2 & \text{ha } \sigma \sim \sigma^{-1} \end{cases}.$$

Egyébként, ha $c = 0$, $r_{\mathcal{C}}(\gamma, z) = 0$.

Az első fő eredmény az, hogy ez tényleg kociklus.

6. Tétel ([18])**.** *Legyen $r_{\mathcal{C}}(\gamma, z)$ mint fenn. Ekkor $r_{\mathcal{C}}(\gamma, z)$ 2-súlyú kociklus a Γ csoporton.*

Legyen $R_{\mathcal{C}}(\gamma, z)$ az a 0-súlyú 1-kociklus ami $r_{\mathcal{C}}(\gamma, z)$ primitív függvénye. Definiáljuk a $\mathcal{C}$ konjugált osztályhoz tartozó Dedekind-szimbólumot következőképpen

$$\Phi_{\mathcal{C}}(\gamma) = \tfrac{2}{\pi} \lim_{y\to\infty} \operatorname{Im} R_{\mathcal{C}}(\gamma, iy). \tag{6.3}$$

Megmutatható, hogy a fenti határérték létezik és $\Phi_{\mathcal{C}}(\gamma)$ egy egész szám.

A fenti $\Phi_{\mathcal{C}}$ szimbólum $\Psi_{\mathcal{C}}$ homogenizációja hurkolódási számként is értelmezhető. Habár a megközelítés itt kétdimenziós, egy ilyen eredmény nem váratlan. Egyrészről az $r_{\mathcal{C}}$ kociklus egy Green-függvény ciklusintegráljából származtatható. Másrészről ahhoz, hogy egy 3-sokaságban két ciklus hurkolódási számát definiáljuk, fel kell tennünk, hogy ezek 0-homológok. Ha a σ-hez és σ^{-1}-hez tartozó ciklusokat egy láncként tekintjük, akkor ez mindig 0-homológ, és a hurkolódási számuk megegyezik a vetületük tiszta (előjel nélküli) metszéspontjainak számával. Ez Birkhoff tétele [5]. Ezt és az új szimbólum tulajdonságait felhasználva a következő tétel áll fenn.

7. Tétel ([18])**.** *Legyenek $\mathcal{C}_\sigma$ és $\mathcal{C}_\gamma$ hiperbolikus konjugáltosztályok, és jelöljük ugyanígy a hozzájuk tartozó szimmetrikus láncokat is. Legyen*

$$\Psi_{\mathcal{C}_\sigma}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{\mathcal{C}_\sigma}(\gamma^n)}{n}.$$

Ez a határérték létezik és

$$Lk(\mathcal{C}_\sigma, \mathcal{C}_\gamma) = \Psi_{\mathcal{C}_\sigma}(\gamma).$$

7. Exponenciális összegek Weil-szögei

Legyenek $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}(x)$ racionális függvények, és D azon $x \bmod p$ elemek halmaza amelyben mind a, mind b definiált. Ha χ egy multiplikatív, ψ egy additív karakter $\bmod p$, akkor az

$$S(\chi, \psi; p) = \sum_{x\in D} \chi(a(x))\psi(b(x)) \tag{7.1}$$

összeget teljes exponenciális összegnek hívjuk. Weil [48] egy fontos tétele szerint (könnyen kezelhető triviális esetektől eltekintve)

$$S(\chi,\psi;p)=\sqrt{p}\sum_{k=1}^{n}e^{i\theta_k}$$

ahol n csak az $a(x), b(x)$ racionális függvényektől függ és a θ_k szögel valósak.

Amennyiben az exponenciális összegek egy családját vizsgáljuk, például az $a(x), b(x)$ függvények, a karakterek, vagy a p modulus változtatását, a $\theta_1, ...\theta_n$ Weil-szögek eloszlásáról fontos sejtések vannak [33]. Ezeket csak néhány speciális esetben sikerült igazolni, amik közül a legfontosabb az elliptikus görbék elméletében megjelenő összegek esete (Hasse). Legyen $(\frac{\cdot}{p})$ a Legendre-szimbólum, ekkor

$$H=\sum_{x \bmod p}\left(\frac{x^3+Ax+B}{p}\right)=2\sqrt{p}\,\cos\theta_p$$

(ismét triviális esetektől eltekintve). Ha az $y^2=x^3+Ax+B$ elliptikus görbének nincsenek nem-triviális automorfizmusai, a θ_p szöget $[0,\pi]$-ben választva azok az ún. Sato-Tate valószínűségi sűrűség szerint oszlanak el [43], azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi(x)}\#\{p\le x:\theta_p\in[\theta_1,\theta_2]\}=\frac{2}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin^2\theta\,d\theta.$$

Hasonló Sato-Tate eloszlást sejtenek a Γ-invariáns függvények elméletében megjelenő $K(m,n;p)$ Kloosterman-összegek esetében is, ahol

$$K(m,n;p)=\sum_{x\overline{x}\equiv 1\ (p)}e\left(\frac{mx+n\overline{x}}{p}\right)=2\sqrt{p}\cos\alpha_p.$$

Ez a sejtés még nyitott, de az 1/2-súlyú moduláris formák elméletében megjelenő változata, a Salié-összeg

$$S(m,n;p)=\sum_{x\overline{x}\equiv 1\ (p)}\left(\frac{x}{p}\right)e\left(\frac{mx+n\overline{x}}{p}\right)$$

(ahol $\left(\frac{x}{p}\right)$ ismét a Legendre-szimbólum) esetében az eloszlás ismert. Erről az összegről már Salié belátta, hogy

$$S(m,n;p)=2\sqrt{p}\cos(2\pi x/p)$$

ahol x az $x^2\equiv mn\ (p)$ megoldása. A bizonyítás legrövidebb változata a [45] cikkemben található.

A Salié-összegekről az $mn<0$ esetben Duke, Iwaniec és Friedlander [16] belátta, hogy azok Weil-szögei a Lebesgue-mérték szerint egyenletesen oszlanak el. A [44] cikkemben új bizonyítást adtam erre az eredményre, ami az $mn>0$ esetben is működik. Így a [44] cikk fő eredménye a Salié-összegek Weil-szögeiről szóló sejtés lezárása, az egyenletes eloszlás bizonyítása tetszőleges nem-négyzet mn esetére.

Ugyanez az eredmény egy másik kérdéskörhöz is kapcsolódik. Hooley [28] vette észre, hogy egy Erdőstől [21] származó probléma lényegében ekvivalens másodfokú polinomkongruenciák gyökeinek egyenletes eloszlásával. A legtermészetesebb, de legnehezebb eset, amikor a modulusok prímszámokon futnak végig. A [44] cikk ezt az általános sejtést is igazolja.

A Salié-összegek eloszlásának bizonyítása szita-módszereken alapul, Salié-összegek összegeit kell a paraméterekben megfelelően egyenletesen becsülni. A Poincaré-sorok ciklusintegráljai természetes módon vezetnek ilyen típusú összegekre, mint például az **??**. Tétel is. Ezeknek a kifejezéseknek a becslése nehéz, de ehelyett a Shimura-kapcsolat által motiválva, a Salié-összegek összegeit, Kloosterman-összegek összegeire tudjuk lecserélni. Az azonosság nem a spektrális elméleten hanem klasszikus algebrai számelméleten alapul. Az egyszerűség kedvéért a következő tételt csak az $S(D,1;n)$, $D>0$ esetre mondjuk ki.

8. Tétel ([44]). *Legyen q rögzített, és f olyan sima függvény aminek tartója, $\mathrm{supp} f \subset [qX, 2qX]$,*

$$\sum_{q|n} f(n)S(D,1;n) = \sum_{m,c} \frac{1}{c\sqrt{2Aw_c}} K_{\infty\mathfrak{c}}(m,k;c)G(m,c) + O(k \log X).$$

Itt $K_{\infty c}(m,k;c)$ egy általánosított Kloosterman-összeg egy a Γ-ben véges indexű, csak q-tól függő Γ_q részcsoportra; az összegben $m \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{c}$ egy kitüntetett csúcs, és $c \in qw\mathbb{Z}$, ahol w a $\mathfrak{c}$ csúcs szélessége. A G transzformált függvény

$$G(m,c) = \sum_{j=1}^{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(Q_j(c,y))\psi_j(\tfrac{y}{c})e\left(\frac{my}{2\alpha c}\right) dy$$

alakú, ahol Q_j a D diszkriminánsú kvadratikus alakok Γ_q osztályain fut végig, a ψ_j egy a Q_j Γ_q-beli stabilizátorához tartozó sima egységosztás.

A jobboldalon felmerülő összeg becslése, ahogy tipikusan Kloosterman-összegek összegeinek becslése, nehéz. A [14] módszert használva, beláttam a következő tételt:

9. Tétel ([44]). *Legyen $N, C \geq 1$, $G(n,c)$ tartója része $[N,2N] \times [C,2C]$-nek, és tegyük fel, hogy $i,j = 0,1,2$ esetén $\partial_n^i \partial_c^j G(n,c) \ll N^{-i}C^{-j}$. Legyen*

$$A = \sum_c \frac{1}{c} \sum_n a_n G(n,c) K_{ab}(m,n;c).$$

Ekkor

$$A \ll ||a|| \left\{ \left(1 + \frac{m}{q}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{N}{q}\right)^{1/2} + \frac{C^{1/2}}{q}(q+m)^{1/4}(q+N)^{1/4} \right\} \log^2(mNCq).$$

Ezek alapján a szita-módszer segítségével kapjuk a következő eredményeket.

10. Tétel ([44]).
1) Legyen $P(x) = Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{Z}[x]$ egy irreducibilis polinom. Ekkor az $\{\frac{x}{p} : p \text{ prím}, P(x) \equiv 0 \ (p)\}$ sorozat (a természetes rendezésben a p nevező szerint) a Lebesgue-mérték szerint egyenletesen oszlik el $\mathrm{mod}\, 1$.
2) Tegyük fel, hogy $m, n \in \mathbb{Z}$, és mn nem négyzetszám. Ekkor a Salié-féle $S(m,n;p)$ exponenciális összegekhez tartozó Weil-szögek egyenletesen oszlanak el.

Hivatkozások

[1] Artin, E., Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen. In Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg (Vol. 3, No. 1, pp. 170-175). Springer-Verlag. 1924.

[2] Atiyah, M., The logarithm of the Dedekind η-function. Math. Ann. 278, no. 1-4, 333–380, 1987.

[3] Baruch, E. M.; Mao, Z. A generalized Kohnen-Zagier formula for Maass forms. J. Lond. Math. Soc. (2) 82 (2010), no. 1, 1–16.

[4] Beardon, A. F. The geometry of discrete groups. Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, 1983.

[5] Birkhoff, G. D. "Dynamical systems with two degrees of freedom." Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 3.4 : 314, 1917.

[6] Biró, A. Cycle integrals of Maass forms of weight 0 and Fourier coefficients of Maass forms of weight 1/2. Acta Arith. 94 (2000), no. 2, 103–152.

[7] Blomer, V.; Harcos, G., Hybrid bounds for twisted L-functions. J. Reine Angew. Math. 621 (2008), 53–79. Addendum, ibid. 694 (2014), 241-244.

[8] Brin, M. and Stuck, G., 2002. Introduction to dynamical systems. Cambridge university press.

[9] Bringmann, K., Folsom, A., Ono, K. and Rolen, L., Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications (Vol. 64). American Mathematical Soc. 2017.

[10] Borcherds, R. E., Automorphic forms on $\mathrm{O}_{s+2,2}(R)$ and infinite products. Invent. Math. 120 (1995), no. 1, 161–213.

[11] Burgess, D. A. On character sums and L-series. Proc. London Math. Soc. (3) 12 1962 193-206.

[12] Cox, D. A. Primes of the form $x^2 + ny^2$. 1997.

[13] Dedekind, R., Gesammelte mathematische Werke. Chelsea Publishing Co., New York 1968 Vol. I. 159–173.

[14] Deshouillers, J.M. and Iwaniec, H.,Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. Inventiones mathematicae, 70(2), pp.219-288, 1982.

[15] Duke, W., Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms. Inventiones mathematicae, 92(1), pp.73-90, 1988.

[16] Duke, W., Friedlander, J.B. and Iwaniec, H., Equidistribution of roots of a quadratic congruence to prime moduli. Annals of Mathematics, 141(2), pp.423-441, 1995.

[17] Duke, W.; Imamoglu, Ö. and Tóth, Á. Cycle integrals of the j-function and mock modular forms. Ann. of Math. (2) 173 (2011), no. 2, 947–?981.

[18] Duke, W.; Imamoglu, Ö. and Tóth, Á. Modular cocycles and linking numbers. Duke Mathematical Journal, 166(6), pp.1179-1210, 2017.

[19] Duke, W., Imamoglu, Ö. and Tóth, Á., 2016. Geometric invariants for real quadratic fields. Annals of Mathematics, pp.949-990.

[20] Einsiedler, M., Lindenstrauss, E., Michel, P. and Venkatesh, A., The distribution of closed geodesics on the modular surface, and Duke's theorem. L'Enseignement Mathématique, 58(3), pp.249-313, 2012.

[21] Erdös, P.,On the Sum $\sum_{k=1}^{x} d(f(k))$. Journal of the London Mathematical Society, 1(1), pp.7-15, 1952.

[22] Farb, B.; Margalit, D. A primer on mapping class groups. Princeton Mathematical Series, 49. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. xiv+472 pp.

[23] Fay, J. D. Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group. J. Reine Angew. Math. 293/294 (1977), 143–203.

[24] Gauss,C. F. Note dated 22 Jan. 1833, in Werke, Vol. V, ed. C. Schafer Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Leipzig, Berlin, 1867.

[25] Ghys,E., Knots és dynamics. International Congress of Mathematicians. Vol. I, 247–277, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[26] Goldfeld, Dorian; Hoffstein, Jeffrey Eisenstein series of 1/2-integral weight and the mean value of real Dirichlet L-series. Invent. Math. 80, no. 2, 1985.

[27] E. Hecke, Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-Abelscher Körper, Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel 28, 363–372, 1917.

[28] Hooley, C., On the number of divisors of quadratic polynomials. Acta Mathematica, 110(1), pp.97-114, 1963.

[29] Iwaniec, H. Spectral methods of automorphic forms. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 53. American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2002. xii+220 pp.

[30] Iwaniec, H.; Kowalski, E. Analytic number theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp.

[31] Katok, S., Coding of closed geodesics after Gauss and Morse. Geometriae Dedicata, 63(2), pp.123-145, 1996.

[32] Katok, S.; Sarnak, P., Heegner points, cycles and Maass forms. Israel J. Math. 84 (1993), no. 1-2, 193–227.

[33] Katz, N.M.; Sarnak, P. Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy (Vol. 45). American Mathematical Soc. 1999.

[34] Kohnen, W.; Zagier, D. Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip. Invent. Math. 64 (1981), no. 2, 175–198. **??**

[35] Maass, H.Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Mathematische Annalen, 121: 141–183, 1946.

[36] Milnor, J., Introduction to algebraic K-theory. Annals of Mathematics Studies, No. 72. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971.

[37] NIST Digital Library of Mathematical Functions. http://dlmf.nist.gov/, Release 1.0.19 of 2018-06-22. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, and B. V. Saunders, eds.

[38] Rademacher, H.; Grosswald, E., "Dedekind Sums, The Carus Math." Monographs, MAA, 1972.

[39] Selberg, A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. The Journal of the Indian Mathematical Society 20.1-3: 47-87, 1956.

[40] Siegel, C.L. and Ramanathan, K.G., Advanced analytic number theory (Vol. 9). Bombay: Tata Institute of Fundamental Research. 1980.

[41] Shimura, G., On modular forms of half integral weight. Ann. of Math. (2) 97 (1973), 440–481.

[42] Shintani, Takuro, On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. Nagoya Math. J. 58 (1975), 83–126.

[43] Taylor, R., Automorphy for some l-adic lhats of automorphic mod l Galois representations. II. Publications mathématiques, 108(1), pp.183-239, 2008.

[44] Tóth, Á., Roots of quadratic congruences. International Mathematics Research Notices,(14), pp.719-739, 2000.

[45] Tóth, Á., On the evaluation of Salié sums. Proc. Amer. Math. Soc. 133 , no. 3, 643–645, 2005.

[46] Trhaković, M., Algebraic theory of quadratic numbers. Springer, 2013.

[47] Waldspurger, J.-L. Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. (French) [On the Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight] J. Math. Pures Appl. (9) 60 , no. 4, 375–484, 1981.

[48] Weil, A., On some exponential sums. Proceedings of the National Academy of Sciences, 34(5), pp.204-207, 1948.

[49] Zagier, D. B. Zetafunktionen und quadratische Körper. (German) [Zeta functions and quadratic fields] Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie. [An introduction to higher number theory] Hochschultext. [University Text] Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.

[50] Zagier, D., Traces of singular moduli. Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), 211–244, Int. Press Lect. Ser., 3, I, Int. Press, Somerville, MA, 2002.

[51] Zwegers, S. P. Mock θ-functions and real analytic modular forms. q-series with applications to combinatorics, number theory, and physics (Urbana, IL, 2000), 269–277, Contemp. Math., 291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.