Bírálói vélemény Tóth Árpád MTA doktori értekezéséről

Tóth Árpád „Cycle Integrals of Modular Forms” címmel nyújtott be MTA doktori pályázatot illetve értekezést. Az alábbiakban az értekezésről alkotott véleményemet foglalom össze.

Formai értékelés

A disszertáció angol nyelven íródott 125 oldalas mű, amely bevezetőből, hat fejezetből és egy függelékből áll. Az értekezés felépítése jól átgondolt és logikus. A történeti háttér bemutatása és a kapcsolódó irodalom feltérképezése sem hagy kívánnivalót maga után. Bár találtam néhány kisebb elírást, de ezeket fel sem sorolom: számuk nem túl magas, és azok a disszertáció mondanivalójának megértését nem befolyásolják. A szöveg nyelvi szempontból is megfelelő.

Összességében véleményem szerint a disszertáció formai szempontból gondos, jól felépített munka, amely jól fókuszáltan mutatja be a szerző tevékenységét a vizsgált témakörben.

Tartalmi értékelés

A disszertáció fejezeteit követve adom meg véleményemet.

A rövid, de tartalmas bevezetőben a szerző összefoglalja a disszertációban megjelenő kérdéseket és problémaköröket. Kiderül, hogy a vizsgált terület, a moduláris formák, illetve ezen belül azok ciklusintegráljainak elmélete egyrészt klasszikus gyökerekig nyúlik vissza, másrészt a modern matematika egyik legdinamikusabban fejlődő része. Utóbbit az is alátámasztja, hogy a terület kutatói között számos világviszonylatban jelentős matematikust találunk (említhetjük például Sarnak, Wiles vagy Zagier nevét), akik közül többen áttörő eredményeikért Fields medálban részesültek. Külön megemlítendő Wiles munkássága, aki a moduláris formák elméletének segítségével igazolta a Fermat-sejtést. Ennek fényében nem meglepő, hogy a téma fontos eredményei a legjelentősebb matematikai folyóiratokban látnak napvilágot. Már ezen a ponton megemlítem, hogy ez a helyzet a szerző eredményeivel is: a disszertáció alapját képező cikkek olyan neves általános szaklapokban jelentek meg, mint például az Annals of Mathematics (két cikk is itt jelent meg), a Duke Mathematical Journal, az International Mathematics Research Notices vagy a Proceedings of the American Mathematical Society. Az is kiderül, hogy a disszertáció fő témája a szerző moduláris formák bizonyos zárt görbék felett vett integráljaira vonatkozó eredményeinek bemutatása.

Világossá válik, hogy a témakört nem „elsőszámú szakértőként” ismerő olvasónak nem lesz könnyű dolga: a nyert eredmények megértéséhez (és persze, mindezek előtt ezek bizonyításához) mély és széleskörű geometriai, analitikus és számelméleti ismeretek szükségesek.

A disszertáció első fejezetében a szerző tömören összefoglalja az eredmények tárgyalásához szükséges alapvető fogalmakat és ismereteket a moduláris formák elméletéből. Ez a fejezet önmagában is jól mutatja, hogy a vizsgált terület milyen széles alapokon nyugszik: a fejezet 17 oldalas és 12 alfejezetre tagolódik. (Ezeket itt most tételesen nem sorolom fel, de valóban sokféle témakör kerül itt terítékre.)

A második fejezet vezérfonalát a Katok-Sarnak féle formulák illetve azok kiterjesztése, általánosítása jelenti. A kiindulópontot az a sokak által vizsgált probléma jelenti, hogy hogyan lehet leírni a különböző csoportokon vett automorf formák kapcsolatát. (A témakör kutatói közül néhány kiemelkedő név: Doi, Naganuma, Shimura, Shintani, Langlands, Waldspurger, Kohnen, Zagier, Katok, Sarnak és mások - igencsak illusztris lista.) Az eredmények jelentőségét azok fontos alkalmazásai mutatják (ezekről a későbbiekben még lesz majd szó). Leegyszerűsítve a fejezet fő eredményét, a következőről van szó. Hecke egy Dirichlet L-függvényekre vonatkozó klasszikus formuláját Katok és Sharnak kiterjesztette úgynevezett csúcsformákra. Ez a rendkívül fontos eredmény ugyanakkor bizonyos szempontból hiányos: nem terjed ki a d, d' fundamentális diszkriminánsértékek minden lehetséges értékére. Ezt a hiányosságot a szerzőnek sikerült kiküszöbölnie, és olyan általános eredményt igazolnia, amely a a d, d' minden lehetséges értékére fennáll. Ez a kiterjesztés az alkalmazások szempontjából is igen jelentős, erről éppen a következő fejezetben lesz szó.

A disszertáció harmadik fejezetében (éppen a második fejezetben található eredmények alkalmazásaként) geometriai eloszlás-problémákról és másodfokú algebrai számtestek egy új invariánsáról esik szó. Az régóta jól ismert, hogy a Katok-Sarnak formula azonnali választ ad egy bizonyos geometriai jellegű eloszlási problémára. Így adódik a kérdés: vajon a formulának a szerző által történt kiterjesztése bír-e valamilyen geometriai jellegű interpretációval, alkalmazással? A fejezetben bemutatott eredmények, konstrukciók alapján kiderül, hogy erre a kérdésre a válasz igenlő. Nevezetesen, a szerző másodfokú számtestekből kiindulva olyan hiperbolikus objektumokat definiál, melyek rendelkeznek az egyenletes eloszlás (moduláris) Weyl-kritériumával. Mivel itt meglehetősen sok technikai részlet merül fel, az eredmény pontos ismertetésétől eltekintek; csupán három dolgot szeretnék aláhúzni:

- önmagában ez a kérdéskör is igen fontos és sokak (köztük Fields medálosok) által kutatott,

- a szerző konstrukciója jól mutatja, hogy amellett, hogy korábban említett eredményei elméleti szempontból fontos kiterjesztései a korábbi eredményeknek, azok lényeges alkalmazásokkal is rendelkeznek,

- bár a konstrukció meglehetősen technikás és bonyolult, az végső soron aritmetikai eszközökkel történik, és önmagában is érdekes.

A negyedik fejezetben úgynevezett ál-moduláris formák kerülnek terítékre. Ezek az objektumok is klasszikusak: elsőként Ramanujan egy Hardyhoz írt levelében jelentek meg. Ezzel a problémakörrel is számos híres matematikus foglalkozott, említhetjük például Watson, Selberg, Andrews vagy Zagier nevét. Egészen a 2000-es évekig nem volt világos, hogyan is illeszthetők be ezek az objektumok az elmélet általános keretei közé, amikor is Zwegers megmutatta, hogy ezek az ál-moduláris formák egy bizonyos nem holomorf függvény hozzáadásával kiegészíthetők moduláris formává. A szerző ebben a témakörben is fontos eredményekkel rendelkezik. Egyrészt, megmutatta, hogy ál-moduláris formák Fourier-együtthatói leírhatók bizonyos ciklusintegrálok segítségével. Ennek segítségével sikerült kiterjesztenie Borcherds egy rendkívül fontos, elliptikus görbék j-invariánsaival kapcsolatos eredményét is. Emellett sikerült kapcsolatot találnia ál-moduláris formák és úgynevezett racionális periódus függvények között.

A disszertáció ötödik fejezetében a szerző moduláris ciklusokat és hurkolódási számokat vizsgál. Ez is egy fontos témakör; említhetjük például Dedekind vagy Ghys eredményeit. Még 2007-ben Ghys vette észre, hogy egy moduláris csomó hurkolódási száma a háromlevelű csomóval megegyezik a Dedekind-szimbólum homogenizáltjával. A szerzőnek sikerült kiterjesztenie Ghys hurkolódási formuláját moduláris csomókra. Ehhez többek között a Dedekind-szimbólum megfelelő általánosítására, illetve annak különböző tulajdonságainak igazolására is szükség volt.

A szerző a disszertáció utolsó, hatodik fejezetében is egy érdekes kérdéskört, nevezetesen kvadratikus kongruenciák gyökeinek eloszlását és ehhez kapcsolódóan Salié-összegeket vizsgál. Az eredmények igazolásához exponenciális összegek úgynevezett Weil-szögeinek vizsgálatán át vezet az út. Ebben a témakörben is számos fontos probléma és eredmény ismert, említhetjük például Hooley, Duke, Friedlander, Iwaniecz tételeit. A fejezet fő eredményeként a szerző megmutatja, hogy ha $P(x) = Ax^2+Bx+C$ és itt B^2-4AC nem négyzet, akkor a $P(\nu) \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia gyökei, ahol p végigfut egy (végtelen sok prímet tartalmazó) számtani sorozat prímelemein, p-vel való normálás után egyenletes eloszlásúak $[0, 1]$-ben a Lebesgue-mértékre nézve.

Megemlítendő, hogy ez a tétel kiterjesztése Duke, Friedlander és Iwaniecz egy hasonló, ám csupán a $B^2 - 4AC < 0$ esetben igazolt eredményének.

A függelékben bizonyos speciális függvényekre vonatkozó összefüggések kerülnek felsorolásra.

Összegzésként, véleményem szerint *formai szempontból* a disszertáció egy jól felépített, színvonalas mű. Emellett *tartalmi szempontból* megállapítható, hogy a szerző önmagukban és az alkalmazások szempontjából is jelentős, nemzetközi szinten is magasan jegyzett eredményekkel rendelkezik a modern matematika (klasszikus gyökerekig visszanyúló) egyik kiemelten fontos területén, a moduláris formák elméletében. A disszertációban szereplő tételek mindegyikét elfogadom önálló, új eredménynek, és véleményem szerint ezek összességében mindenképpen alkalmasak az „MTA doktora" cím elnyerésére. Így a fentiek alapján határozottan javaslom a nyilvános vita lefolytatását, illetve (sikeres védés esetén) Tóth Árpád számára az „MTA doktora" cím odaítélést.

A szerzőhöz az alábbi kérdést fogalmazom meg.

Kérdés. Lát-e lehetőséget arra, hogy a disszertációban bemutatott eredmények (Wiles eredményeihez hasonlóan) a Diofantikus számelméletben, ezen belül esetleg a Diofantikus egyenletek elméletében is alkalmazást nyerjenek?

Debrecen, 2019. március 28.

(Dr. Hajdu Lajos)
az MTA doktora