

Nemegyensúlyi termomechanika

Ván Péter

MTA doktori értekezés tézisei

MTA Wigner FK RMI,
BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék,
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

1. Előzmények

Termodinamika

A nemegyensúlyi termodinamika a múlt század hatvanas évekre lényegében tisztázta a lokális egyensúly hipotézisének segítségével megkapható anyagmodellek körét. A lokális egyensúly meghaladására két módszer merült fel. Egyrészt az egyensúly fogalmának általánosítása az állapottér kiterjesztésével, másrészt a lokalitás meghaladása az állapothatározók deriváltjaitól függő anyagmodellek (és anyagok) keresésével és felismerésével. Az első módszert általában *belső, vagy dinamikai változók módszereként* ismerjük, a második jellemzésére pedig a *gyengén nemlokális* jelzőt használjuk. Az állapottér kibővítése megköveteli, hogy keressük meg az új változók tér és időbeli változását leíró *fejlődési egyenleteket*. A két módszerrel kapott anyagmodellek jól elválaszthatóak egymástól, ha a gyenge nemlokális csak a térderiváltakra vonatkozik. Természetesen a relativisztikus elméletekben ez a megkülönböztetés szigorúan véve nem lehetséges és a nemrelativisztikus esetben sem problémamentes.

A hetvenes években a lokális egyensúly meghaladására kétféle stratégiával indult meg a kutatás. Egyrészt ekkor született a kinetikus elméleti alapokon álló – az áramsűrűségeket új változóként bevezető – *kiterjesztett termodinamika*. Ez az elmélet a termodinamikai állapotteret az extenzív mennyiségek áramsűrűségeivel bővítette ki és ezek fejlődési egyenleteire a momentum sorfejtés segítségével mérlegegyenletek hierarchikus rendszerét kapta. Azonban ennek a fajta kiterjesztésnek több korlátja is van. Egyrészt nem minden belső változó árama valaminek. Másodsorban a kiterjesztett termodinamika alapvetően lokális egyenletrendszerekre vezet, ezért számos jelenség, illetve a jelenséget leíró ismert elmélet sem illeszthető keretei közé. Harmadrészt pedig nemcsak ritka gázok esetén tapasztalunk eltérést a lokális egyensúlytól.

A másik kutatási irány, a *racionalis termodinamika* a fizikai elvek matematikai pontosításával kereste a továbblépés lehetőségeit. Számos nagyszerű eredménye mellett a gyengén nemlokális elméletek fejlődését a 1960-as évek végén gyakorlatilag befagyasztották az erős matematikai módszerekkel kapott olyan negatív eredmények, amelyek fizikailag indokolatlan hipotéziseken alapultak. Ilyen például a magasabbfokú rugalmasságtant tiltó Gurtin-tétel [E1], illetve az anyagi objektivitás elvének (az anyag vonatkoztatási rendszertől való függetlenségének) helytelen megfogalmazása [E2].

Ugyanebben az időszakban a hazai nemegyensúlyi termodinamikai kutatás ezzel rokon kérdéseket célzott meg. A disszipatív folyamatok variációs elveinek keresése a fizika disszipatív jelenségeket leíró fejlődési egyenleteinek eredetére vonatkozó programot jelentett. A belső változók kutatása pedig természetes módon vezetett a második főtétel kulcsszerepének felismeréséhez a fejlődési egyenletek felállításában. Ezek a vizsgálatok megmutatták, hogy az entrópiaáram konstitutív függvény is lehet, így a modellezési keretek jelentősen kibővíthetőek [E3,E4].

A 90-es évek végén világossá vált, hogy a kontinuumfizika klasszikus egyenleteinek térbeli gyengén nemlokális kiterjesztései sajátos kihívást jelentenek a nemegyensúlyi termodinamika számára [E5] és hogy a felmerülő megoldási ötle-

tek – például az úgy nevezett GENERIC (= General Equation for the Nonequilibrium Reversible-Irreversible Coupling) [E6,E7] – nem használják ki a nem-egyensúlyi termodinamika konstitutív elméletének lehetőségeit, elsősorban az entrópiaáram értelmezése miatt.

Technológia

Gyakorlati oldalról régóta folyamatos igény van a gyengén nemlokális anyagtörvények kidolgozására. Egyrészt a szilárd közegek szerkezeti változásainak modellezésekor a reológiai, homogén anyagjellemzést adó közönséges differenciálegyenletek nem csatolhatóak össze értelmesen a kontinuummechanika parciális differenciálegyenleteivel, vagy csak további ad hoc feltevések árán. Ez vezet fizikai oldalról a felosztásfüggés (mesh dependence) problémakörére a numerikus anyagmodellezésben. Másrészt, ha tisztán numerikus, mesterséges relaxációs csillapításokat vezetünk be dinamikus rugalmasságtani feladatok megoldásakor (pl. Kelvin-modellel), akkor kaphatunk fizikailag értelmetlen megoldásokat.

A termodinamikai módszertan univerzális eredményeket ad, bármilyen anyagot választhatunk alkalmazásnak. Például a kövek károsodásának, mikroropedezésének és tönkremenetelésének modelljeiben a szerkezeti változásokat jellemző extra állapotváltozók minden problémája megfigyelhető és azonosítható [E8]. Illetve a kvark-gluon plazma disszipációjának megértéséhez is ugyanazokat az elveket kell jobban megértenünk.

Téridő és disszipáció

A fentebb említett anyagi objektivitás elve – azaz az anyagtörvények vonatkoztatási rendszertől való függetlensége – fundamentális alapkőve a fizikának. Ennek ellenére eredeti megfogalmazásától kezdve erős kritika tárgya. Sem a fizikai jelentését sem matematikai megfogalmazását tekintve nem alakult ki egységes álláspont. Maga Noll is, aki ennek az elvnek első és máig legelfogadottabb formáját kidolgozta [E2], többször próbálkozott átfogalmazásával. Ennek a problémakörnek vizsgálatához erős eszközt szolgáltat a nemrelativisztikus, azaz Galilei-relativisztikus téridő matematikai modellje, amely a relativisztikus téridő fizikai tapasztalatait és fogalmi keretét használja a nemrelativisztikus esetben is. A modell keretein belül kovariáns, azaz vonatkoztatási rendszer független módon van lehetőség a nemrelativisztikus kontinuumok vizsgálatára [E9].

A speciális relativitáselmélet keretében leírt kontinuumok esetén az ismert és gyakorlatilag fontos anyagmodellek jóval egyszerűbbek a nemrelativisztikus modelleknél és az alapvető problémák másféle módon jelentkeznek. Ott az anyagtörvények objektivitását a kovariáns megfogalmazás lényegében biztosítja – pontosan ezeket a tapasztalatokat vihetjük át a nemrelativisztikus esetre –, viszont a kauzalitás és a stabilitás válik alapkérdéssé. A kauzalitás matematikai szempontból szimmetrikus, hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlet-rendszert követel meg. A stabilitás pedig szintén elvi kérdés homogén egyensúly esetén: alapvető fizikai és elsősorban termodinamikailag érthető elvárásunk, hogy egy disszipatív elmélet homogén egyensúlya ne robbanjon fel kis zavarok hatására.

Ezt a követelményt nevezzük generikus stabilitásnak.

A disszipatív folyadékok első relativisztikus elméletét, a Fourier–Navier–Stokes-féle egyenletrendszer általánosítását, Eckart adta meg nemegyensúlyi termodinamikai módszerekkel 1940-ben [E10]. Ez az úgynevezett elsőrendű elmélet parabolikus, illetve a homogén egyensúlya generikusan instabil. Az első problémát, az elmélet akauzalitását Müller ötlete nyomán Israel és Stewart az elmélet hiperbolikusnak tűnő kiterjesztésével vélték megjavítani. Ez a kiterjesztett termodinamikai megközelítés egyúttal kompatibilis a kinetikus elmélettel és emiatt a megfelelő transzportegyütthatók egyszerű esetekben kiszámolhatóak. Azonban az Israel–Stewart-elmélet kauzalitási tulajdonságai nem világosak, csak a linearizált elmélet szimmetrikus hiperbolicitása van bizonyítva speciális feltételek esetén. Az Eckart-elmélet említett generikus instabilitását ugyan az Israel–Stewart-féle kiterjesztés elnyomja, de számos fizikailag értelmezhetetlen és bonyolult feltétellel. Az utóbbi évtizedben az első kísérletileg hozzáférhető relativisztikus folyadék, a kvark-gluon plazma kutatása jelentősen felélénkítette a disszipatív relativisztikus folyadékok vizsgálatát.

2. Kutatási célok

Mindhárom említett területen szerzett előzetes kutatási tapasztalataim azt jelezték, hogy a nemegyensúlyi termodinamika gyengén nemlokális kiterjesztésében az említett nemfizikai feltevések azonosíthatóak, feloldhatóak, és ezáltal az elmélet hatóköre jelentősen kiterjeszthető. A homogén testek nemegyensúlyi termodinamikájának területén végzett kutatások pedig megerősítették, pontosították és egyáltalán megfogalmazhatóvá tették a termodinamika területén sokszor és sokféle formában felbukkanó alaphipotézist, amelynek értelmében a második főtételek lényegében egy stabilitási állítás. Ennek fényében a 2000-es évek elejétől követett kutatási programom annak megértésére irányult, hogy tisztázzam a termodinamika második főtételeinek szerepét gyengén nemlokális kontinuumokra és ennek segítségével konstruktív módszertant dolgozzak ki, amely alkalmas elméleti úton anyagtörvények, illetve evolúciós egyenletek felállítására. A módszer ellenőrzését és finomítását kétféle megközelítéssel indítottam el.

Egyrészt célom a fizika számos területén található gyengén nemlokális anyagtörvények termodinamikai hátterének azonosítása, az új konstrukciós módszerrel a nemegyensúlyi termodinamika elméletébe történő beágyazása. Ez általában nem problémamentes, hiszen a második főtétele szerepe és követelményei nem mindig részei egy empirikus, vagy nem az elméleti termodinamikára épülő területnek. Viszont, ha a problémák feloldása sikeres, akkor az általános keret-egyenletek konkrétabb értelmet kapnak, például a bennük szereplő paraméterek kiszámolhatóak, illetve a speciális terület anyagtörvényei jelentősen általánosíthatóvá válnak. Ennek a stratégiának különös lehetőséget adott és egyúttal speciális kihívást jelentett, hogy 2005-től a relativisztikus disszipatív folyadékokkal is foglalkozom.

További lényeges célkitűzésem, hogy a fundamentális elméleti vizsgálatokkal elért eredményeket néhány speciális területen a kísérleti ellenőrzésig elvigyem. Két ilyen területen, a közetmechanikában és a hővezetés esetén, ez a szokásos fizikai kísérleteknél is többet jelentett, hiszen itt a mérnöki gyakorlatig ívelő

problémakidolgozást, illetve az onnan hozott gyakorlati problémák elvi azonosítását tette lehetővé ennek minden nehézségével és buktatójával együtt.

Összefoglalóan a kutatási célom az entrópiaáram általánosításával, az objektivitás értelmezésével és a mérnöki gyakorlat bevonásával a lokális egyensúlyon túllépő általános *a termodinamikai anyagelmélet kidolgozása*, ellenőrzése, valamint teljesítőképességének és érvényességi körének behatárolása a kontinuumfizika illetve a műszaki anyagtudomány legkülönbözőbb területein, mint például a nemrelativisztikus és relativisztikus hidrodinamika, rugalmasságtan, hőtan, reológia vagy a közet- és talajmechanika. Ennek a programnak legfontosabb eredményeit foglalja össze a dolgozatom.

3. Tézisek

1. Konstruktív módszert dolgoztam ki a klasszikus kontinuumfizika térben gyengén nemlokális elméleteiben az anyagi tulajdonságokat meghatározó konstitutív relációk meghatározására. A módszer a második főtétele alkalmazásán alapul, a racionális termodinamika Liu-eljárását terjeszti ki. A konstitutív állapottér szerkezetétől függően figyelembe veszi a kényszerek deriváltjait és az entrópiaáramot is konstitutív függvénynek tekinti. A módszer szerint kapott Liu-egyenletek megoldhatóak. A kapott disszipációs egyenlőtlenségnek is megkaphatjuk egy megoldását az irreverzibilis termodinamika erő-áram kapcsolatainak bevezetésével [T1].

Ezt a módszert alkalmaztam a következő esetekben:

- a) Megmutattam, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika lineáris elméletében a termodinamikai erők azonosítása az entrópikus intenzív állapotváltozók gradienseként és a termodinamikai áramok azonosítása az extenzív állapotváltozók áramsűrűségeként a konstitutív állapottér és a fejlődési egyenletek szerkezetéhez köthető. Az elsőrendűen térben nemlokális konstitutív állapottér és mérleg szerkezetű fejlődési egyenletek jelentik ennek legfontosabb feltételét [T2].
- b) Megmutattam, hogy egy belső változós, kényszer nélküli, másodrendűen gyengén nemlokális kontinuumelméletben a belső változó fejlődési egyenlete a második főtétele miatt az általános Ginzburg–Landau-egyenlet [T1,T3,T26], és a negyedrendűen gyengén nemlokális kontinuumelméletben egy extenzív belső változó fejlődési egyenlete az általános Cahn–Hilliard-egyenlet [T4].
- c) Megmutattam, hogy a belső változók fejlődési egyenletének megállapítására vonatkozó két legfontosabb módszer, a termodinamikai eredetű belső állapotváltozók módszere és a mechanikai eredetű dinamikai szabadsági fokok módszere speciális esetként adódnak a duális, másodrendűen gyengén nemlokális belső változók fejlődési egyenleteiből. Ebben a levezetésben kulcsfontosságú, hogy sem Onsager-, sem Casimir-típusú reciprocitási relációk nem szükségesek belső változók esetén [T5,T26].

- d) Levezettem a Korteweg-folyadékok nyomástenzorára vonatkozó termodinamikai kényszereket, és megmutattam, hogy a disszipációmentes esetben kapott gyengén nemlokális nyomástenzor divergenciája átalakítható erősűrűséggé, azaz egy megfelelő skalárpotenciál gradienseként származtatott fajlagos erő és a sűrűség szorzatává [T6]. Ez a feltétel biztosítja például a kvantumhidrodinamika Madelung-egyenletei, mint speciális Korteweg-folyadékok, és a Bohm-féle kvantummechanika mozgásegyenletei közötti egyenértékűséget.
 - e) Módszeremmel beláttam, hogy a gyengén nemlokális szimmetrikus másodrendű tenzori duális belső változókkal kiegészített kontinuummechanika a Mindlin-Eringen-Suhubi-féle mikrodeformáció elméletre vezet, termodinamikailag konzisztens új disszipatív tagokkal [T7].
 - f) Merev, izotrop hővezetőkben megmutattam, hogy a heurisztikus Nyíri-, illetve a Verhás-féle entrópiaáram-formák megfelelnek a szigorúbb Liu-eljárás alapján követelményeknek [T8]. Egy vektor belső változó segítségével elsőrendű gyenge nemlokalitás esetén levezettem egy új egyenletet, amely tartalmazza és általánosítja a hővezetés Guyer–Krumhansl-, Jeffreys-típusú és Green–Naghdi-féle egyenleteit [T9]. Ugyanezzel a módszerrel megmutattam, hogy a racionális kiterjesztett termodinamika hierarchikus, ritka és sűrű gázokra vonatkozó egyenletrendszerei általánosan beilleszthetők a nemegyensúlyi termodinamika elméletkörébe [T10,T11,T12].
2. Az általánosított hővezetési egyenlet univerzális, azaz csak a második főtétel alapján alapuló levezetése azt mutatja, hogy az egyenlet érvényessége független a hővezetés konkrét mechanizmusától. Ez alapján a Guyer–Krumhansl-egyenlet sem kötődik a fonon hidrodinamikához, ilyen jellegű hővezetést anyagi heterogenitások is okozhatnak, akár szobahőmérsékletű heterogén anyagok esetén is. Ennek a predikciónak megfelelően, a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszékén kifejlesztett hőimpulzus mérőberendezés segítségével végeztünk kísérleteket. Ezeknek a minta lehűlését is figyelembe vevő kiértékelésével igazoltam, hogy különféle mesterséges és természetes makroszkópikus mintákban fellép a Guyer–Krumhansl-egyenlettel jól modellezhető hővezetés [T13,T14,T15,T25,T26].
 3. Megmutattam, hogy az egykomponensű, speciális relativisztikus disszipatív folyadékok elméleteinek generikus instabilitása a termodinamikai alapok újraépítésével kiküszöbölhető.
 - a) Levezettem az Eckart-féle relativisztikus Gibbs-reláció általánosított változatát három különböző módon. A kinetikus elmélet [T19], a gyengén nemlokális kontinuumok második főtétel alapján alapuló konstitutív elmélete [T20, T26] és az energiaimpulzus-mérleg [T21] alapján ugyanarra az összefüggésre jutottam.
 - b) Bebizonyítottam, hogy az általánosított Gibbs-reláció segítségével levezetett elsőrendű, disszipatív, egykomponensű speciális relativisztikus

tikus folyadék generikusan stabil. Beláttam, hogy a generikus stabilitásnak általános áramlás esetén érvényes és csupán a termodinamika alapelveiből következő feltételei vannak: a folyadék termosztatikai stabilitása és a transzportegyütthatók nemnegativitása [T22,T23,T24].

4. Kiterjesztettem a Verhás-féle termodinamikai reológiai konstitutív elméletét rugalmas kontinuumokban.

- a) Megadtam az univerzális, termodinamikailag elsőrendű univerzális reológiai testet egy tenzoriális belső változó segítségével a korábban Kluitenberg és Verhás által is vizsgált rugalmas kontinuumokban, izotróp esetben bevezetve a térfogati reológiai viselkedést is [T16,T17,T25,T26].
- b) A megfelelő objektív időderiváltakkal a stacionárius egyszerű nyírás esetére alkalmaztam az egy belső változós termodinamikai reológiai modellt. Ennek segítségével megmutattam, hogy a viszkometrikus függvények kísérletileg ismert értékei helyesen adódnak, ellentétben a klasszikus, sem termodinamikai megalapozást, sem következetes objektív időderiváltat nem alkalmazó modellekkel [T18].

4. Alkalmazások

Az első tézispontban ismertetett módszer fundamentális jellegénél fogva számos szinten alkalmazható, a bemutatott tézis alpontokon felül is. Például az 1/c pontban ismertetett eredményeket felhasználva észt kollégáim számos eredményt értek el, az általánosított kontinuumok származtatásán túl a hullámterjedés, többskálás mikroszerkezet-modellezés, nemlokális hőterjedés és numerikus megoldások bizonyos problémáit kezelve [A1-8].

A célkitűzésben említetteknek megfelelően a leggyakorlatibb alkalmazásokat a kőzetreológiai kutatások jelentik. Ezeket részben összefoglalják a Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár [A9-15] gyűjteményes kötetei, amelyekben az elméleti kérdések körén túl számos gyakorlati vonatkozású kérdést tárgyalunk. Ezekben a munkákban én is részt vettem, esetenként a kísérletek elvégzésében és a mérőberendezés összeállításában is. A kötetek több tanulmányában szerzőként is szerepelek (pl. [TE11]). Különösen kiemelném az alagútnyitással kapcsolatos eredményeket, amelyek a fenti 2. tézisponthoz kapcsolható eredmények konkrét alkalmazását jelentik [A16,A17,A18].

Ugyanezek a reológiai indíttatású vizsgálatok motiválták részvételemet a MOL egyik kutatási munkájában [A19-21], amelyet a MOL kiemelkedően sikeresnek értékelt és 2009-ben meghosszabbított ([A22-23] és [A24]). Ezekben a vizsgálatokban törésmechanikai teszteken kívül reológiai elemzést is végeztünk különböző olaj- és gázlelőhelyek magmintáin.

Ugyancsak itt említhető Vásárhelyi Balázssal közös munkánk a közettestek minőségi paramétereinek károsodási modellbe illesztéséről és ennek segítségével

a rugalmassági modulus és a nyomószilárdság empirikusan ismert kapcsolatának elméleti megerősítéséről [A25,A26].

Érdekes alkalmazása lehet továbbá a teljes Kluitenberg–Verhás-modellnek a harmadik generációs gravitációshullám detektorok esetén fontos newtoni zaj pontos kiszámítása is, ahogy azt a Mátrai Gravitációs és Geofizikai Laboratórium kutató kollektívája NKFIH támogatott kutatás keretében tervezi [A27].

A tézispontokhoz kapcsolódó publikációk:

- [T1] P. Ván. Exploiting the Second Law in weakly nonlocal continuum physics. *Periodica Polytechnica, Ser. Mechanical Engineering*, 49(1):79–94, 2005.
- [T2] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003.
- [T3] P. Ván. The Ginzburg-Landau equation as a consequence of the Second Law. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17(2):165–169, 2005.
- [T4] P. Ván, A. Berezovski, and J. Engelbrecht. Weakly nonlocal nonequilibrium thermodynamics - the Cahn-Hilliard equation accepted book chapter in G. Maugin memorial volume, *arxiv:1710.04204*, 2017.
- [T5] P. Ván, A. Berezovski, and J. Engelbrecht. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008.
- [T6] P. Ván and T. Fülöp. Weakly nonlocal fluid mechanics - the Schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society, London A*, 462(2066):541–557, 2006.
- [T7] P. Ván, C. Papenfuss and A. Berezovski. Thermodynamic approach to generalized continua. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(3):403–420 (erratum: 421-422), 2014.
- [T8] V. A. Cimmelli and P. Ván. The effects of nonlocality on the evolution of higher order fluxes in non-equilibrium thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 46(11):112901–15, 2005.
- [T9] P. Ván and T. Fülöp. Universality in heat conduction theory: weakly nonlocal thermodynamics. *Annalen der Physik*, 524(8):470-478, 2012.
- [T10] R. Kovács and P. Ván. Generalized heat conduction in heat pulse experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 83:613-620, 2015.
- [T11] P. Ván, R. Kovács and T. Fülöp. Thermodynamic hierarchies of evolution equations. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 64(3S):389–395, 2015.
- [T12] P. Ván. Theories and heat pulse experiments of non-Fourier heat conduction. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, 7(2):150-166, 2016.
- [T13] S. Both, B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, Á. Gyenis, R. Kovács, P. Ván and J. Verhás. Deviation from the Fourier law in room-temperature heat pulse experiments. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 41(1):41-48, 2016.
- [T14] P. Ván, A. Berezovski, T. Fülöp, Gy. Gróf, R. Kovács, Á. Lovas and J. Verhás. Guyer-Krumhansl-type heat conduction at room temperature. *EPL*, 118:50005, 2017.
- [T15] R. Kovács and P. Ván. Second sound and ballistic heat conduction: NaF experiments revisited. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 117:682-690 2018.
- [T16] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3.*, 2. fejezet, 25–87. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.

- [T17] Asszonyi, Cs. and Fülöp, T. and Ván, P. Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27:971-986, 2015.
- [T18] P. Ván. Objective time derivatives in non-equilibrium thermodynamics. *Proceedings of Estonian Academy of Sciences*, 57(3):127, 2008.
- [T19] P. Ván. Kinetic equilibrium and relativistic thermodynamics. *EPJ WEB of Conferences*, 13:07004, 2011.
- [T20] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161-1169, 2009.
- [T21]¹ T. S. Biró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *EPL*, 89:30001, 2010.
- [T22] P. Ván and T.S. Biró, Relativistic hydrodynamics - causality and stability. *European Physical Journal - ST*, 155:201-212, 2008.
- [T23] P. Ván, Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, P02054, 2009.
- [T24] P. Ván and T.S. Biró. First order and generic stable relativistic dissipative hydrodynamics. *Physics Letters B*, 709(1-2):106-110, 2012.
- [T25] Ván P. A doktori értekezés 3. fejezete. 2012.
- [T26] A. Berezovski and P. Ván. *Internal Variables in Thermoelasticity*, Springer, 2017.

A tézispontokban nem említett, de az értekezés témájához kapcsolódó publikációk:

- [TE1] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics - the Ginzburg-Landau equation. *Technische Mechanik*, 22(2):104-110, 2002.
- [TE2] P. Ván. Weakly nonlocal continuum theories of granular media: restrictions from the Second Law. *International Journal of Solids and Structures*, 41(21):5921-5927, 2004.
- [TE2] P. Ván. One and two component fluids: restrictions from the Second Law. *Physica A*, 340(1-3):418-426, 2004.
- [TE3] P. Ván. Unique additive information measures - Boltzmann-Gibbs-Shannon, Fisher and beyond. *Physica A*, 365:28-33, 2006.
- [TE4] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109-112, 2006.
- [TE5] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives, *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507-19, 2007.
- [TE6] Ván P. Objektív anyagfüggvények felé a reológiában. In *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika 2007 konferenciakiadvány*, szerk. Török Á. és Vásárhelyi B., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 4.*, 327-332. o., Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [TE7] P. Ván. Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben. In *Új eredmények a kontinuumfizikában*, szerk. Fülöp T., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika*

¹ Ez a publikáció az EPL címlapjára került, az újság az év legkiemelkedőbb cikkei közé sorolta (research highlights) és mindenki számára szabadon hozzáférhetővé tette.

Kiskönyvtár 8., 2. fejezet, 37–54. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[TE8] Ván P. Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics - variational principles and Second Law. In Ewald Quak and Tarmo Soomere, editors, *Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods)*, chapter III, pages 153–186. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.

[TE9] Ván P. A harmadfokú, véges deformációs rugalmasságtan termodinamikai konzisztenciájáról. In *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, szerk. Fülöp T., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 10., 69–83. o. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.

[TE11] Asszonyi Cs., Szarka Z., Csatár A. Horváth R. Kocsis D. és Ván P. Tömör anyagok képlékeny deformációjáról. In *A képlékenység termodinamikájáról*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* 13., 1. fejezet, 9–21. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2012.

[TE12] P. Ván. Galilean relativistic fluid mechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 29(2):585–610, 2017.

[TE13] P. Ván, M. Pavelka, and M. Grmela Extra mass flux in fluid mechanics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 42(2):133–151, 2017.

Publikált alkalmazások:

[A1] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and M. Berezovski. Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modelling. *Acta Mechanica*, 220:349, 2011.

[A2] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and T. Peets. Multiscale modeling of microstructured solids. *Mechanics Research Communications*, 37(6):531–534, 2010.

[A3] M. Berezovski, A. Berezovski, and J. Engelbrecht. Waves in materials with microstructure: numerical simulation. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 59(2):99–107, 2010.

[A4] J. Engelbrecht. Nonlinear wave motion and complexity. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 59(2):66–71, 2010.

[A5] J. Engelbrecht, A. Salupere, and K. Tamm. Waves in microstructured solids and the Boussinesq paradigm. *Wave Motion*, 48(8, SI):717–726, 2011.

[A6] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Thermoelasticity with dual internal variables. *Journal of Thermal Stresses*, 34(5-6, SI):413–430, 2011.

[A7] M. Berezovski and A. Berezovski. On the stability of a microstructure model. *Computational Materials Science*, 52(1):193–196, 2012.

[A8] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Generalized thermomechanics with dual internal variables. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2):229–240, 2010.

[A9] Asszonyi Cs., szerk. *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.

[A10] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és*

képlékeny állapota, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007.

[A11] Asszonyi Cs. szerk., *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 6.*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[A12] Fülöp T. szerk. *Új eredmények a kontinuumfizikában, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8.*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[A13] Asszonyi Cs. szerk., *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.

[A14] Fülöp T. szerk., *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10.*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.

[A15] Asszonyi Cs. szerk., *A képlékenységi termodinamikájáról. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 13.*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2012.

[A16] P. Ván and Szarka Z. Rock rheology - time dependence of dilation and stress around a tunnel. In A. Van Cotthem, R. Charlier, J-F Thimus, and J-P. Tshibangu, editors, *Eurock 2006, Multiphysics Coupling and Long term behaviour in rock mechanics*, pages 357–363, London-Leiden/ etc., 2006. Taylor and Francis. Proceedings of the International Symposium of the International Society for Rock Mechanics, Eurock 2006, 9-12 May 2006, Liège, Belgium.

[A17] Fülöp T. és Béda Gy. Hidrosztatikus környezetben nyitott hengersizmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés. In *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9.*, 99–114. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.

[A18] Szarka Z. és Béda Gy. Asszonyi Cs. Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők. In *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, szerk. Asszonyi Cs., *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9.*, 115–171. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.

[A19] M. Tóth T., Vásárhelyi B., Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja I. Mezörsas-Ny, Kutatási jelentés, MOL, 2007.

[A20] M. Tóth T., Vásárhelyi B., Ván P. és Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja II. Dorozsma. Kutatási jelentés, MOL, 2008.

[A21] M. Tóth T., Nagy Á., Fintor K., Vásárhelyi B., Ván P. és Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja III. Kiskunhalas ÉK. Kutatási jelentés, MOL, 2009.

[A22] M. Tóth T., Nagy Á., Fintor K., Vásárhelyi B., Ván P. és Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja IV. Kiskunhalas ÉK-D, karbonátok. Kutatási jelentés, MOL, 2009.

[A23] M. Tóth T., Nagy Á., Vásárhelyi B., Ván P. és Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum

tum alapú modellek korrelációja V. Kömpöc, Csólyospálos-K. Kutatási jelentés, MOL, 2011.

[A24] M. Tóth T., Földes T., Vásárhelyi B., P. Ván, B. Kiss, P. Kurgyis, and B. Lakos. Integrated evaluation of petrologic, petrophysical and geophysical data of the Mezősas-W fractured metamorphic HC reservoir. *MOL Scientific Magazine*, (2):74–82, 2010.

[A25] Ván P. és Vásárhelyi B., A kőzettestek minőségi jellemzésének és károsodottságának viszonyáról, In *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, szerk. Fülöp T., Mérnökgeológia- Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10., 85-98. o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.

[A26] Ván P. and Vásárhelyi, B., Relation of rock mass characterization and damage, in Rock Engineering in Difficult Ground Conditions (Soft Rock and Karst), ed. Ivan Vrkljan, Balkema, p399-404, 2010., Proceedings of Eurock'09 Cavtat, Croatia, 2009 X. 28-29.

[A27] G.G. Barnaföldi, ..., P. Ván, ... (31 szerző). First report of long term measurements of the MGGL laboratory in the Mátra mountain range. *Classical and Quantum Gravity*, 34:114001(22), 2017.

Egyéb publikációk:

[E1] M. E. Gurtin. Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19:339–352, 1965.

[E2] W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 2:197–226, 1958/59.

[E3] J. Verhás. On the entropy current. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 8:201–206, 1983.

[E4] B. Nyíri. On the entropy current. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 16:179–186, 1991.

[E5] M. G. Gurtin. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance. *Physica D*, 92:178–192, 1996.

[E6] M. Grmela and H. C. Öttinger. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism. *Physical Review E*, 56(6):6620–6632, 1997.

[E7] H. C. Öttinger and M. Grmela. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. II. Illustrations of a general formalism. *Physical Review E*, 56(6):6633–6655, 1997.

[E8] D. Krajcinovic. *Damage mechanics*. Elsevier, Amsterdam-etc., 1996. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.

[E9] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories (Relativistic Physics and Philosophy of Science)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.

[E10] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, III. Relativistic theory of the simple fluid. *Physical Review*, 58:919–924, 1940.