Opponensi vélemény Fleiner Tamás doktori értekezéséhez

1. Bevezetés

A dolgozat témája a stabil párosítások elmélete, amellyel kapcsolatban jellegükben, és a szükséges matematikai apparátusban is lényegesen különböző új eredményeket mutat be a szerző. A stabil párosítás probléma alapesete egy páros gráfon definiált hozzárendelési probléma, ahol minden csúcsnak van egy preferencia sorrendje az ellentétes csúcshalmazba eső szomszédai felett. Olyan párosítást kell találni, hogy ne legyen olyan párosításban nem szereplő él, amelynek mindkét végpontja egy kevésbé preferált csúcshoz van rendelve. Erre a problémára Gale és Shapley adott egy mára klasszikussá vált algoritmust. A szerző egyik legfontosabb eredménye egy új definíció a stabil párosítás jellegű problémákban előforduló kiválasztási függvényekre, és az új függvények tulajdonságainak elemzése. Az új megközelítés segítségével a szerző egyrészt új, gyakran egyszerűbb bizonyításokat ad korábbi eredményekre, másrészt új eredményeket ér el. Egy másik fontos problémakör általános gráfokon stabil b-párosítások keresése (azaz minden v csúcsnak előre adott számú $b(v) \geq 1$ párja lehet), amelyre egy társszerzővel közösen általánosítja Irving módszerét, ami általános gráfokon oldja meg a stabil párosítás problémát. A dolgozat témaválasztásának fontosságát mutatja, hogy 2012 Alvin E. Roth és Lloyd Shapley Nobel díjat kaptak, a méltatás szerint „for the theory of stable allocations and the practice of market design."

2. A dolgozat fő eredményei

A dolgozat egy bevezető fejezetből, és további 7 számozott fejezetből áll.

Az első fejezet tartalmazza az új definíciót a kiválasztási függvényre, valamint számos elemi tulajdonságot és eredményt mutat be. Ezek közül a legjelentősebb a „Kernel" fogalmának bevezetése, amelyet a stabil párosítási problémára alkalmazva páros gráfokon a probléma megoldásaival ekvivalens. A Corollary 1.17-et számos további fejezetben hivatkozza a szerző, a fő állítás az, hogy a „kernel"-ek hálót alkotnak egy alkalmasan definiált rendezésre nézve.

A második fejezet „kernel"-ekkel kapcsolatos eredményeket mutat be. Rögtön az elején új bizonyítást ad Baiou és Balinski stabil hozzárendelésekkel kapcsolatos eredményére, ahol is dolgozók, és gyárak egy páros gráfot határoznak meg, és minden dolgozónak van egy preferált sorrendje a gyárak felett, és minden gyárnak is a dolgozók felett, valamint minden szereplőnek van egy kvótája, ami korlátozza a hozzá rendelhető munka mennyiségét, valamint minden gyár-dolgozó élnek van egy maximális kapacitása is. A dolgozók a preferencia sorrendjük szerint akarják a munkaidejüket gyárakhoz rendelni a kvótájuk erejéig, és a gyárak is a preferált dolgozókkal akarják a munkát végeztetni. Erre a problémára is természetesen adódik a stabil hozzárendelés, és a jelölt egy rövid, vázlatos bizonyítást ad a tételre az eszköztárát használva. A 2.1. alfejezetben részben rendezett halmazokon, míg a 2.2. alfejezet matroidokon definiált kerneleket vizsgál. A 2.1 alfejezetben Jankó Zsuzsával közösen általánosítja Aharoni, Berger és Gorelik tételét. Mindkét esetben, a Corollary 1.17 kulcs szerepet játszik.

A 3. fejezet „kernel"-ek néhány tulajdonságát mutatja be. A 3.1. alfejezet témája a „kikeresztezhetőség" (azaz „kernel"-ek egy halmazát egy lánccal lehet helyettesíteni), a 3.2 alfejezet pedig kernelek felbontásával foglalkozik, és a fő eredménye a 3.4 tétel, amely szerint a páros gráfon értelmezett b-párosítás probléma esetén a csúcsokhoz illeszkedő élhalmazok particionálhatóak oly módon, hogy minden kernel legfeljebb egy élet tartalmaz a partíció minden részhalmazából. A későbbiekben szintén fontos szerephez jut ez az eredmény. A 3.3 alfejezet kernelekhez értelmezi a transzverzál fogalmát, ami egy olyan részhalmaza az elemeknek, ami minden kernellel pontosan egy közös elemet tartalmaz.

A 4. fejezet 3 alkalmazási területet mutat be. A 4.1. alfejezet utakkal kapcsolatos eredményeket, a 4.2 listás élszínezési problémákat, míg a 4.3 iskolai felvétellel kapcsolatosakat. A 4.2 és a 4.3 alfejezetek eredményei neves társszerzőkkel közösek. A 4.3 alfejezetben olyan stabil hozzárendelési problémára ad megoldást a jelölt Naoyuki Kamiyamával közösen, amelyben a minden iskolához tartozik egy maximális felvehető létszám, az iskoláknak, és a jelentkezőknek is van preferencia sorrendje, de ezeken túl minden szereplőhöz tartozik egy lamináris halmazrendszer a hozzá köthető szereplők felett, alsó és felső korlátokkal együtt. A jelölt szerzőtársával közösen egy elegáns konstrukciót mutat, amelyben a stabil hozzárendelési problémát, alsó és felső korlátokkal kiegészítve, visszavezeti a matroid kernel problémára.

Az 5. fejezet a stabil párosítás poliéderrel foglalkozik, és az 5.1 alfejezetben a jelölt elsőként ad teljes leírást a stabil b-párosítás poliéderre, a megoldás kulcsa a korábban kiemelt 3.4 struktúra tétel. Az 5.2 alfejezet pedig a kernel poliéder lineáris leírására ad általános eredményeket.

A 6. fejezetben a jelölt definiálja a stabil hálózati folyamokat, és megmutatja, hogy visszavezethetőek a stabil hozzárendelésekre. Ezen túl megmutatja, hogy a stabil folyamok szintén hálót alkotnak.

A 7. fejezet témája stabil b-párosítások, és kernelek. Egyrészt Katarína Cechlárovával közösen általánosítja Irving nevezetes algoritmusát általános gráfokban stabil b-párosítások keresésére, (Irving algoritmusa általános gráfokban talál stabil párosítást, vagy megmutatja, hogy nem létezik). Továbbá, Irvinggel és Manlove-val közösen hasonló algoritmust dolgoz ki a szuper-stabil párosítás problémára, amelyben a párosítás nem használhat előre adott tiltott éleket. A 7.4 alfejezetben a stabil szobatárs problémát modellezi kiválasztási függvényekkel, és megmutatja, hogy a korábbi eredmények is természetesen adódnak az új megközelítésben is. Végül a 7.4.1 alfejezet néhány komplexitási és a kernelek struktúrájára vonatkozó eredményt mond ki és bizonyít be.

3. A dolgozat kivitelezése

A dolgozat angol nyelven íródott, általában jól követhető, de elég tömör, ami részben az érthetőség, részben pedig a korábbi eredményekkel való kapcsolat bemutatásának a rovására megy.

A dolgozat bevezető fejezetében a jelölt felsorolja a legfontosabb előzményeket, referenciákat. Például megemlíti, hogy Donald E Knuth szerint John Conway már megfigyelte, hogy egy páros gráfban a stabil párosítások hálót alkotnak. Ugyanakkor a Corollary 1.11 tárgyalása után, ami lényegében kernelekre mond ki hasonló eredményt, jó lett volna tárgyalni a kapcsolatot Conway eredményével. Egy másik példa Blair eredménye, amire igaz, hogy a Theorem 1.19-ben új bizonyítást ad a jelölt, de Blair is egy saját kiválasztási függvény definíciót alkalmaz, amit jó lett volna bemutatni a dolgozatban, és kiemelni, hogy mik az eltérések a jelölt kiválasztási függvénye és Blair kiválasztási függvénye között (ha feltesszük, hogy a fizetések halmaza egy elemű, és hogy minden munkás / gyár csak egy elemű halmazokat választhat).

Több, időnként zavaró elírás is előfordul, például rögtön az első számozott fejezetben a legfontosabb definíciókban. „Matching M dominates edge $e = uv$ if M contains some edge m with $m \preceq_u f$". Itt f helyett e kellene, hogy álljon, csak úgy, mint a következő mondatban.

Az 5. fejezetben a $\preceq$ helyett a $\leq$ szimbólumot használj a jelölt, mi ennek az oka? Egy további példa a 42. oldalon az 5.4 tételben a Φ_{ij} halmaz definíciója, ahol szerintem $<_u$ illetve $<_v$ relációkra volna szükség $>_u$ illetve $>_v$ helyett (a szöveg szerint is az uv élnél jobban preferált élek tartoznak a halmazhoz).

4. Kapcsolódó publikációk

A dolgozat fő eredményei megjelentek lektorált folyóirat cikkekben, amit ki is emel a szerző.

5. Kérdések

1. Hogyan viszonyulnak a dolgozatban bemutatott kiválasztási függvény tulajdonságai a szakirodalomból ismert néhány példához (Roth: Conflict and coincidence of interest in job matching... (1984) , Blair: The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners ... (1988))?

2. Van-e egyszerű strukturális jellemzése az 5.4 tételben $P^b(G, \mathcal{O})$ poliéder lapjainak, azaz mely egyenlőtlenségek határoznak meg lapokat?

6. Összegzés

A dolgozat olyan eredményeket mutat be, amelyek a stabil párosítások elméletét, és gyakorlati alkalmazásait is gazdagítják. A szerző által kidolgozott kiválasztási függvényeken alapuló megközelítés nagyon gyümölcsözőnek bizonyult, amely megmutatkozik a bemutatott eredmények sokszínűségében, és a kapcsolódó tudományos dolgozataira eddig kapott hivatkozások számában is.

Elmondható, hogy olyan területen ért el alapvető eredményeket, amelyeket az elméleti matematika, és a közgazdaságtan nagyjai művelnek.

A dolgozatban bemutatott eredményeket újnak ismerem el, és javaslom a fokozat odaítélését.

Kis Tamás

Budapest, 2019.08.05.