Válasz Jordán Tibor bírálatára

Nagyon köszönöm Jordán Tibornak támogató véleményét és dicséretét. Elismerem, hogy a szakkifejezések magyar fordítása nem mindig sikerült a legszerencsésebbre, bár ahol lehetett, igyekeztem követni a magyar gyakorlatot. Elnézést kérek a tézisfüzetekben szereplő elírásokért.

A feltett kérdések közül először a másodikra válaszolnék. A CSP feladatoknak természetes módon definiálhatjuk különböző optimalizálási változatait is. Ezen optimalizálási problémák egzakt vagy közelítő megoldása alaposan kutatott terület. Többféle módon lehet a célfüggvényt definiálni:

- maximalizálhatjuk a kielégített feltételek számát,
- minimalizálhatjuk a ki nem elégített feltételek számát,
- az értékkészlet elemeihez költségeket rendelhetünk, és minimalizálhatjuk a változókhoz rendelt értékek összköltségét,
- definiálhatjuk a korlátokat úgy, hogy nemcsak egy megengedett/tiltott relációt fejeznek ki, hanem a változók minden kombinációjához egy értéket rendelnek, és ezen értékek összegét kell minimalizálni.

A bináris CSP esetén a Gaifmann-gráf struktúrája hasonló módon befolyásolja az optimalizálási probléma bonyolultságát, mint az eldöntési változatáét. Az alacsony favastagságot használó dinamikus programozási algoritmusok kézenfekvő módon általánosíthatóak, és az alsó korlátok értelemszerűen érvényesek az általánosabb problémára is.

Érdekes módon a helyzet korántsem ennyire egyértelmű a hipergráfokkal kapcsolatos eredmények esetén. Az alapvető probléma az, hogy hiperfa vastagság nem egy monoton paraméter: hiperélek elhagyásával kapott részhipergráfoknak nagyobb lehet a hiperfa vastagsága, mint az eredeti hipergráfnak (gondoljunk például arra, hogy ha egy hiperél tartalmazza az összes csúcsot, akkor a hiperfa vastagság 1, de ennek az élnek az elhagyásával tetszőlegesen nagyra nőhet). Az ismert dinamikus programozási algoritmusok lényegében azt használják ki, hogy a kielégített korlátok által alkotott hipergráf korlátos hiperfa vastagságú. Ha egy olyan optimalizálási feladatot definiálunk, ahol minden korlátot ki kell elégíteni, de esetleg a megoldásoknak különböző költsége van, akkor ezek a dinamikus programozási algoritmusok átmenthetők. Továbbá, ha a feladatot leíró hipergráfra teljesül, hogy minden részhipergráfnak korlátos a (frakcionális stb.) hiperfa vastagsága, akkor az algoritmikus eredmények általánosíthatóak az optimalizálási problémákra is. Ez a kombinatorikus tulajdonság viszont elég nehezen megérthetőnek tűnik; jellemzése, felismerése, közelítése aktív kutatási terület.

Az első kérdés a CSP feladatok és a hagyományos (hiper)gráf optimalizálási feladatok kapcsolatára kérdez rá. Bizonyos optimalizási problémák kifejezhetők egy CSP feladat optimalizálási változataként. Például, ha a független ponthalmaz problémát tekintjük hipergráfokon, vagyis egy olyan maximális méretű csúcshalmazt keresünk, ami minden élből csak legfeljebb egy elemet tartalmaz, akkor ez kifejezhető egy olyan optimalizálási CSP feladatként ahol $D = \{0, 1\}$ és minden r méretű élnek egy olyan korlát felel meg, ami $r + 1$ lehetséges kombinációt enged meg. Ezen kapcsolat alapján megmutatható, hogy a probléma polinomidőben megoldható korlátos (frakcionális) hiperfa vastagság esetén. Ez tovább általánosítható arra az esetre, ahol a megoldás legfeljebb d elemet tartalmazhat minden hiperélből (valamilyen rögzített d konstansra). Különböző színezési problémák is természetes módon megfogalmazhatóak CSP feladatként, bár ez főként az eldöntési problémákra igaz.

Saarbrücken, 2020. október 19.

Marx Dániel